

**Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана**

---

**А.С. Гусев**

**ДЕСЯТЬ ЛЕКЦИЙ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ**

**Москва  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н.Э. Баумана**

**2019**

## **Оглавление**

<b>Лекция 1. Основные понятия и задачи сопротивления материалов .....</b>	<b>3</b>
<b>Лекция 2. Растяжение и сжатие стержней.....</b>	<b>7</b>
<b>Лекция 3. Механические характеристики материалов .....</b>	<b>12</b>
<b>Лекция 4. Расчеты на прочность и жесткость стержня на растяжение и сжатие .....</b>	<b>16</b>
<b>Лекция 5. Расчеты на устойчивость при сдвиге.....</b>	<b>39</b>
<b>Лекция 6. Кручение круглых стержней .....</b>	<b>19</b>
<b>Лекция 7. Прямой чистый изгиб балок.....</b>	<b>23</b>
<b>Лекция 8. Геометрические характеристики плоских сечений .....</b>	<b>26</b>
<b>Лекция 9. Кручение некруглых стержней.....</b>	<b>23</b>
<b>Лекция 10. Расчеты на устойчивость .....</b>	<b>30</b>

## Лекция 1. Основные понятия и задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов – это учебная дисциплина втузов, в которой изучаются основы инженерных методов расчета прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций. Под элементом конструкции понимается любая деталь машины, устройства или сооружения, которая рассматривается без учета особенностей изготовления, условий работы, качества поверхности и других подобных факторов, и в которой на первый план ставится ее геометрическая форма и вид нагружения. Влияние других факторов на прочность реальных деталей может оказаться решающим, однако учет этих факторов при проектировании и расчете рассматриваются в специальных курсах по конструированию и технологии изготовления конструкций.

Под прочностью понимается способность элементов конструкции не разрушаться под воздействием приложенных нагрузок. Под жесткостью – способность сохранять при этом свои размеры и форму. Под устойчивостью – способность сохранять первоначальную форму равновесия.

Сопротивление материалов строится на ряде допущений (гипотез) о свойствах материалов и на ряде упрощающих принципов, положенных в основу расчетов. Так, принимается гипотеза о сплошности материала, по которой считается, что материал не имеет пустот и других внутренних дефектов. По другой гипотезе (гипотезе изотропности) считается, что свойства материала во всех направлениях одинаковы. В расчетах применяются три основных принципа: принцип независимости действия сил, принцип Сен-Венана и принцип первоначальных размеров. По первому из этих принципов считается, что результат суммарного действия нескольких нагрузок равен сумме результатов действия каждой нагрузки в отдельности. Согласно второму принципу локальные особенности деформирования материала в местах приложения нагрузок быстро затухают по мере удаления от этих мест. Согласно третьему принципу считается, что реакция связей и внутренние усилия в элементах конструкций могут быть достаточно точно определены без учета изменения размеров и форм конструкции при нагружении.

Объектами изучения в сопротивлении материалов являются стержни (балки), оболочки и пластины. Стержень (балка) – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (длина) значительно превышает два других. Форма сечений стержней может быть различной. На рис. 1.1а показаны сечения в виде квадрата, круга, двутавра, швеллера и тавра. Возможны различные комбинации этих элементарных сечений. Оболочка – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (толщина) значительно меньше двух других (рис. 1.1, б). Пластина – оболочка, у которой кривизна равна нулю (рис. 1.1, в).

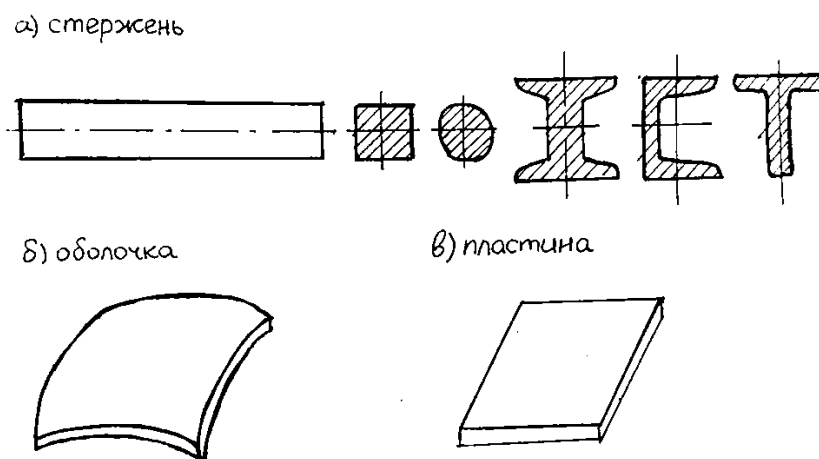


Рис. 1.1

Основным понятием в сопротивлении материалов является понятие о напряжениях. Оно вводится следующим образом. Рассмотрим некоторый элемент конструкции, находящийся под воздействием внешних нагрузок (рис. 1.2, а). Мысленно отделим сечением I-I одну его часть от другой (рис. 1.2, б). Для равновесия каждой из этих частей необходимо, чтобы в сечении возникли такие силы, которые были бы эквивалентны приложенным к ним внешним нагрузкам. При этом в каждой элементарной площадке  $\Delta A$  сечения возникает элементарная сила  $\Delta F$ .

Величина

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

называется полным напряжением в точке. Это напряжение измеряется в паскалях – Па или мегапаскалях – МПа:

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \text{МПа} = 10^6 \text{ Па}$$

Полное напряжение в точке (см. точку А на рис. 1.2в) можно разложить на две составляющие: нормальное напряжение  $\sigma$  и касательное  $\tau$ .

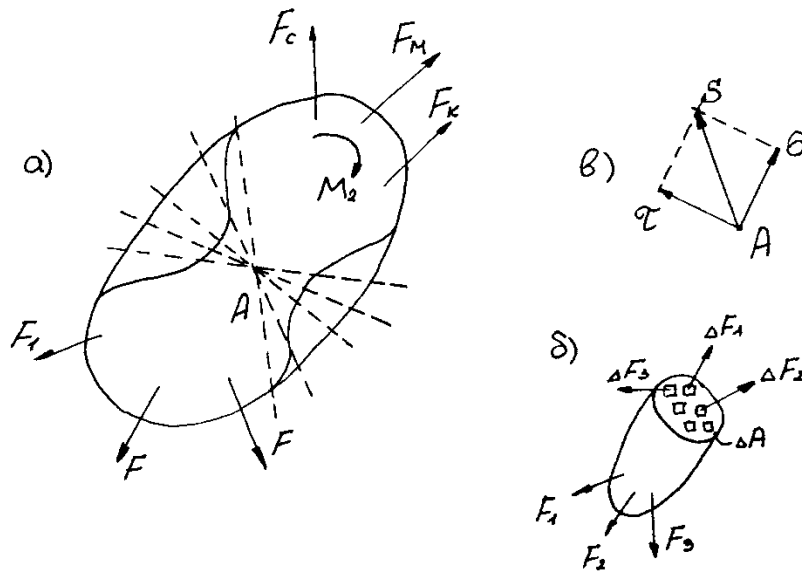


Рис. 1.2

Важнейшим понятием в сопротивлении материалов является понятие о внутренних силовых факторах. Оно вводится с помощью метода сечений, при котором элемент конструкции мысленно рассекается на две части. В каждой из частей все внутренние силы приводятся к одной вектор-силе  $\vec{F}$ , приложенной в центре тяжести сечения, и вектор-моменту  $\vec{M}$  (рис. 1.3, а). Поместим в центр тяжести сечения систему координат  $\{x, y, z\}$  и разложим  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  на составляющие:  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$  (рис. 1.3, б). Эти составляющие называются внутренними силовыми факторами.

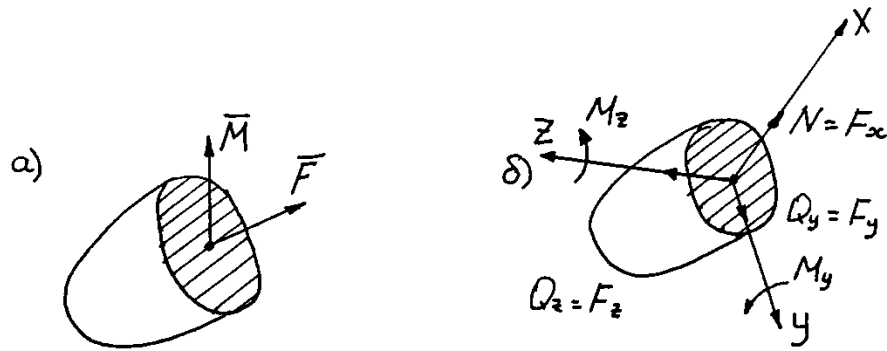


Рис. 1.3

Сила  $F_x = N$  называется нормальной силой (силой растяжения или сжатия). Силы  $F_y = Q_y$  и  $F_z = Q_z$  – силами сдвига. Момент  $M_x = M_{кр}$  – крутящим моментом. Моменты  $M_y$  и  $M_z$  – изгибающими моментами.

Для определения внутренних силовых факторах достаточно составить и решить шесть уравнений равновесия для любой из отсеченных частей элемента конструкции.

Нагружение стержня называется простым, если в его сечениях возникает только один силовой фактор. В противном случае нагружение называется сложным.

Простыми видами нагружения являются: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и изгиб. К сложным нагружениям относятся: изгиб с растяжением, изгиб с кручением и т.п.

Для примера рассмотрим определение силовых факторов в сечениях витков пружины растяжения с углом подъема винтовой линии  $\alpha$ , показанной на рис. 1.4.

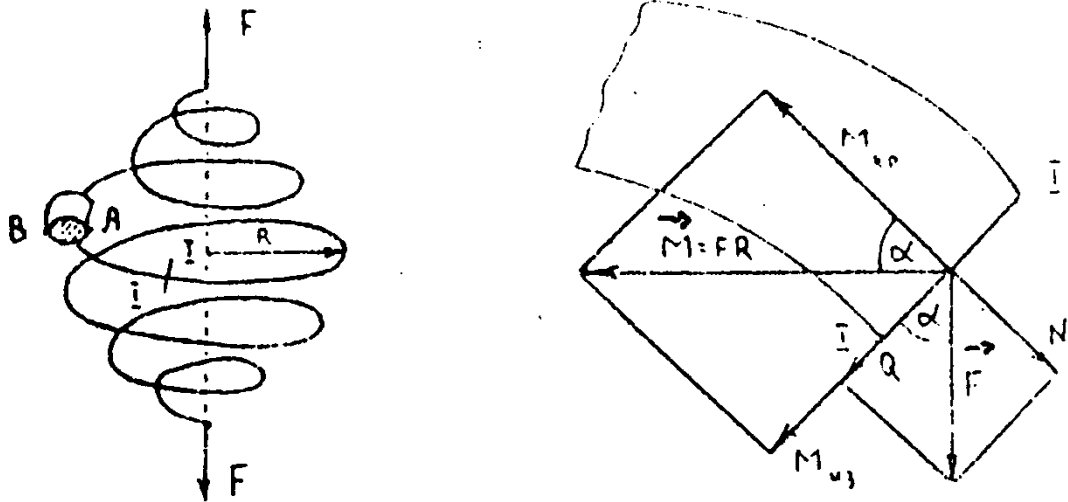


Рис. 1.4

Разложив вектор-силу  $\vec{F}$  и вектор-момент  $\vec{M}$  в сечении пружины на составляющие, получим:

$$\begin{aligned}
 Q &= F \cos \alpha \\
 N &= F \sin \alpha \\
 M_{кр} &= M \cos \alpha = FR \cos \alpha \\
 M_{из} &= FR \sin \alpha
 \end{aligned}$$

где  $R$  – радиус пружины, соответствующий рассматриваемому сечению.

## Контрольные задачи

**Задача 1.** По концам разреза кольца в его плоскости приложены две силы  $F$  (рис. 1.5). Определить внутренние силовые факторы в сечениях кольца.

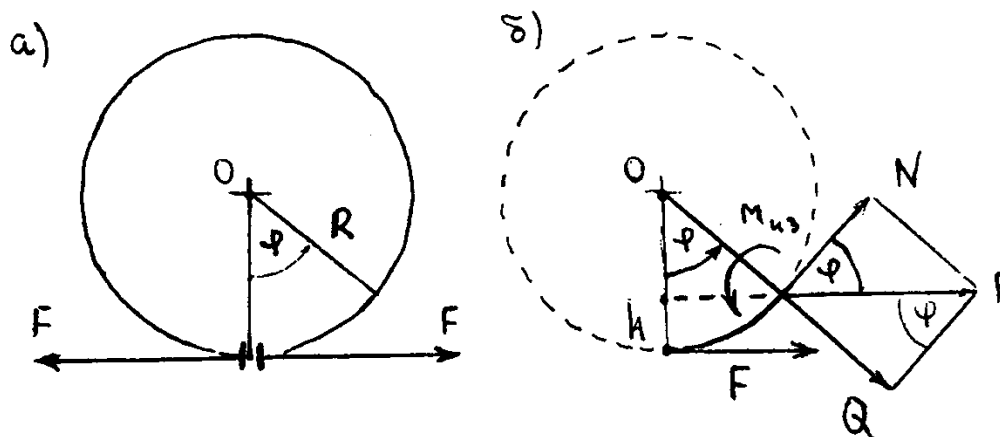


Рис. 1.5

**Решение.** Из условий равновесия части кольца, показанного на рис. 1.5, б, следует:

$Q = F \sin \varphi$	$\max Q = F, \text{ при } \varphi = \pi/2$
$N = -F \cos \varphi$	$\min N = -F, \text{ при } \varphi = 0$
$M_{из} = Fh = FR(1 - \cos \varphi)$	$\max M_{из} = 2FR, \text{ при } \varphi = \pi$

**Задача 2.** По концам разреза кольца перпендикулярно его плоскости приложены две силы  $F$  (рис. 1.6, а). Определить внутренние силовые факторы в сечениях кольца.

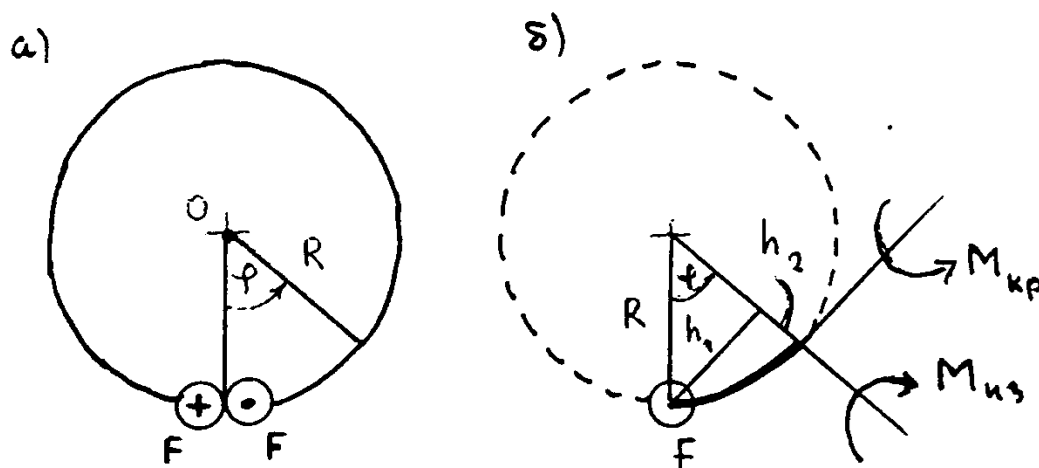


Рис. 1.6.

**Решение.** Из условий равновесия части кольца, показанного на рис. 1.6, б, следует:

$M_{из} = Fh_1 = FR \sin \varphi$	$\max M_{из} = FR, \text{ при } \varphi = \pi/2$
$M_{кр} = Fh_2 = FR(1 - \cos \varphi)$	$\max M_{кр} = 2FR, \text{ при } \varphi = \pi$

## Лекция 2. Растяжение и сжатие стержней

### 1. Анализ напряженного состояния

Рассмотрим растянутый силами  $F$  стержень с переменной площадью сечений  $A$ , показанный на рис.2.1, а. Сечениями (1-1) и (2-2) разделим его на три части, каждая из которых находится в равновесии под действием внешних сил  $F$  и внутренних усилий с интенсивностями (напряжениями)

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} > \sigma_2 = \frac{F}{A_2} \text{ при } A_2 > A_1$$

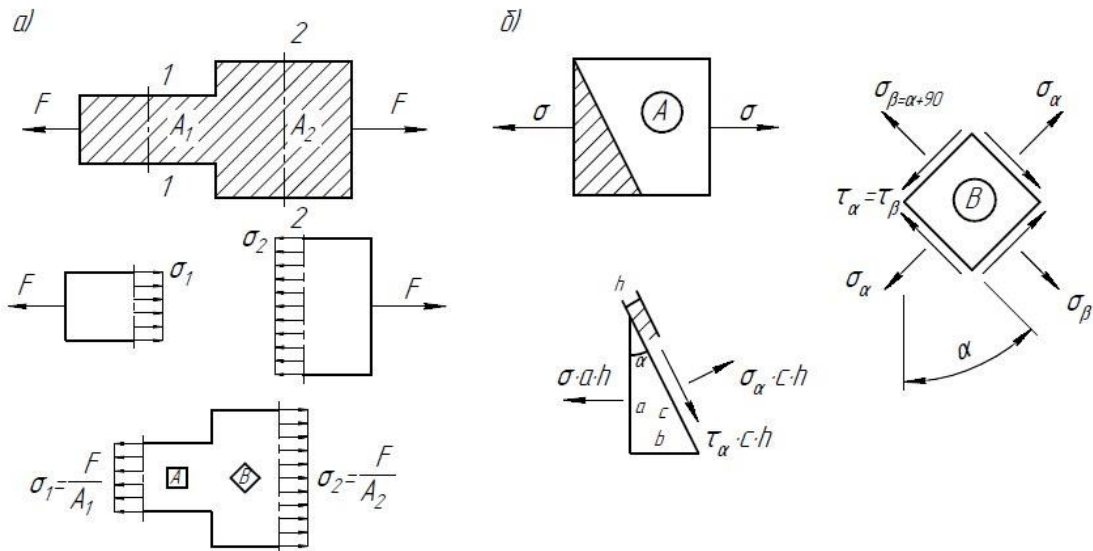


Рис.2.1 Анализ напряженного состояния

Напряженное состояние элементарных разно расположенных квадратов А и В показаны на рис.2.1, б. Определим напряжения  $\sigma_\alpha, \sigma_{\beta=\alpha+90}, \tau_\alpha$  и  $\tau_{\beta=\alpha+90}$  по заданному напряжению  $\sigma$  и углу  $\alpha$ .

Элементарная треугольная призма со сторонами  $a, b, c$  и толщиной  $h$  находится в равновесии под действием сил  $\sigma ah, \sigma_\alpha ch, \tau_\alpha ch$ . Из условий ее равновесия получаем формулы для определения напряжений  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha, \tau_\beta$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cdot \cos^2 \alpha ; \sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= \tau_\beta = \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2\alpha, \tau_{max} = \tau_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma \end{aligned}$$

### 2. Законы Гука и Пуассона

Экспериментально установлено, что при растяжении стержня происходит изменение его линейных  $l, h, b$  размеров и объема  $V$ , т.е. стержень деформируется, схематично так, как это показано на рис.2.2.

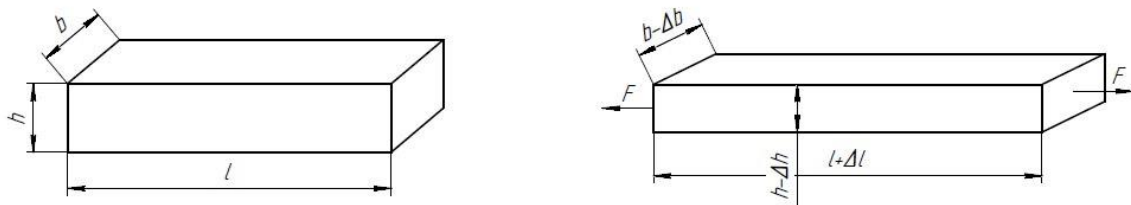


Рис.2.2. Деформации стержня при растяжении

Величины  $\Delta l$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta b$  называются абсолютными линейными деформациями,  $\Delta V$  - абсолютной объемной деформацией.

Величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \varepsilon_{\text{п}} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}; \varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$$

называются относительной продольной деформацией, относительной поперечной деформацией и относительной объемной деформацией, соответственно.

Экспериментально установлено, что при малых деформациях имеют место следующие зависимости.

Закон Гука:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Закон Пуассона:  $\varepsilon_{\text{п}} = -\mu\varepsilon = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}$

Величина  $E$  называется модулем упругости, величина  $\mu$  - коэффициентом Пуассона. Легко вычислить, что  $\varepsilon_v \approx \varepsilon(1 - 2\mu)$ .

Для стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,28$ .

Для меди  $E = 1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,33$ .

Для алюминия  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,35$ .

При нагревании стержня длиной  $l$  на  $t^\circ$  градусов происходит его удлинение на величину

$$\Delta l_t = \alpha l t,$$

где  $\alpha$  - коэффициент линейного расширения.

Соответственно изменяются размеры стержня  $h$ ,  $b$  и его объем  $V$ .

Для стали  $\alpha_{\text{ст}} = 1,25 \cdot 10^{-5}$  1/град.

Для меди  $\alpha_{\text{м}} = 1,67 \cdot 10^{-5}$  1/град.

Для алюминия  $\alpha_{\text{а}} = 2,3 \cdot 10^{-5}$  1/град.

Коэффициент объемного расширения  $\beta = 3 \cdot \alpha$ .

### 3. Определение перемещений и потенциальной энергии деформации в растянутом стержне

Рассмотрим защемленный слева стержень с переменной площадью сечения  $A$  и переменным модулем упругости  $E$ , показанный на рис.2.3.

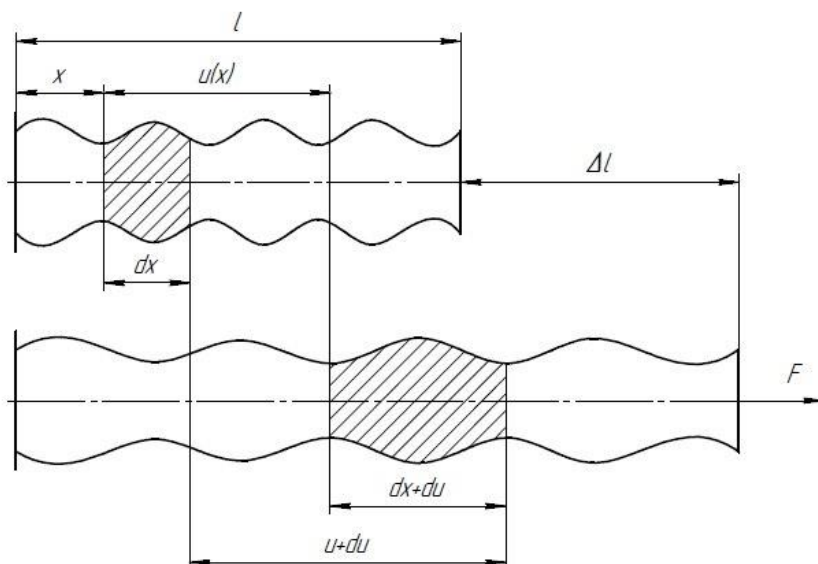


Рис. 2.3 К определению перемещений

Искомое перемещение сечения с координатой  $x$  обозначим  $u(x)$ . Перемещение сечения с координатой  $x + dx$  будет  $u + du$ . Из рисунка и закона Гука видно, что деформацию элемента  $dx$  можно определить как



$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{EA}$$

Отсюда находим:

$$u(x) = \int_0^x \frac{F}{EA} dx; u(0) = 0; u(l) = \Delta l = \int_0^l \frac{F}{EA} dx$$

Потенциальная энергия деформации  $d\Pi$  в элементе длиной  $dx$  будет определяться по формуле

$$d\Pi = \frac{1}{2} F du = \frac{F^2 dx}{2EA}$$

а энергии на длинах  $x$  и  $l$  будут

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{F^2 dx}{2EA} \quad \Pi(l) = \int_0^l \frac{F^2 dx}{2EA}$$

Если подынтегральные функции в приведенных формулах есть константы, то имеем:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}; \quad \Pi = \frac{F^2 l}{2EA}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial F} = u(x); \quad \frac{\partial \Pi(x)}{\partial u} = F(x)$$

Первая формула выражает теорему Кастилиано о перемещениях, а вторая - теорему Лагранжа о силах.

В заключение отметим, что приведенные выше формулы относятся к идеальным бездефектным стержням, не имеющим концентраторов напряжений, таких как отверстия и резкие изменения формы, показанные на рис. 2.4.

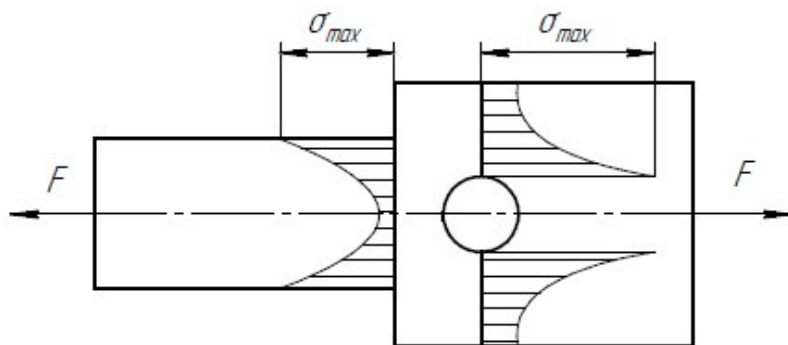


Рис. 2.4. К понятию о концентрации напряжений

Экспериментально установлено, что в этих местах происходит местное увеличение (концентрация) напряжений, которые могут превышать расчетные значения в несколько раз.

## Контрольные задачи

**Задача 1.** В растянутом стержне найти расположение линии (угол  $\alpha$ ), вдоль которой деформация  $\varepsilon_\alpha = 0$ , а напряжение  $\sigma_\alpha \neq 0$  и найти расположение линии (угол  $\beta$ ), вдоль которой напряжение  $\sigma_\beta = 0$ , а деформация  $\varepsilon_\beta \neq 0$  (рис. 2.5).

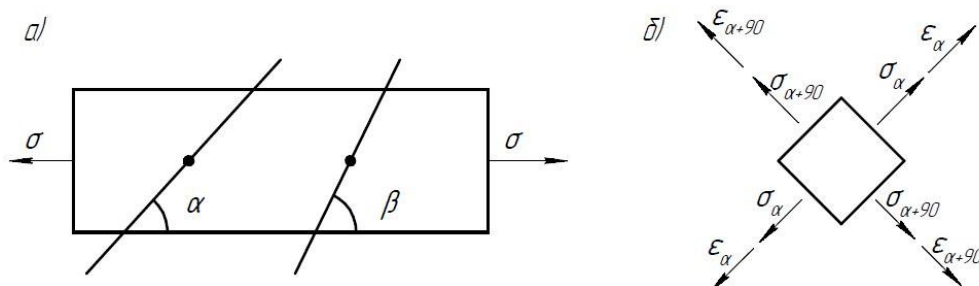


Рис. 2.5 К решению задачи 1

В соответствии с изображенным на рис. 2.5, б напряженно-деформированным состоянием точек стержня и законами Гука и Пуассона имеем равенства:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} \sigma_\alpha - \mu \frac{\sigma_{\alpha+90}}{E} = \frac{\sigma}{E} \cos^2 \alpha - \mu \frac{\sigma}{E} \sin^2 \alpha = 0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \mu \text{ и при } \mu = 0,3 \text{ имеем } \alpha = 61^\circ.$$

При этом  $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha \approx 0,23\sigma \neq 0$ .

На линии, определяемой углом  $\beta$ , имеем

$$\sigma_\beta = \sigma \cos^2 \beta \text{ и при } \beta = 90^\circ \text{ имеем } \sigma_\beta = 0.$$

Деформация

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E} \sigma_\beta - \mu \frac{\sigma_{\beta+90}}{E} = \frac{\sigma}{E} \cos^2 \beta - \mu \frac{\sigma}{E} \sin^2 \beta = -\mu \frac{\sigma}{E} \neq 0.$$

Таким образом, в вертикальном направлении  $\sigma = 0$ , а  $\varepsilon \neq 0$ . Вдоль линии с углом наклона  $\alpha = 61^\circ$  имеем  $\varepsilon = 0$ , а  $\sigma \neq 0$ .

**Задача 2.** При растяжении стержня энергия деформации в единице объема определяется

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$

При этом происходит изменение объема стержня и изменение его формы, так что

$$\Pi = \Pi_V + \Pi_\Phi,$$

Где  $\Pi_V$  - потенциальная энергия изменения объема,  $\Pi_\Phi$  - потенциальная энергия изменения формы.

Требуется составить формулы для определения  $\Pi_V$  и  $\Pi_\Phi$ .

Решение.

Напряженное состояние элементарного объема стержня состоит из напряженного состояния, приводящего к изменению объема  $V$  и к изменению формы  $\Phi$  (Рис.2.6).

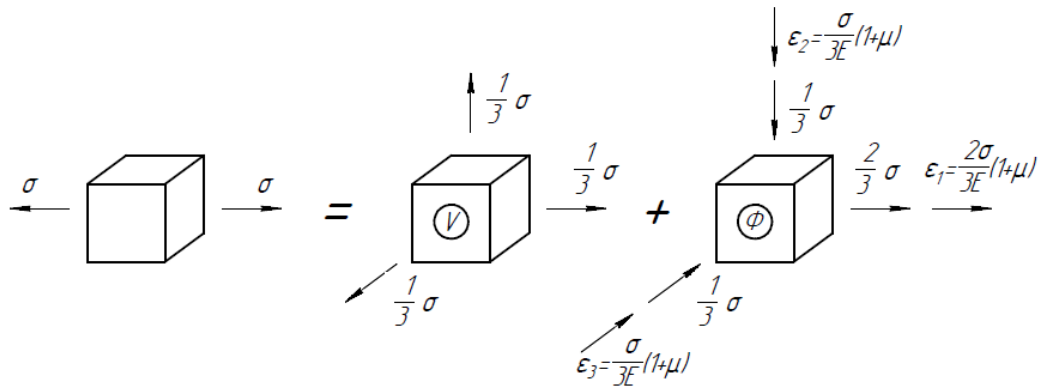


Рис.2.6 К решению задачи 2

В объеме  $\Phi$  объёмная деформация  $\epsilon_V = (1 - 2\mu) \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$ , так что здесь происходит только изменение формы с относительными деформациями

$$\epsilon_1 = \frac{2\sigma}{3E} \cdot (1 + \mu), \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{\sigma}{3E} \cdot (1 + \mu).$$

Тогда потенциальная энергия формы будет:

$$\Pi_\Phi = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sigma_i \epsilon_i = \frac{\sigma^2}{3E} \cdot (1 + \mu)$$

Потенциальная энергия изменения объема:

$$\Pi_V = \Pi - \Pi_\Phi = \frac{\sigma^2}{6E} \cdot (1 - 2\mu)$$

### Лекция 3. Механические характеристики материалов

Механические характеристики материалов определяются при испытании образцов на растяжение и сжатие. При этом используются специальные испытательные машины, позволяющие одновременно фиксировать циклические нагрузки и соответствующие им деформации образца. После пересчета опытных данных получают зависимость  $\sigma=f(\sigma)$  все из которых показаны на рис.3.1. Диаграмма I относится к малопрочному пластичному материалу, а диаграмма II – к высокопрочному материалу.

Отметим характерные зоны на диаграмме растяжения пластического материала. Зона OA – зона упругости. Здесь выполняется закон Гука: напряжения пропорциональны деформациям. Если в некоторой точке этой зоны прекратить нагружения, а затем уменьшить нагрузку, то разгрузка образца будет происходить по той же линии OA. При нулевой нагрузке все размеры образца возвратятся к первоначальным. Зона AB – зона общей текучести. Эта зона характеризуется тем, что увеличение деформации происходит почти без увеличения нагрузки. Если остановить нагружение в некоторой точке этой зоны, а затем уменьшить нагрузку, то разгрузка будет происходить по линии, параллельной линии упругости OA. После полного снятия нагрузки образец останется удлиненным на величину остаточной пластической деформации.

Зона BC – зона упрочнения. Она характеризуется тем, что увеличение деформации сопровождается возрастанием напряжений. Если прекратить нагружение в некоторой точке этой зоны и затем уменьшить нагрузку, то разгрузка будет так же происходить по линии, параллельной линии упругости OA. Остаточная пластическая деформация обозначена  $\epsilon$ . При повторном погружении образца возрастание нагрузки и образца будет происходить по линии разгрузки. В конце стадии упрочнения (в точке C) на образце появляется местное сужение («шейка») – место будущего разрушения. Зона CD – зона местной текучести и разрушения. Удлинение образца в этой зоне носит локальный характер. Оно происходит в основной области «шейки». Точка D соответствует моменту полного разрушения образца.

В зоне упругости выполняется закон Гука. Модуль упругости первого рода E определяется как тангенс угла наклона линии упругости к оси  $\epsilon$ :

$$E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3.1)$$

Отметим основные механические характеристики материалов, определяемые по диаграмме растяжения.

$\sigma_n$  - предел пропорциональности – наибольшее напряжение, при котором еще сохраняется линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

$\sigma_t$  – предел текучести – напряжение, при котором рост деформации происходит без заметного увеличения нагрузки.

(если материалы не обладают ярко выраженной зоной текучести (диаграмма II), то за условный предел текучести  $\sigma_{02}$  (или  $\sigma_{05}$ ) принимаются напряжение, при котором остаточная пластическая деформация  $\epsilon_a=0,2\%$  (или, соответственно,  $0,5\%$ );

$\epsilon_B$  – предел прочности – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке.

Описанные выше характеристики прочности относятся к материалам, не имеющим дефектов. В реальных материалах можно обнаружить трещины, пустоты, раковины, волосовины и другие дефекты. Наибольшую опасность представляют дефекты типа трещин, рост которых при циклическом нагружении приводит к полному разрушению.

Характеристики трещиностойкости материала можно определить на образцах с трещинами. При этом к испытаниям подготавливают образцы с различными длинами трещин. При растяжении таких образцов в момент разрушения фиксируются предельные напряжения (рис.4.2). Различным длинам трещин соответствуют различные предельные напряжения. По опытным данным строится зависимость предельного напряжения от длины трещин (рис.4.3). Опытные данные могут быть предоставлены в виде зависимости:

$$\sigma\sqrt{l} = const$$

(3.2)

Отсюда следует, что для детали с трещинами сами по себе уровень напряжений и длина трещины не определяют ее прочность. При уменьшении уровня напряжений можно допустить удлинение трещины и при уменьшении длины трещины – повышение уровня напряжений.

Для теоретического обоснования зависимости (3.2) заметим, что появление трещины приводит к образованию свободных от напряжений поверхностей и к соответствующей разгруженной зоне вокруг трещины. На появление новых поверхностей необходима затрата энергии, которая равна высвобождающейся энергии деформации из разгруженной зоны. Полагая, что (рис.3.4) зона разгрузки вокруг трещины имеет эллиптическую форму с площадью  $\pi l^2$ , получаем следующее уравнение, выражающее баланс энергии:

$$\frac{\pi l^2 \sigma^3}{2E} = 2l\gamma, \quad (3.3)$$

Где  $\gamma$  – удельная поверхностная энергия.

Из соотношения (4.3) получаем равенство:

$$\sigma\sqrt{l} = \frac{2\sqrt{E\gamma}}{\sqrt{\pi}} = K_{IC}, \quad (3.4)$$

Из которого следует соотношение (4.2). Константа в уравнениях (3.2) и (3.4) называются вязкостью разрушения и обозначается через  $K_{IC}$ .

Условие трещиностойкости выражается неравенством

$$\sigma\sqrt{l} \leq K_{IC}$$

Для стали Ст.3 имеем  $K_{IC} = 30 \text{ МПа}/\sqrt{\text{м}}$ , т.е., например, для трещины длиной 0,01м допустимый уровень напряжений составляет 300МПа.

Исходя из формулы (3.4) можно оценить прочность идеального бездефектного металла, если за длину трещины принять расстояние между атомами  $l = 1 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 1 \text{ ангстрем}$ .

Для стали примем  $\gamma = 0,01 \text{ Н/см}$ ,  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$ . В этом случае получаем  $\sigma_B = 2\sqrt{\frac{E\gamma}{\pi l}} \approx 50 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , что намного больше реального предела прочности.

Экспериментально установлено, что начальная деформация  $\varepsilon_0$  нагруженного стержня изменяется со временем ориентировочно так, как это показано на рис.3.5. Это явление в технике называется ползучестью (от англ. creep), интенсивность которой с повышением температуры возрастает.

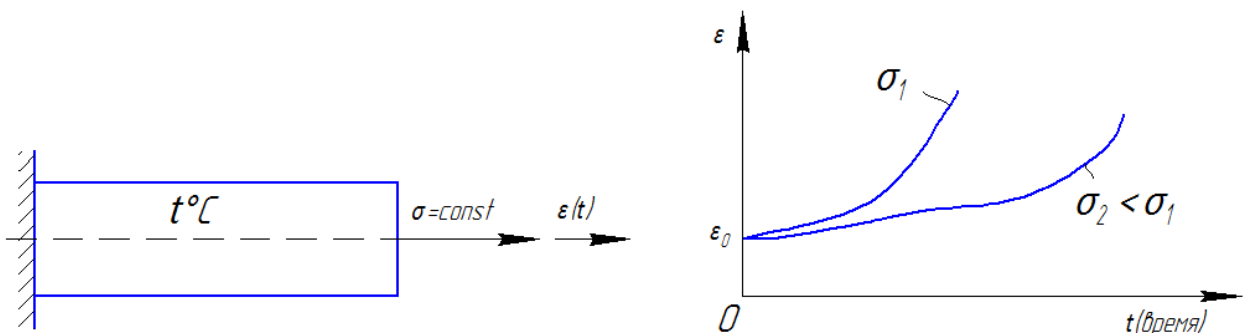


Рис 3.5 К понятию ползучести металлов

Экспериментально так же установлено, что начальное напряжение  $\sigma_0$  в нагруженном стержне со временем изменяется ориентировочно так, как это показано на рис.3.6. Это явление в технике называется релаксацией напряжений (от англ. Relax), интенсивность которого зависит от температуры.

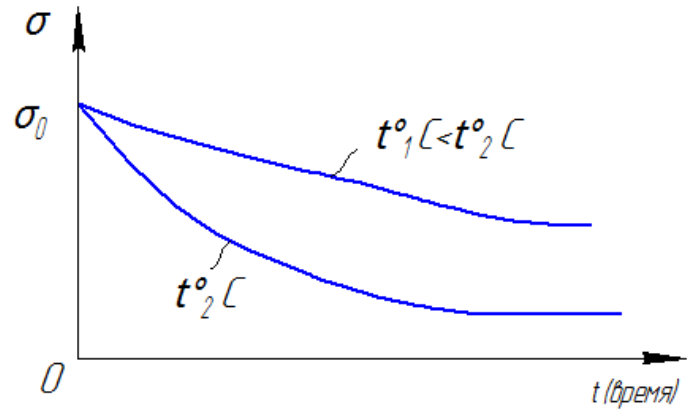
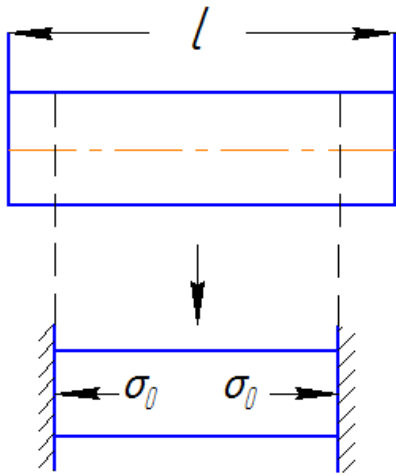


Рис.3.6 К понятию о реакции напряжений

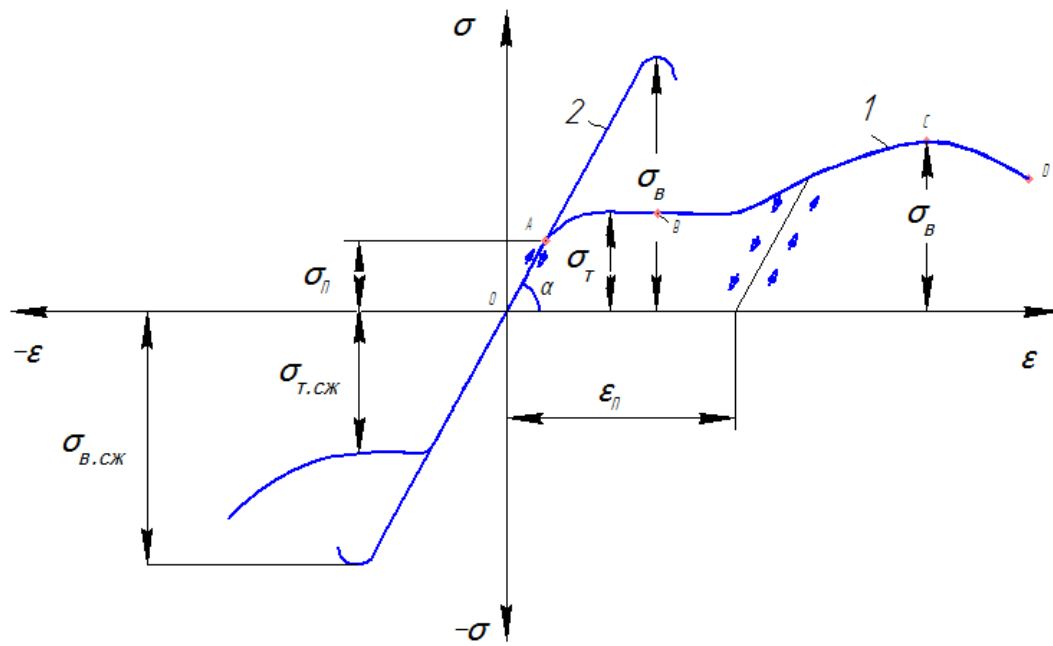


Рис.3.1

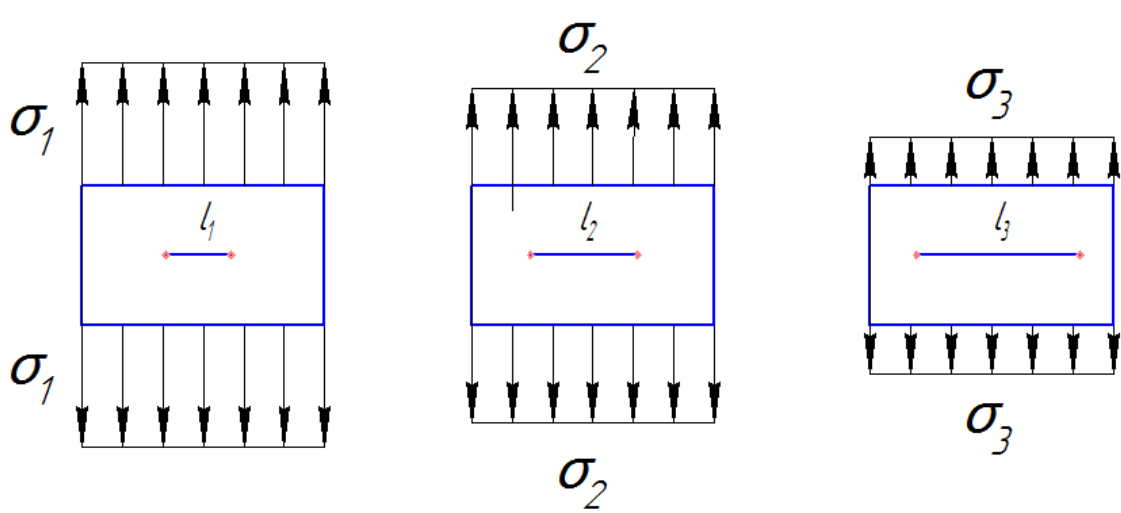


Рис.3.2

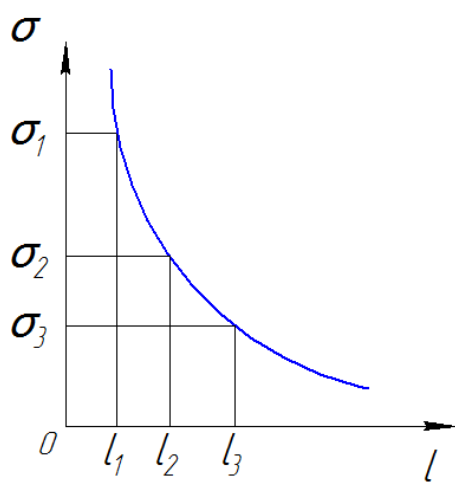


Рис.3.3

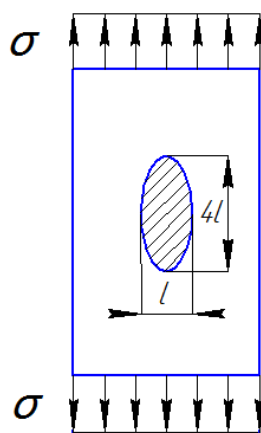


Рис3.4

## Лекция 4. Расчеты на прочность и жесткость стержня на растяжение и сжатие

В расчетах на прочность и жесткость стержней используется схематизированная диаграмма растяжения-сжатия, показанная на рис 4.1

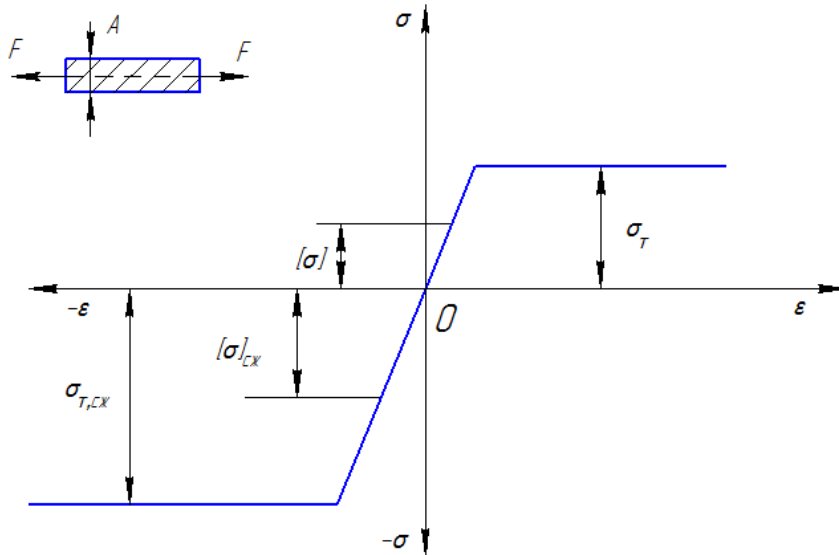


Рис.4.1. Схематизированная диаграмма растяжения сжатия

Здесь  $\sigma_T = \sigma_{T,CK}$  - пределы текучести при растяжении и сжатии.

Условие ненаступления в растянутом стержне пластических деформаций имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_T$$

Определяемая из этого условия предельная для стержня сила

$$F_{пр} = \sigma_T A$$

Допускаемое для растянутого стержня напряжение определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$$

, где  $n_T = 1,5 - 3,0$  – коэффициент запаса прочности.

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

При заданных  $F$  и  $[\sigma]$  определяется необходимая площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}$$

При заданных  $[\sigma]$  и  $A$  определяется допускаемая для стержня нагрузка

$$[F] \geq A[\sigma]$$

Для расчетов жесткость используется условие жесткости

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq [\Delta l] = \frac{\Delta l_{пр}}{n_{ж}}$$

Где  $\Delta l_{пр}$  - предельное удлинение стержня,  $n_{ж}$  – коэффициент запаса жесткости,  $\Delta l$  - допускаемое удлинение стержня.

Для примера рассмотрим стержневую систему, показанную на рис.4.2



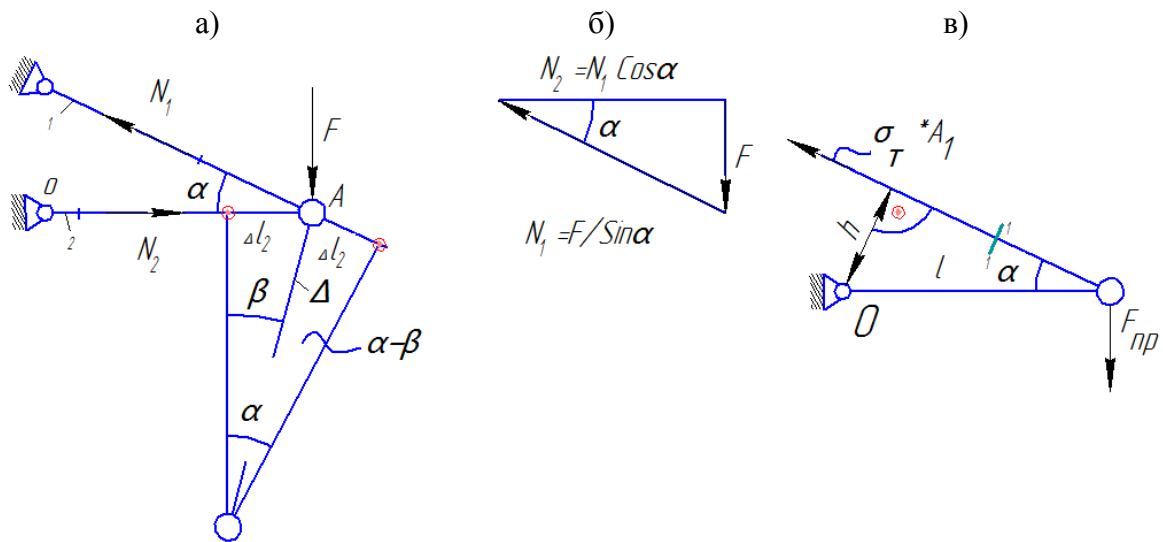


Рис.4.2. К расчету стержневой системы

При заданной силе  $F$ , допускаемом напряжении  $[\sigma]$  и пределе текучести  $\sigma_T$ , требуется определить площадь поперечных сечений стержней  $A_1$  и  $A_2$  и предельное(разрушающее) для системы  $F_{пр}$ .

Необходимое для выполнения условной прочности площади сечений стержней будет определяться по формулам:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]},$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]}$$

Где  $N_1 = F / \sin \alpha$ ,  $N_2 = F \operatorname{ctg} \beta$

Определены из условия равновесия узла  $A$ .

Удлинение стержней будет:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$A$  полное перемещение  $\Delta$  узла  $A$  и его направление, определяемое углом  $\beta$ , будут определяться из решения следующей системы уравнений

$$\sin \beta = \frac{\Delta l_2}{\Delta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\Delta l_1}{\Delta}$$

На рис.4.2б показано предельное состояние системы при разрушении первого стержня, в котором предельное усилие равно  $\sigma_T A_1$

Из условия равновесия системы

$$\sum M_0 = \sigma_T A h - F_{пр} l = 0$$

Находим предельную для нее нагрузку

$$F_{пр} = \sigma_T A \sin \alpha$$

## Контрольная задача

Для статически неопределимой стержневой системы, показанной на рис.4.3, требуется составить систему уравнений для решения задачи о ее прочности и определить предельную нагрузку  $F_{пр}$ , при которой эта система будет разрушена.

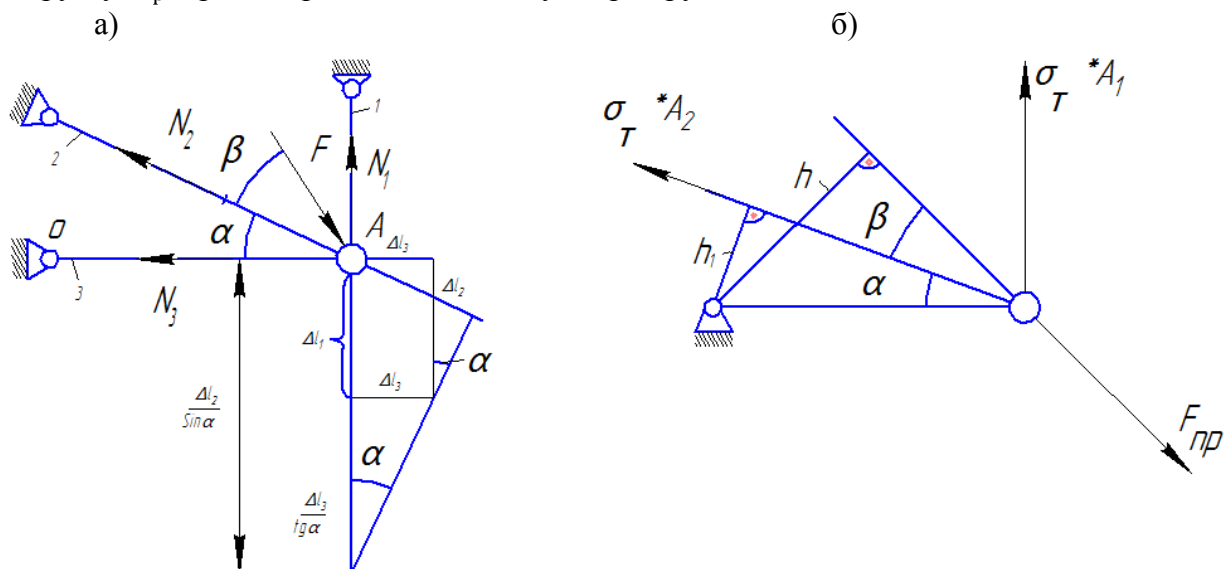


Рис.4.3 К расчету статически неопределимой системы

В узле А имеем три неизвестные силы  $N_1, N_2, N_3$  для определения которых необходимо составить три уравнения. Два из них – это равенства нулю сумм проекций всех сил в любых двух направлениях.

Третье уравнение составляется из условия совместной деформации трех стержней, состоящее в том, что деформации этих стержней  $\Delta l_1, \Delta l_2$  и  $\Delta l_3$  связаны между собой так, как это показано на рис.4.3, а описывается соотношением

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_3}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$$

, где  $\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3}$$

После определения усилий  $N_1, N_2, N_3$  определяется напряжения в стержнях  $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}, \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}, \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3}$  и составляются соответствующие условия прочности.

При определении силы  $F_{пр}$  рассмотрим один из вариантов возможного разрушения системы когда разрушились стержни 1 и 2 и в их сечениях возникли предельные для них  $\sigma_T A_1$  и  $\sigma_T A_2$  (рис.4.3б)

Из условия равновесия системы

$$\sum M_0 = \sigma_T A_1 l + \sigma_T A_2 h_1 - F_{пр} h = 0$$

Определяется сила  $F_{пр}$ .

## Лекция 6. Кручение круглых стержней

Рассмотрим круглый стержень в состоянии кручения, показанный на рис. 6.1.

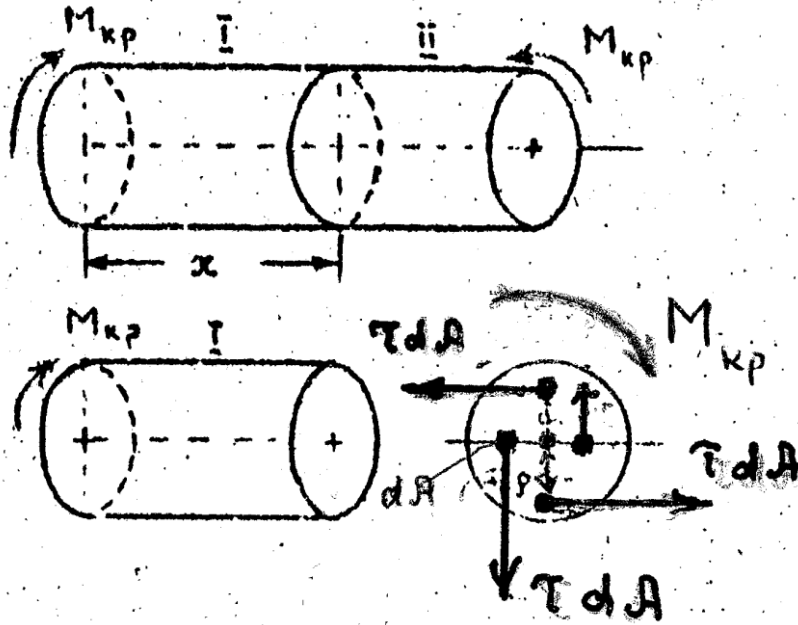


Рис 6.1

Мысленно отделим одну часть стержня от другой. Любая из этих частей находится в равновесии под воздействием момента внешних сил  $M_{кр}$  и моментов внутренних сил в сечении, обусловленных касательными напряжениями  $\tau$ . Из условия равновесия следует равенство:

$$M_{кр} = \int_{(A)} \tau \rho dA, \quad (6.1)$$

Рассмотрим деформацию треугольной призмы, вырезанной из стержня и показанную на рис.6.2.

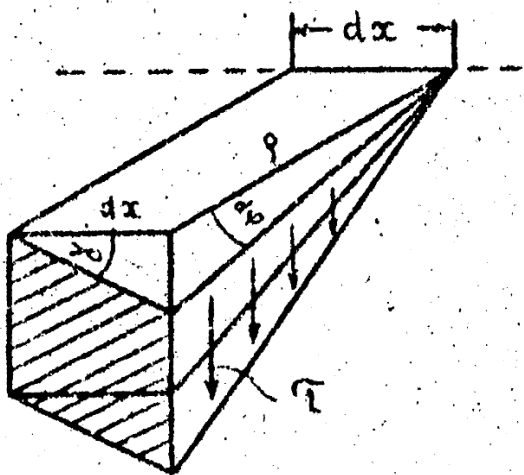


Рис 6.2.

Отметим через  $d\varphi$  взаимный угол допорота двух сечений стержня, расположенных на расстоянии  $dx$ , а через  $\gamma$  - угол сдвига. Из рисунка видно, что выполняется следующее соотношение:

$$\gamma dx = \rho d\varphi, \quad (6.2)$$

Касательные напряжения определены по закону Гука при сдвиге:

$$\tau = \sigma \gamma = \sigma \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (6.3)$$

Из уравнений (6.1) и (6.3) получаем равенства:

$$M_{кр} = \int_{(A)} \sigma \gamma \rho \, dA = GJ_{\rho} \frac{d\varphi}{dx}, \quad (6.4)$$

где величина

$$J_{\rho} = \int_{(A)} \rho^2 \, dA, \quad (6.5)$$

называется полярным моментом инерции сечения.

Для круга с радиусом  $r$  и диаметром  $d$  имеем:

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{2} r^4 \approx 0,1d^4$$

Равенство (6.4) представляет собой дифференциальное уравнение кручения. Интегрируя уравнение, получаем формулу для определения угла закручивания:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} \, dx, \quad (6.6)$$

где  $l$  – длина стержня.

При  $GJ_{\rho} = const$  получаем

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}}, \quad (6.7)$$

Подставив в формулу (6.3) соотношение (6.4), получим уравнение для расчета касательных напряжений при кручении:

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{J_{\rho}}, \quad (6.8)$$

Формула (6.8) показывает, что касательные напряжения в поперечных сечениях стержня распределены по линейному закону, в центре сечения напряжения равны нулю. Максимальное напряжение получаем на поверхности стержня при  $\rho = r$  (рис. 6.3а):

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}, \quad (6.9)$$

где величина

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{r} \approx 0,2d^3$$

называется полярным моментом сопротивления сечения.

Условия прочности и жесткости стержней при кручении имеют вид:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad \varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}} \leq [\varphi],$$

где  $[\tau]$  – допускаемое напряжение при кручении,

$[\varphi]$  – допускаемый угол закручивания.

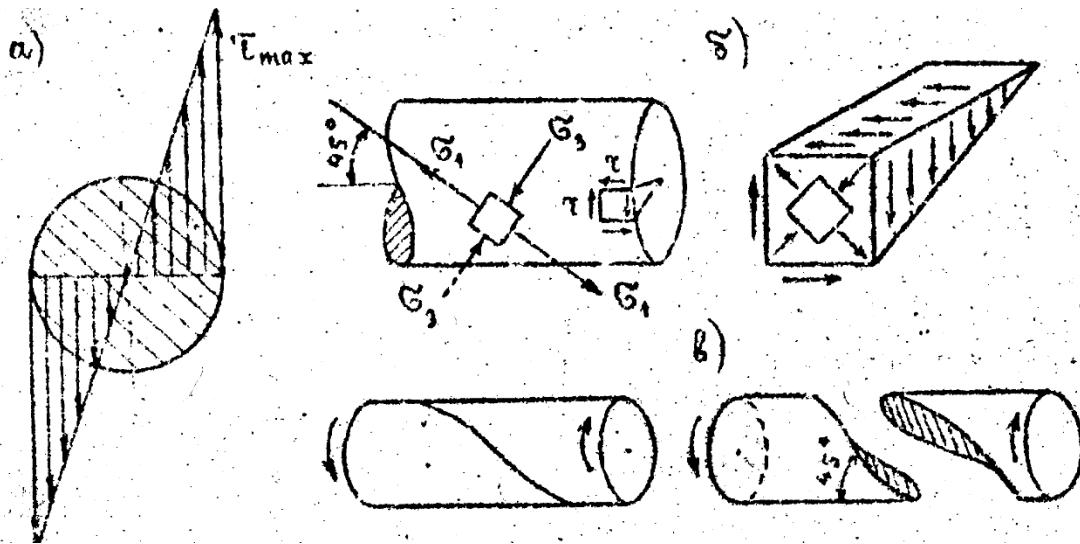


Рис 6.3

Рассмотрим элемент поверхности стержня, показанный на рис 6.3б. На его гранях действуют касательные напряжения  $\tau$ . В повернутой на угол  $45^\circ$  площадке, как и при сдвиге, возникают только нормальные напряжения  $\sigma_1 = \tau$  и  $\sigma_3 = -\tau$ . Наличие растягивающих напряжений  $\sigma_1$  предопределяют характер разрушения стержней при кручении. Картина такого разрушения показала на рис. 6.3а.

Вычислим теперь потенциальную энергию закрученного стержня. Работа, совершаемая моментом  $M_{кр}$  на угле поворота  $d\varphi$  равна потенциальной энергии в бесконечно малом объеме стержня

$$d\Pi = \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = \frac{M_{кр}^2 dx}{2GJ_\rho}$$

Полная энергия в стержне длиной  $l$

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_{кр}^2 dx}{2GJ_\rho}$$

## Контрольные задачи

**Задача 1.** Сравнить прочность и жесткость тонкостенных труб открытого и закрытого профиля, показанных на рис. 6.4.

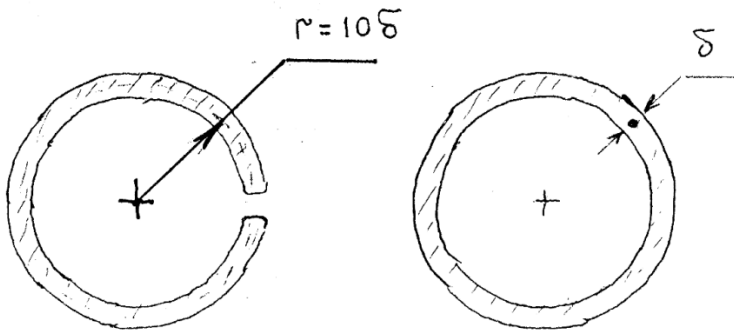


Рис 6.4.

**Решение.** Моменты инерции и моменты сопротивления показанных сечений определяются по формулам:

$$J_k = \frac{1}{3} 2\pi r \delta^3; \quad J_p = r^2 2\pi r \delta ;$$

$$W_k = \frac{2\pi}{3} r \delta^2; \quad W_p = 2\pi r^2 \delta ;$$

Отсюда имеем:

$$\frac{J_p}{J_k} = 3 \frac{r^2}{\delta^2} = 300; \quad \frac{W_p}{W_k} = 3 \frac{r}{\delta} = 30;$$

т.е. жесткость закрытого профиля в 300 раз, а прочность в 30 раз выше чем открытого профиля.

**Задача 2.** В составном стержне с жесткостями частей  $C_1$  и  $C_2$ , показанном на рис. 6.5, сечение 1 повернуто на угол  $\varphi$ , а сечение 2 затем закреплено. Внешний момент снят. Найти угол раскручивания  $x$  и возникающий момент  $M$ .

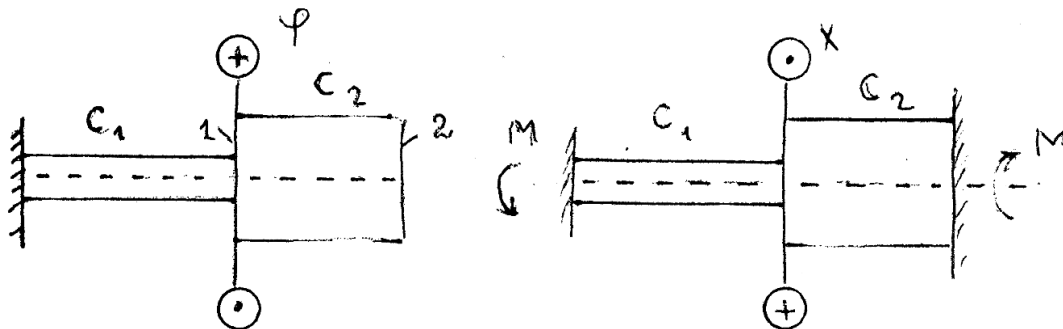


Рис 6.5.

Имеем равенства:

$$M = C_1(\varphi - x) = C_2 * x$$

Отсюда получаем:

$$x = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \varphi$$

$$M = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varphi$$

При  $C_1 = C_2$  имеем  $x = \frac{1}{2} \varphi$ .

## Лекция 7. Кручение некруглых стержней

Касательные напряжения на контуре стержней с некруглым поперечным сечением при кручении всегда направлены по касательной к контуру, а в угловых точках эти напряжения равны нулю. Данный вывод следует из закона парности касательных напряжений и условия равенства нулю касательных напряжений вдоль боковых поверхностей стержня (рис 7.1 а, б)

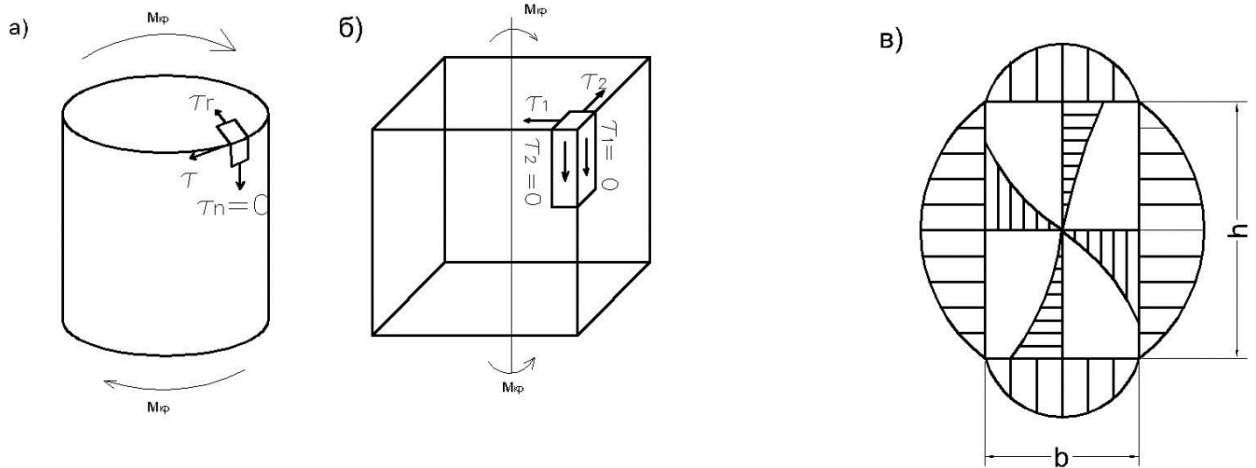


Рис. 7.1

При этом напряжения по сечению стержня распределены по нелинейному закону. Для прямоугольного стержня эти напряжения показаны на рис 7.1 в. В характерных точках А и В напряжения можно вычислить по формулам:

$$\tau_A = M_{кр} / W_K ; \quad \tau_B = \eta \cdot \tau_A \quad (7.1)$$

где  $W_K = \alpha \cdot h \cdot b^2$  – момент сопротивления при кручении  $\alpha, \eta$  – коэффициенты, зависящие от ширины  $b$  и высоты  $h$  сечения, примем  $\eta \leq 1$ .

Угол закручивания стержня определяется по формуле

$$\phi = M_{кр} \cdot l / G \cdot J_K \quad (7.2)$$

где  $J_K = \beta \cdot h \cdot b^3$  – момент инерции сечения при кручении,  $\beta$  – коэффициент, зависящий от  $b$  и  $h$ .

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  можно вычислить по следующим приближенным формулам:

$$\alpha = \frac{1 + K^2}{0,35 + K^2} \beta ; \quad \beta = \frac{1}{3} - \frac{0,21}{K} ; \quad K = \frac{h}{b}$$

Для узкого прямоугольного сечения или тонкостенного стержня, сечение которого можно условно представить в виде прямоугольника (рис 7.2а), имеем:  $h \gg b$ ,  $K \rightarrow \infty$ ,  $\alpha = \beta = 1/3$ .

В этом случае формулы (7.1) и (7.2) принимают вид:

$$\tau_{max} = 3 \cdot M_{кр} / S \cdot \delta^2 ; \quad \phi = 3 \cdot M_{кр} \cdot l / G \cdot S \cdot \delta^3$$

где  $S$  – полупериметр сечения,  $\delta$  – толщина стенки.

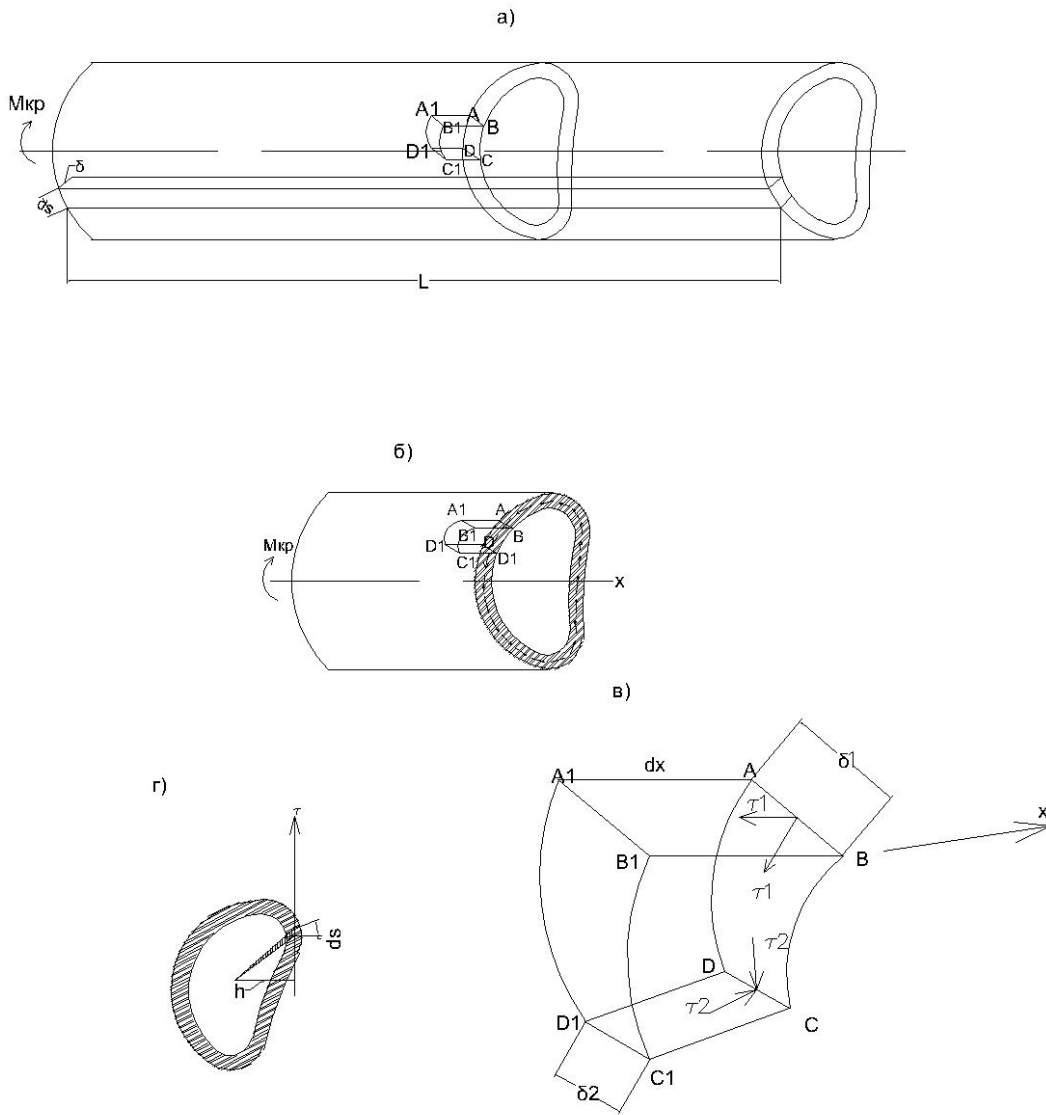


Рис.7.3

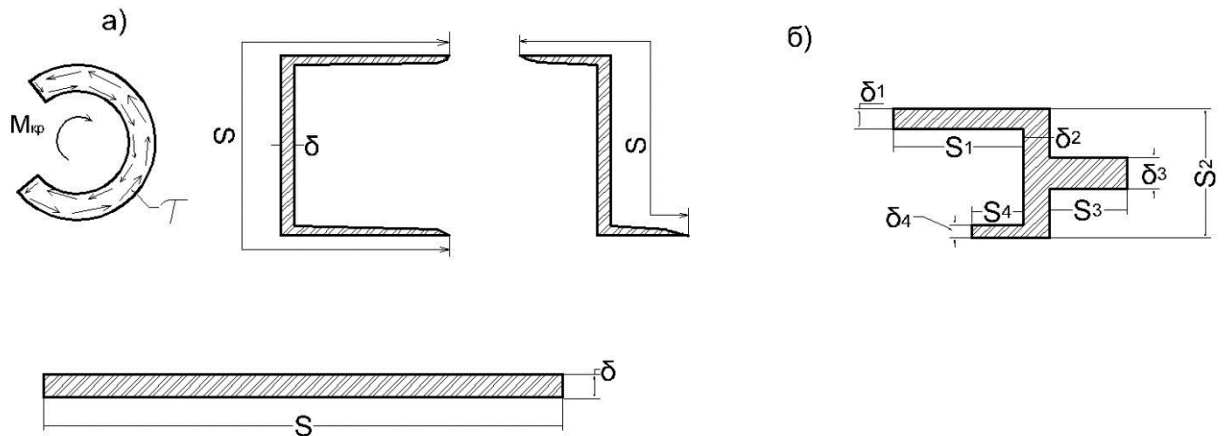


Рис.7.2

Для сечений, не приводимых к одному прямоугольнику (рис. 7.2б), общий момент кручения складывается из моментов кручения, приходящихся на каждый из составляющих общее сечение прямоугольников:

$$M_{кр} = \sum_{i=1}^n M_i, \quad M_i = \phi G S_i \delta_i^3 / 3.1$$



Где  $\eta$  – число прямоугольников, на которое подразделяется заданное сечение,  $M_i$  – момент кручения, приходящийся на  $i$ -й прямоугольник. Для сечения, показанного на рис.16.2б,  $I = 4$ .

Пологая, что сечение стержня поворачивается при кручении как единое целое и используя соотношение (7.4), получаем:

$$M_{кр} = \frac{\varphi \cdot G}{3 \cdot l} \sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i$$

Отсюда следует формула для определения угла закручивания стержня:

$$\varphi = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot l}{G \cdot \sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i} ; \quad \tau = \frac{3 \cdot M_i}{S_i \cdot \delta^2 i} = \frac{\varphi G S_i \delta^3 i}{l S_i \delta^2 i} = \frac{3 M \delta i}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i}$$

Из соотношения (7.4) и условия  $\phi_i = \phi$  при любом  $i$ .

получаем равенство  $\tau_i l = \phi \cdot G \delta_i$

Отсюда определяем максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{G \delta_{max}}{l} = \frac{3 M_{кр} \delta_{max}}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i}$$

Рассмотрим теперь кручение тонкостенного стержня закрытого профиля (рис.7.3 а, б). Выделим бесконечно малый элемент ABCD  $A_1 B_1 C_1 D_1$  и рассмотрим его равновесие под воздействием приложенных к нему внутренних сил. Будем считать, что напряжения по толщине стенки стержня распределены равномерно. Пусть при  $\delta_1$  имеем  $\tau_1$ , а при  $\delta_2$  имеем  $\tau_2$  (рис.7.3в). По закону парности касательных напряжений  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Запишем уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы проекций всех сил, действующих в направлении оси стержня:

$$\tau_2 \delta_2 dx - \tau_1 \delta_1 dx = 0.$$

Отсюда следует, что произведение  $\tau \delta$  остается постоянным и в местах с минимальной толщиной стенки возникают максимальные напряжения, а в местах с максимальной толщиной стенки – минимальные напряжения.

Рассмотрим часть стержня, показанную на рис 7.3б, г. Эта часть находится в равновесии под воздействием внешнего момента  $M_{кр}$  и моментов внутренних сил в сечении. Из этого условия получаем равенство

$$M_{кр} = \oint \tau \delta h ds = \tau \delta \int h ds$$

Где  $h$  – плечо силы  $\tau \delta ds$ .

Произведение  $h \cdot ds$  представляет собой удвоенную площадь, заштрихованного на рис.16.3г треугольника. Отсюда следует, что

$$\oint h ds = 2A$$

Где  $A$  – площадь фигуры, очерченной средней линией контура сечения.

При этом из соотношения (7.7) следует, что

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2A\delta} \quad (7.9)$$

Определим теперь угол закручивания стержня  $\phi$  и потенциальную энергию стержня при кручении  $\Pi$ .

Энергия и бесконечно малом объеме и во всем стержне будет соответственно равна:

$$d\Pi = \frac{\tau^2 l \delta}{2G} ds ; \quad \Pi = \frac{\tau^2 \delta^2 l}{2G} \oint \frac{ds}{\delta} \quad (7.10)$$

Полную энергию можно также вычислить по заданному моменту  $M_{кр}$  и углу закручивания  $\phi$  :

$$\Pi = \frac{1}{2} M_{кр} \cdot \phi \quad (7.11)$$

Из соотношений (7.9), (7.10) и (7.11) следует, что искомый угол закручивания

$$\phi = \frac{M_{кр} l}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{\delta}$$

при  $\delta = \text{const}$  имеем:

$$\Pi = \frac{M_{кр}^2 l S}{3A^2 G \delta} ; \quad \phi = \frac{M_{кр} l S}{4A^2 G \delta} \quad \text{Где } S \text{ – длина контура сечения.}$$

## Лекция 8. Геометрические характеристики плоских сечений

Рассмотрим произвольной формы сечение в системе координат XOY и вычислим его интегральные характеристики (рис. 8.1):

$$S_x = \int_{(A)} y dA$$

$$J_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

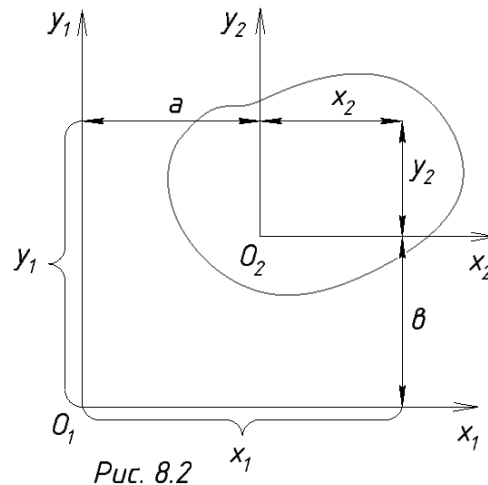
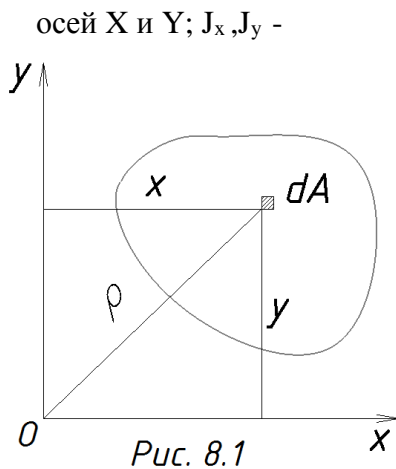
$$J_{xy} = \int_{(A)} xy dA$$

$$S_y = \int_{(A)} x dA$$

$$J_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

$$J_p = \int_{(A)} \rho^2 dA$$

Здесь A – площадь сечения.  $S_x, S_y$  – статические моменты площади относительно осей X и Y;  $J_x, J_y$  –



осевые моменты инерции относительно осей X и Y;  $J_{xy}$  – центробежный момент инерции;  $J_p$  – полярный момент инерции.

Пусть заданы геометрические характеристики сечения относительно системы координат  $X_1 O_1 Y_1$  (рис. 8.2) и требуется определить геометрические характеристики этого сечения относительно новой системы координат  $X_2 O_2 Y_2$ , сдвинутой относительно системы  $X_1 O_1 Y_1$  на расстояние a вдоль оси  $X_1$  и на расстояние b вдоль оси  $Y_1$ .

Между координатами  $x_1, x_2, y_1, y_2$  можно записать следующее соответствие:

$$x_2 = x_1 - a; \quad y_2 = y_1 - b.$$

Используя эти соотношения вычислим геометрические характеристики сечения в новой системе отсчёта:

$$S_{x_2} = \int_{(A)} y_2 dA = S_{x_1} - b * A;$$

$$S_{y_2} = S_{y_1} - a * A;$$

$$J_{x_2} = \int_{(A)} y_2^2 dA = \int_{(A)} (y_1 - b)^2 dA = J_{x_1} - 2 * b * S_{x_1} + b^2 * A;$$

$$J_{x_2 y_2} = \int_{(A)} (x_1 - a) * (y_1 - b) dA = J_{x_1 y_1} - a * S_{x_1} - b * S_{y_1} + a * b * A;$$

$$J_{y_2} = J_{y_1} - 2 * a * S_{y_1} + a^2 * A;$$

Система координат, относительно которой статические моменты площади равны 0, называется центральной. Её оси называются центральными осями инерции, а её начало –

центром (тяжести) сечения. Из полученных соотношений следует, что координаты центра сечения в системе координат  $X_1 Y_1$  можно вычислить по формулам:

$$a = S_{y_1} / A; \quad b = S_{x_1} / A;$$

Если первоначальная система координат является центральной, то  $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$  и тогда формулы для определения моментов инерции примут вид:

$$J_{x_2} = J_{x_1} + b^2 * A; \quad J_{y_2} = J_{y_1} + a^2 * A; \quad J_{x_2 y_2} = J_{x_1 y_1} + a * b * A;$$

Моменты инерции, вычисленные в центральной системе координат, называются центральными моментами инерции сечения.

Рассмотрим теперь как изменяются моменты инерции при повороте системы координат. Пусть моменты инерции некоторого сечения заданы в системе координат  $XOY$  (рис. 6.3). Требуется определить моменты инерции этого сечения в системе координат  $UOV$ , повернутой относительно системы координат  $XOY$  на угол  $\alpha$  против часовой стрелки.

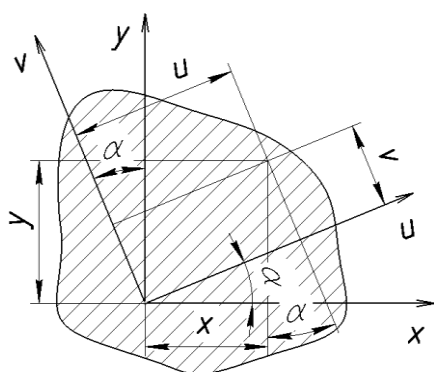


Рис. 6.3

Из геометрических соотношений получаем следующие зависимости между координатами:

$$u = x * \cos \alpha + y * \sin \alpha; \quad v = y * \cos \alpha - x * \sin \alpha;$$

Используя эти соотношения, получаем:

$$J_u = \int_{(A)} v^2 dA = \int_{(A)} (y * \cos \alpha - x * \sin \alpha)^2 dA = J_x * \cos^2 \alpha + J_y * \sin^2 \alpha - J_{xy} * \sin 2\alpha;$$

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} * \cos 2\alpha - J_{xy} * \sin 2\alpha;$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} * \cos 2\alpha + J_{xy} * \sin 2\alpha;$$

$$J_{uv} = \int_{(A)} uv dA = J_{xy} * \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} * \sin 2\alpha;$$

Проведём исследования выражений (8.3) и (8.4) на экстремум. Для этого приравняем производные от этих выражений по углу  $\alpha$  нулю.

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -\frac{dJ_v}{d\alpha} = (J_y - J_x) * \sin 2\alpha - 2 * J_{xy} * \cos 2\alpha = 0$$

Из соотношений (8.5) и (8.6) следует, что осевые моменты инерции принимают экстремальные значения в тех осях, относительно которых центробежный момент равен нулю. Такие оси называются главными осями инерции. Если их начало находится в центре тяжести сечения, то эти оси называются главными центральными осями инерции. Осевые моменты инерции сечения относительно этих осей называются соответственно главными и главными центральными моментами инерции.

Расположение главных осей инерции определяется углом  $\alpha$ , определяемым из уравнения (8.6). Из этого уравнения следует, что:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 * \frac{J_{xy}}{(J_y - J_x)};$$

Подставляя значение угла  $\alpha$  из выражения (8.7) в соотношения (8.3) и (8.4), получаем следующие формулы для определения главных моментов инерции:

$$J_{max} = J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 * J_{xy}^2};$$

Знак плюс относится к определению  $J_1$ , а знак минус – к определению  $J_2$ .

Отметим, что для сечения в виде прямоугольника со сторонами  $b$ ,  $h$  главные центральные моменты инерции равны:

$$J_{max} = \frac{b * h^3}{12}; \quad J_{min} = \frac{h * b^3}{12};$$

Для круглого сечения с радиусом  $r$  и диаметром  $d$ :

$$J = \pi * r^4 / 4 \approx 0.05 * d^4; \quad J_p = 2 * J \approx 0.1 * d^4.$$

## Контрольные задачи

**Задача.** Вычислить геометрические характеристики сечений, показанных на рис.

8.4:

Решение:

Для сечения 1:

$$J_{x_1} = J_{y_1} = 2 * \int_0^{\frac{a}{2}} y^2 dA = \frac{a^4}{12}; \quad W_x = W_y = \frac{a^3}{6};$$

Для сечения 2:

$$J_{x_2} = J_{y_2} = J_{x_1} * \cos^2 45^\circ + J_{y_1} * \sin^2 45^\circ = J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{a^4}{12}; \quad W_x = W_y = \frac{a^4}{12} : \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{a^3}{6 * \sqrt{2}};$$

Для сечения 3:

$$J_{x_3} = \frac{J_{y_1}}{2} = \frac{a^4}{24}; \quad W_{x_3} = \frac{a^3}{24} * \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$J_{y_3} = \frac{a^4}{24} - \frac{a^2}{2} * \left( \frac{a}{3 * \sqrt{2}} \right)^2 = \frac{a^4}{72};$$

$$W_{y_3} = \frac{a^4}{72} : \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{a^3}{36 * \sqrt{2}};$$

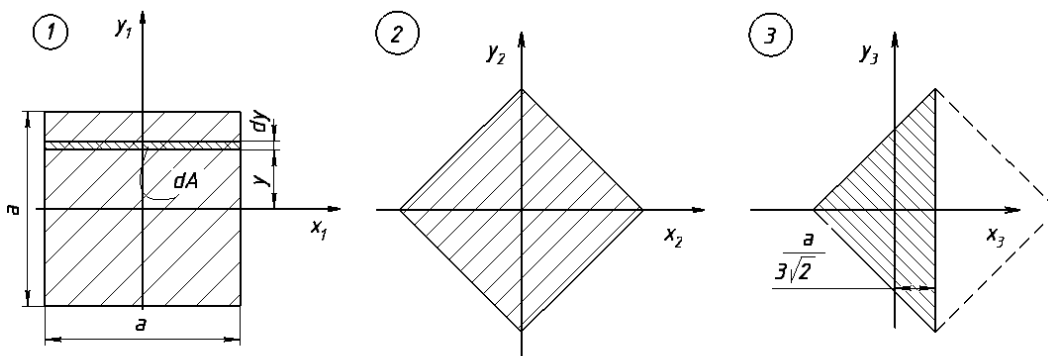


Рис. 8.4

## Лекция 9. Прямой чистый изгиб балок

Прямым чистым изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки возникает только изгибающий момент, действующий в одной из главных плоскостей инерции.

Рассмотрим балку, нагруженную так, как это показано на рис.9.1. Построим для нее эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ . Из этих эпюр видно, что на участке ВС возникают только изгибающие моменты  $M$ , а на участках АВ и CD, кроме изгибающих моментов в сечениях балки, возникают еще и поперечные силы  $Q$ . Изгиб на участке ВС называется чистым изгибом, а на участках АВ и CD рис.9.1 – поперечным изгибом.

Рассмотрим участок балки, находящийся в состоянии чистого изгиба (рис.9.2). Пусть изгибающие моменты  $M$  лежат в плоскости  $ХОУ$ , где оси  $ОУ$  и  $ОZ$  – главные оси инерции сечения балки. Эти оси должны быть еще и центральными.

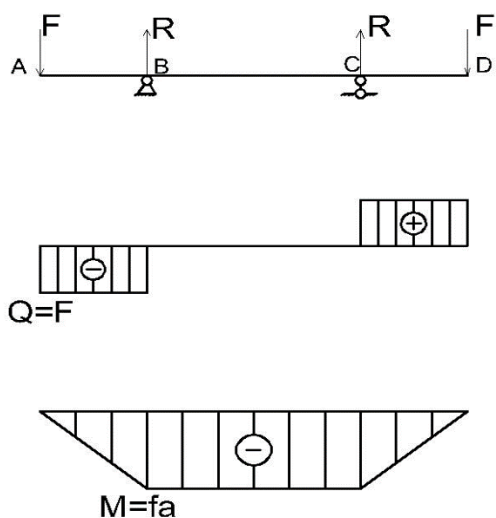


Рис.9.1

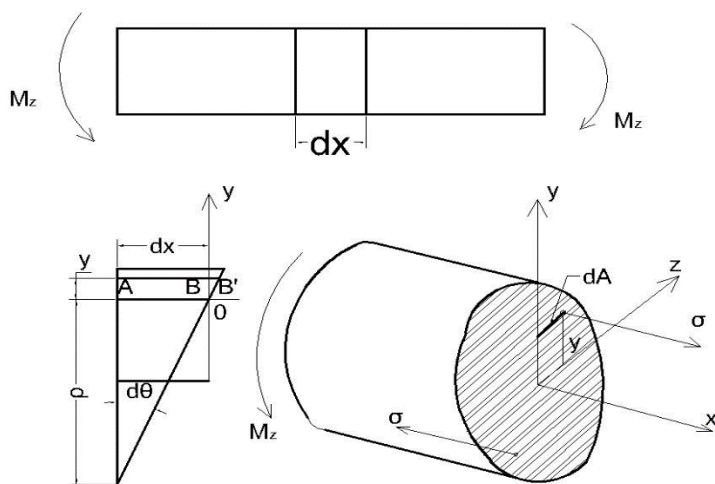


Рис.9.2

Отметим двумя бесконечно близкими сечениями 1 и 2 участок балки длиной  $dx$ . До деформации этот участок представлял собой прямоугольник. Пусть после деформации одно сечение (оставаясь плоскими) поворачивается относительно другого вокруг точки  $O$  на угол  $d\theta$ . Тогда верхняя часть балки будет растянутой, в нижняя часть сжатой. Деформация элемента  $AB$ , находящегося от точки  $O$  на расстоянии  $Y$ , будет

$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{yd\theta}{dx} = \frac{y}{\rho} \quad (9.1)$$

где  $\rho = \frac{dx}{d\theta}$  – радиус кривизны волокна балки, проходящего через точку  $O$ .

Деформациям  $\varepsilon$  соответствует напряжение

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (9.2)$$

Полученные соотношения показывают, что при изгибе напряжения и деформации в сечениях балок распределяются по линейному закону. В каждой элементарной площадке  $dA$  сечения балки возникает напряжение  $\sigma$ . Рассмотрим левую часть балки. Эта часть находится в равновесии под действием внешнего момента  $Mz$  и внутренних сил в сечении, обусловленных напряжениями  $\sigma$ . Составим уравнения равновесия и проанализируем их. Имеем:

$$\sum X = \int \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int y dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0;$$

$$\sum y = \sum Z = \sum Mx = 0;$$

$$\sum My = \int z \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int zy dA = \frac{E}{\rho} J_{zy} = 0;$$

$$\sum Mz = Mz - \int y \sigma dA = Mz - \frac{E}{\rho} \int y^2 dA = Mz - \frac{E}{\rho} J_z = 0;$$

Из первого уравнения следует, что статический момент площади сечения  $S_z = 0$ , т.е. система координат  $YOZ$  должна быть центральной. Из третьего уравнения следует, что центробежный момент инерции  $J_{zy} = 0$ , т.е. система координат  $YOZ$  является главной. Из последнего уравнения получаем формулу для определения кривизны балки при изгибе:

$$\theta \approx y \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{d\theta}{dx} = y'' \quad (9.3)$$

где  $y = y(x)$ ,  $\theta = \theta(x)$  – прогиб и угол поворота сечения балки с координатой  $x$  (рис.9.3).

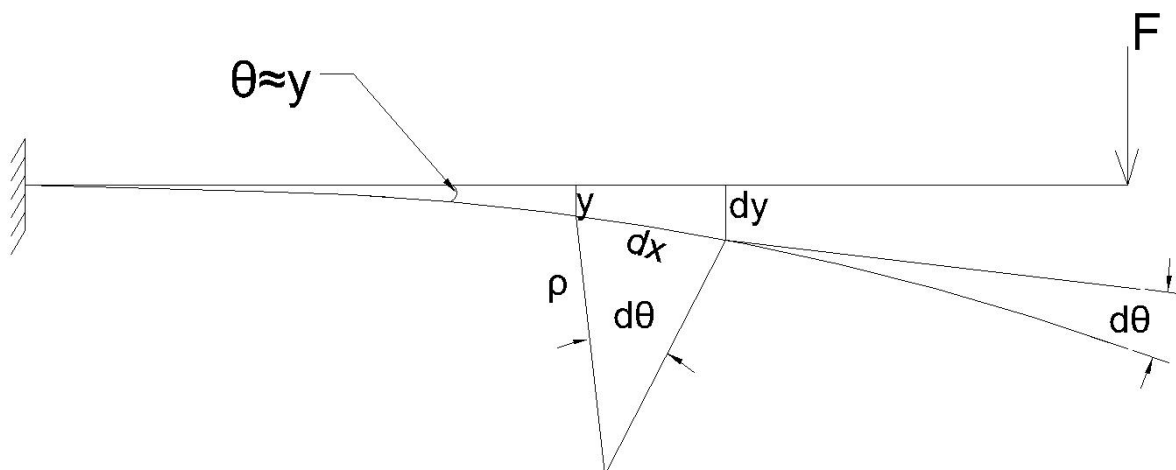


Рис.9.3

Из (9.3) следует дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJy'' = M \quad (9.4)$$

Подставляя соотношение (9.3) в уравнение (9.2), получаем формулу для определения напряжений при изгибе:

$$\sigma = \frac{Mz \cdot Y}{J_z} \quad (9.5)$$

Максимальное напряжение получаем при  $y = y_{\max}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mz}{W_z} \quad (9.6)$$

Где  $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$  – осевой момент сопротивления сечения балки относительно оси  $z$ .

$$W_y = \frac{hb^2}{6} \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

Для круглого сечения

$$W = \frac{\pi r^3}{4} \approx 0,1d^3$$

Где  $r$  и  $d$  – радиус и диаметр сечения.

Условия прочности при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma] \quad (9.7)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение при изгибе.

при относительном повороте сечений балки 1 и 2 под действием момента  $Mz$  на угол  $d\theta$  (рис.9.2) совершается работа, определявшая потенциальную энергию в бесконечно малом объеме балки, равную

$$dA = d\pi = \frac{1}{2} Mz d\theta \quad (9.8)$$

Используя формулу (9.3) получаем:

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{Mz dx}{EJz} \quad (9.9)$$

Подставляя соотношение (9.9) в формулу (9.8) и суммируя энергию по всей длине балки, имеем:

$$\pi = \int_0^l \frac{Mz^2 dx}{2EJz} \quad (9.10)$$

Исчерпание возможности балки сопротивляться изгибу при увеличении изгибающего момента (см. Рис.9.4) приводит к появлению “пластического шарнира”

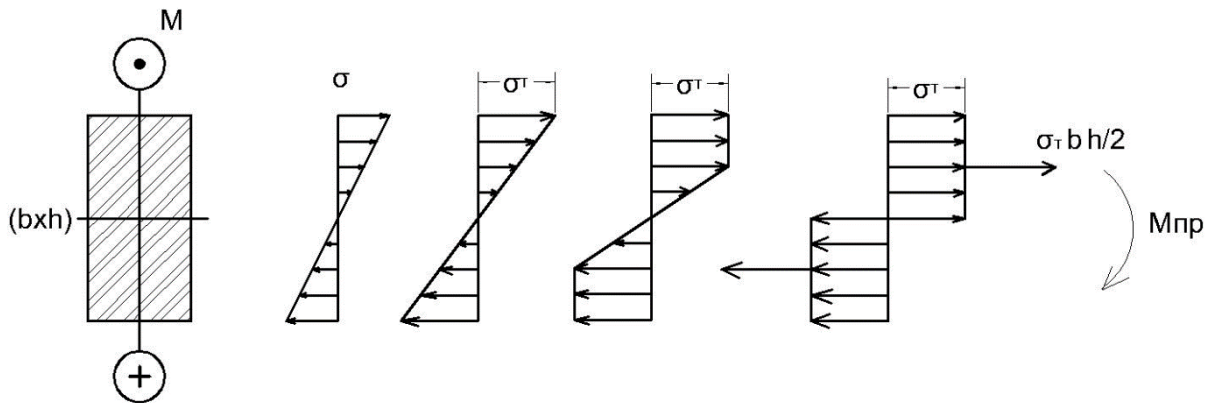


Рис.9.4

Соответствующий момент изгиба называется предельными моментом и обозначается как  $M_{пр}$ . Для прямоугольного сечения  $(bxh)$  имеем

$$M_{пр} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}$$

Где  $\sigma_T$  – предел текучести

Нагрузки, при которых исчерпаны возможности балок сопротивляться изгибу называются предельными нагрузками и обозначаются как  $F_{пр}$ .

Для примера определим предельную нагрузку для балки, показанной на рис 9.5, а.

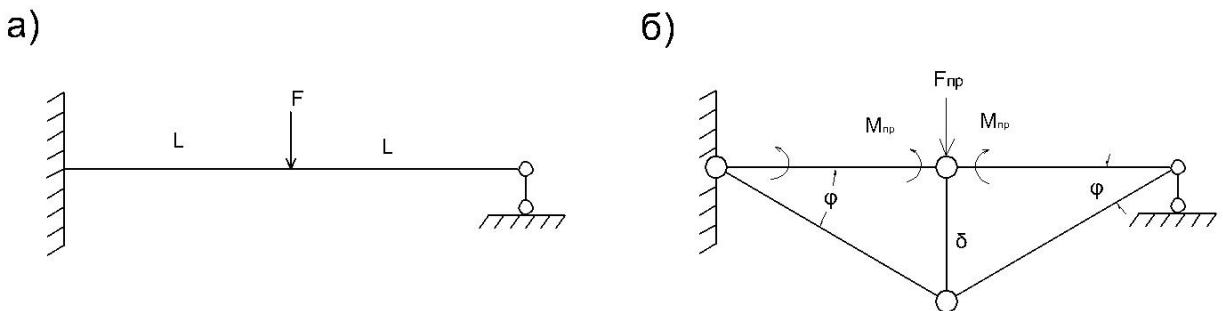


Рис.9.5

Полное разрушение балки произойдет при появлении двух пластических шарниров с тремя предельными изгибающим моментами  $M_{пр}$ , показанных на рис.9.5, б.



В соответствии с принципом возможных перемещений Лагранжа в состоянии предельного равновесия будем иметь равенства:

$$F_{\text{пр}}\delta = F_{\text{пр}} \cdot l \cdot \phi = 3M_{\text{пр}}\phi$$

Отсюда получаем:

$$F_{\text{пр}} = \frac{3M_{\text{пр}}}{l}$$

## Лекция 10. Поперечный изгиб балок

Поперечным изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента возникает еще и поперечная сила. Так балка, показанная на рис. 9.1, находится в состоянии поперечного изгиба на участках АВ и СД и чистого изгиба на участке ВС.

Наличие поперечных сил  $Q$  в сечениях балки обуславливает появление в них касательных напряжений  $\tau$  и некоторое перераспределение нормальных напряжений  $\sigma$  по сравнению с чистым изгибом. Специальными исследованиями показано, что если длина балки намного превышает ее высоту, то нормальные напряжения при поперечном изгибе можно с большой точностью определять по формулам чистого изгиба. В этом случае остается определить только величину и характер распределения касательных напряжений по сечению балки. Эту задачу впервые решил русский инженер Д. И. Журавский в 1855 году.

Вначале рассмотрим балки с симметричным профилем сечения (рис 10.1а).

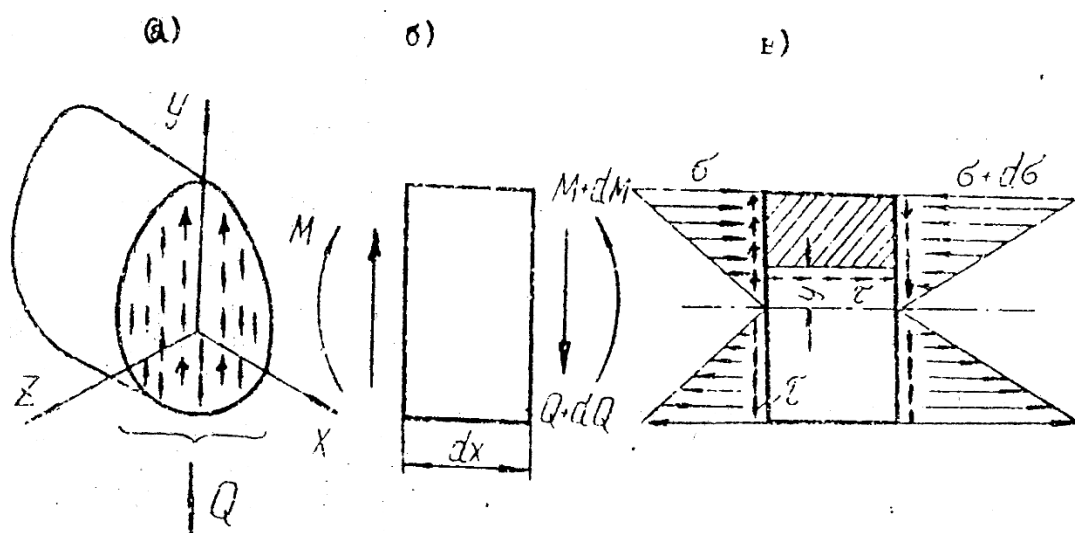


Рис. 10.1

Выделим часть балки длиной  $dx$  и заменим действие отброшенных частей внутренними силами и моментами так, как это показано на рис. 10.1б. Изгибающие моменты обуславливают наличие нормальных напряжений  $\sigma$  и  $\sigma + d\sigma$ , а поперечные силы - касательных напряжений  $\tau$  (рис. 10.1в). По закону парности касательных напряжений в продольных сечениях балки также возникают касательные напряжения  $\tau$ . На рис. 10.1в и на рис. 8.2а эти напряжения показаны для продольного сечения, находящегося от оси балки на расстоянии  $Y$

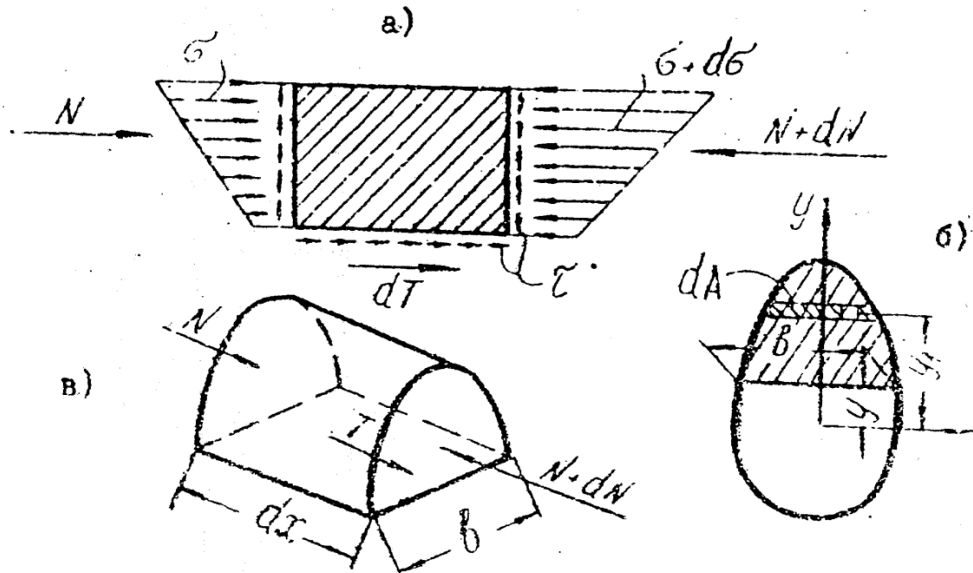


Рис. 10.2

Рассмотрим равновесие заштрихованного на рис. 10.1в и рис. 10.2а участка балки. Этот участок отдельно показан на рис. 10.2в. На рис. 10.2б показан общий вид сечения и его верхняя часть (заштрихованная), соответствующая рассматриваемому участку балки. Напряжениям  $\sigma$ ,  $\sigma + d\sigma$  и  $\tau$  соответствуют следующие силы, направленные вдоль оси балки:

$$N = \int_{(A)} \sigma dA = \int_{(A)} \frac{My_1}{J_z} dA = \frac{M}{J_z} \int_{(A)} y_1 dA = \frac{M}{J_z} S_z^*,$$

$$dN = \frac{dM}{J_z} S_z^*, dT = \tau b dx$$

где  $A$  и  $S_z$  - площадь заштрихованной на рис. 10.2б части сечения и ее статический момент относительно оси  $Z$ ,  $b$  - ширина балки, соответствующая рассматриваемой части сечения.

Из условия равновесия рассматриваемой части балки следует равенство:

$$\tau b dx = \frac{dM}{J_z} S_z^*$$

Так как  $dM/dx = Q$ , то отсюда получаем формулу Д. И. Журавского для определения касательных напряжений:

$$\tau = \frac{QS_z^*}{bJ_z} \quad (10.1)$$

Определение касательных напряжений для балок с несимметричным профилем сечения рассмотрим на примере консольной балки коробчатого сечения (рис. 10.3а).

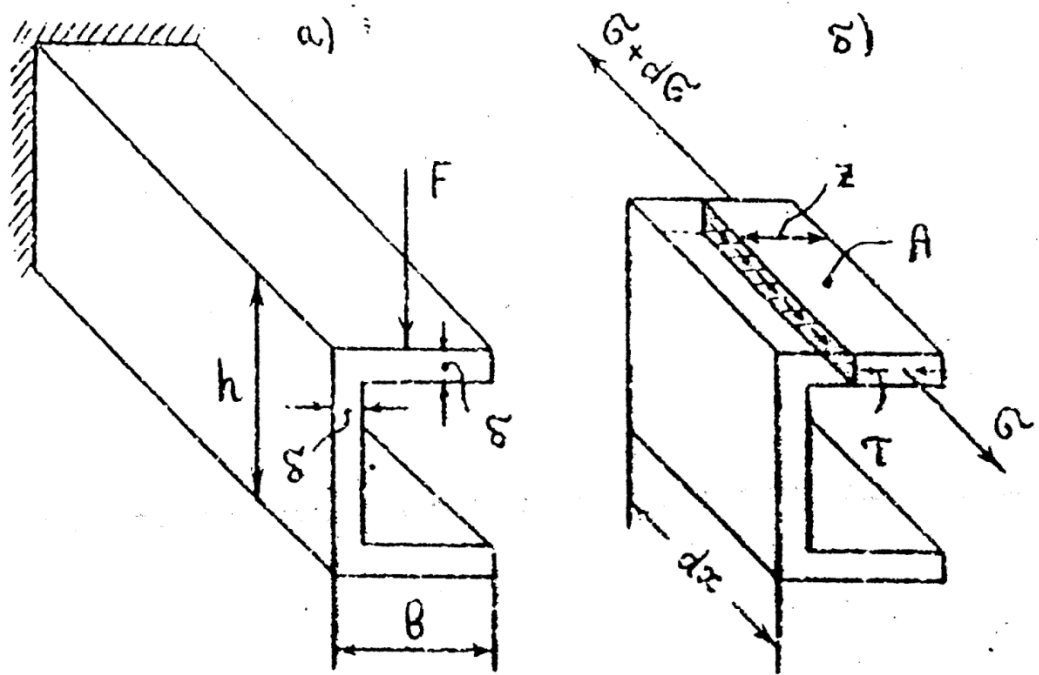


Рис. 10.3

Выделим на участке балки длиной  $dx$  продольный элемент  $A$  шириной  $z$  (рис. 10.3б). Аналогично предыдущему устанавливаем, что в продольных и поперечных сечениях балки возникают касательные напряжения  $\tau$ , которые можно определить по формуле (10.1). Для этого в форму (10.1) нужно подставить значения поперечной силы  $Q = F$ , момента инерции  $J_z$  и соответствующее значение статического момента площади  $S_z^*$ .

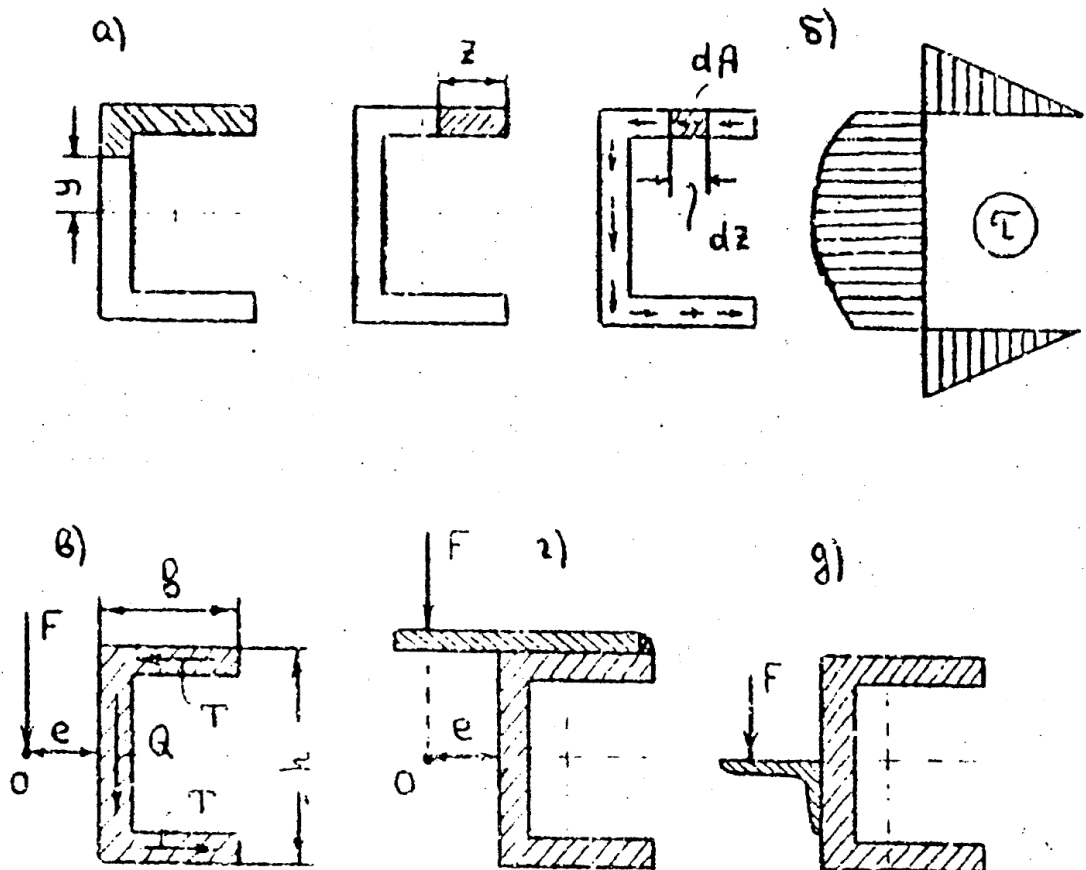


Рис. 10.4

Момент инерции:

$$J_z = \frac{\delta h^2}{12} (h + 6b)$$

Статический момент для части сечения, определяемого координатой Z (рис. 10.1а)

$$S_z^* = \frac{1}{2} \delta h z, (0 \leq z \leq b)$$

Соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{6Fz}{\delta h(h + 6b)}$$

Статический момент для части сечения, определяемого координатой Y (рис. 10.1а)

$$S_z = \frac{1}{2} \delta \left( bh + \frac{h^2}{4} - y^2 \right), (0 \leq y \leq \frac{h}{2})$$

Соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{6F \left( bh + \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\delta h^2 (h + 6b)}$$

Максимальное касательное напряжение получаем при Y = 0:

$$\tau_{max} = \frac{3F(h + 4b)}{2\delta h(h + 6b)}$$

Касательных напряжений представлена на рис. 8.4б.

Вычислим теперь равнодействующие внутренних усилий на полках ( T ) и на стенке ( Q ) (рис. 10.4в).

$$T = \int \tau dA = -\frac{6F}{h(h + 6b)} \int_0^b z dz = \frac{3Fb^2}{h(h + 6b)}; Q = \int_0^{h/2} \tau dA = F$$

Внутренние усилия T и Q дают момент, равный нулю относительно точки O, удаленной от полки на некоторое расстояние e. Это расстояние определяется из уравнения равновесия Th = Fe.

Отсюда получаем

$$e = \frac{Th}{F} = \frac{3b^2}{h + 6b}$$

Если линия действия внешней силы F не проходит через точку O, то сила F создает крутящий момент. Стержень закручивается, и в сечении возникают дополнительные касательные напряжения. Кручения не будет, если линия действия силы F проходит через точку O. Эта точка называется центром изгиба. Два варианта конструктивных решений, обеспечивающих изгиб без кручения показаны на рис. 10.4г, д.

## Лекция 11

Определение перемещений при изгибе по методу Мора и Верещагина.

Рассмотрим метод определения перемещений при изгибе, применимый как к прямолинейным, так и к криволинейным балкам. Пусть, например, требуется определить перемещение точки А в криволинейной балке, показанной на рисунке 11.1 в направлении оси Y

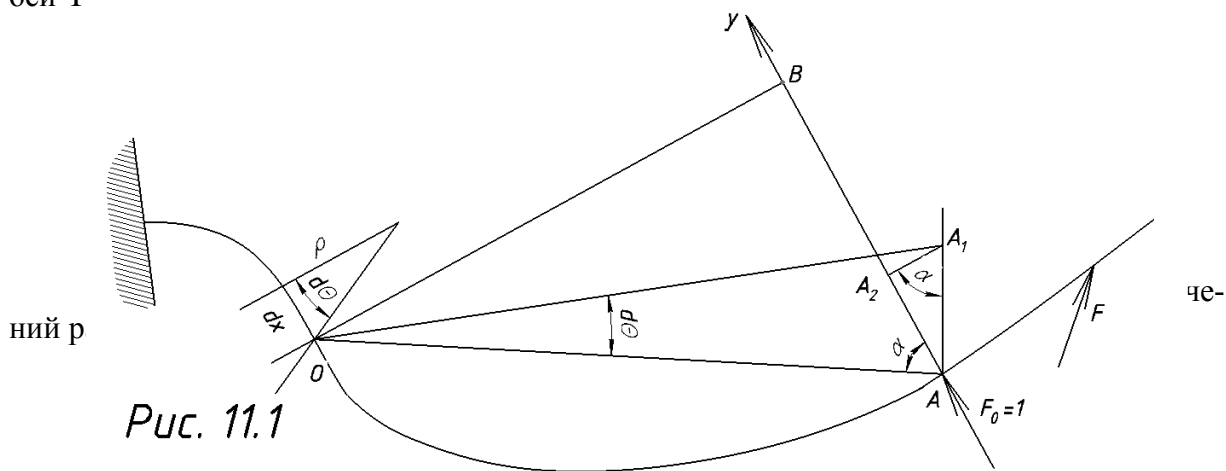


Рис. 11.1

ось Y перемещение.

$$d\delta = AA_2 = AA_1 * \sin \alpha = OA * d\theta * \sin \alpha = OB * d\theta;$$

Величина отрезка OB численно равна моменту единичной безразмерной силы  $F_0=1$ , приложенной в точке А в направлении Y. Этот момент обозначен через M. Тогда:

Суммируя полученные приращения \_\_\_\_\_ по всей длине балки, получим следующую форму \_\_\_\_\_, для определения перемещений при изгибе:

эту формулу можно использовать и для определения углов поворота сечения балки при изгибе. \_\_\_\_\_ сила  $F_0 = 1$  занимает на единичные безразмерный момент  $M_0 = 1$ .

На конце балки прикладываем единичную силу  $F_0=1$ , и вычисляем изгибающие моменты от сил F и  $F_0$  в сечении балки с координатой x. Подставляем эти моменты в формулу (11.1), получаем:

$$\delta = \frac{F}{EJ} * \int_0^l x^2 dx = \frac{F * l^3}{3EJ}$$

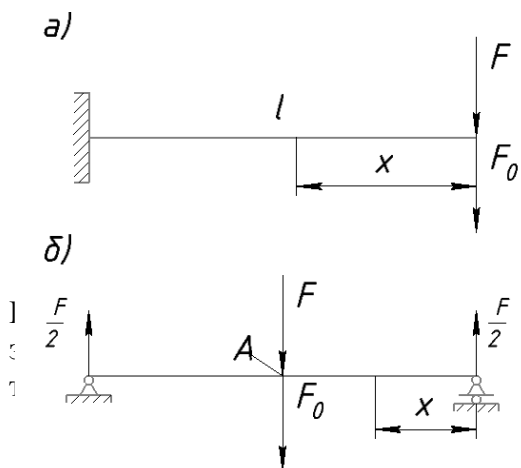


Рис. 11.2

$$\delta = \frac{F * l^3}{42 EJ};$$

Пусть для криволинейной балки, показанной на рис. 11.2(в), требуется вычислить перемещения её конца в направлениях 1 и 2. На конце баки в заданных направлениях прикладываем единичные силы и вычисляем изгибающие моменты в сечении, определяемом угловой координатой phi. Для первого случая получаем:

$$M = FR * \sin\varphi;$$

$$M_0 = R(1 - \cos\varphi);$$

Для второго случая:

$$M = FR * \sin\varphi;$$

$$M_0 = R \sin\varphi;$$

Соответствующие перемещения будут:

$$\delta_1 = \frac{FR^3}{EJ} * \int_0^{\pi/2} \sin\varphi * (1 - \cos\varphi) d\varphi = \frac{FR^3}{2EJ};$$

$$\delta_2 = \frac{\pi FR^3}{4EJ};$$

Заметим теперь, что для прямолинейных балок эпюры изгибающих моментов  $M$  и  $M_0$  можно разбить на участки, в которых эпюра  $M$  будет ограничена плавной кривой, а эпюра  $M_0$  – прямой линией (рис. 11.3). При постоянной жесткости сечений балки это обстоятельство значительно упрощает вычисление интеграла. (11.1)

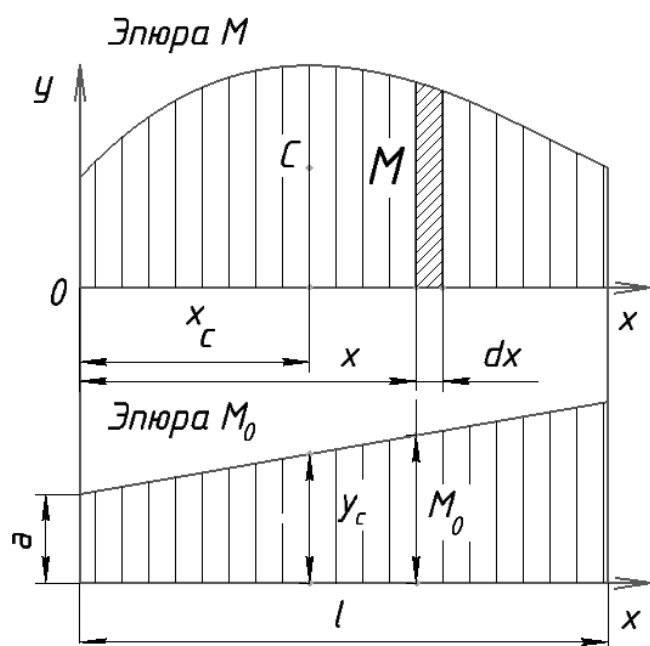


Рис. 11.3

(е балки (рис.11.3).

Соответствующая моменту  $M$  ордината на эпюре  $M_0$   $m_0 = a + x * tg\alpha$ , где  $a$  – наименьшее значение  $M$ ,  $\alpha$  – угол наклона эпюры  $M$  к оси  $x$ .

Введенные соотношения позволяют записать формулу (11.1) в следующем виде:

$$EJ\delta = \int (a + x * tg\alpha) dA = a * A + S_y * tg\alpha = A * (a + x_c * tg\alpha) = A * y_c,$$

где  $A$  – площадь эпюры  $M$ ,  $S_y = \int x dA$  – статический момент площади эпюры  $M$  относительно оси  $Y$ ,  $x_c$  – координата центра тяжести эпюры  $M$ ,  $y_c = a + x_c * tg\alpha$  – значение момента на эпюре  $M$ , соответствующее центру тяжести эпюры  $M$ .

Соотношение (11.6) называется формулой Верещагина.

## Лекция №12.

### Расчеты на прочность и жёсткость при сложном нагружении

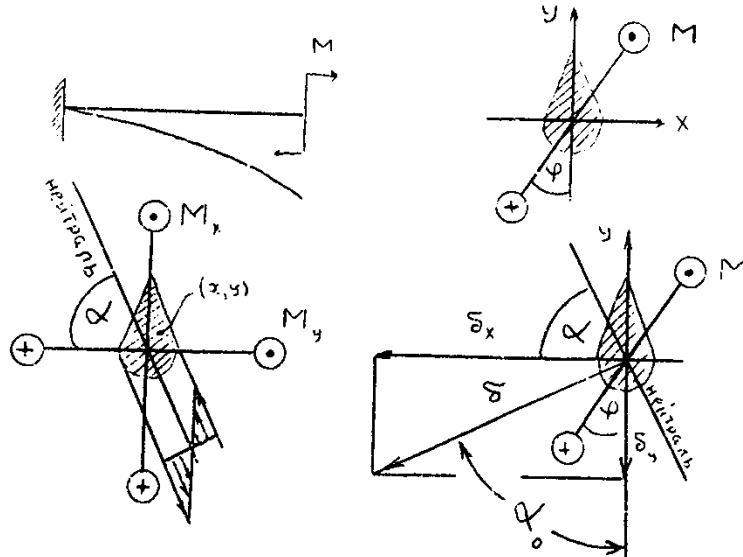
Нагружение стержней называется сложным, если в них одновременно возникают несколько внутренних силовых факторов.

#### 12.1. Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид нагружения, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает с одной из главных плоскостей инерции.

Рассмотрим такой изгиб на примере консольной балки, нагруженной на конце моментом  $M$  (Рис. 12.1). Разложим этот момент на соответствующие  $M_x$  и  $M_y$  и вычислим напряжения в точке с координатами  $(x, y)$ :

$$\sigma(x, y) = M \left( \frac{y}{J_x} \cos \varphi + \frac{x}{J_y} \sin \varphi \right)$$



Линия, на которой напряжения равны нулю, называется нейтральной линией или нейтралью. Ее уравнение получаем из соотношения (12.1) при  $\sigma = 0$ :

$$\left( \frac{\cos \varphi}{J_x} \right) y + \left( \frac{\sin \varphi}{J_y} \right) x = 0$$

Из выражения (12.2) следует, что нейтраль представляет собой прямую линию, проходящую через центр тяжести сечения и наклоненную к оси  $x$  на угол  $\alpha$ , определяемы из уравнения:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{x} = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \varphi$$

Полное перемещение  $\delta$  конца балки равно векторной сумме перемещений  $\delta_x$  и  $\delta_y$ , возникающих от действия моментов  $M_x$  и  $M_y$ :

$$\delta_x = \frac{M_y l^2}{2EJ_y}$$

$$\delta_y = \frac{M_x l^2}{2EJ_x}$$

Угол  $\alpha_0$  между осью  $y$  и перемещением  $\delta$  будет определяться из уравнения:

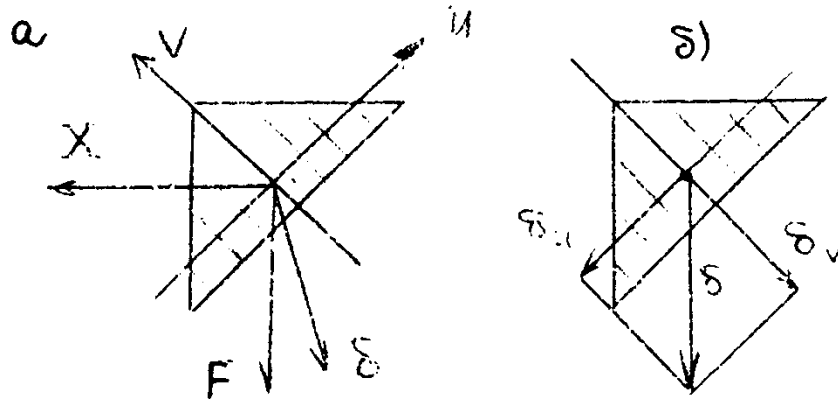
$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\delta_x}{\delta_y} = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \varphi$$

Сравнивая выражения (12.3) и (12.4), заключаем, что  $\alpha = \alpha_0$ . Отсюда следует, что перемещения при косом изгибе происходит по линии, перпендикулярной нейтральной.



### Контрольная задача

Консольный стержень с треугольным сечением, показанный на рис. 12.2а, нагружен вертикальной силой  $F$ . При этом перемещение  $\delta$  центра тяжести сечения будет отклонено вправо.



Требуется найти горизонтальную силу  $X$ , при которой такого отклонения не будет, т.е. будем иметь  $\delta_u = \delta_v$  (рис. 12.2б). Поскольку осевые моменты инерции треугольника относительно его главных осей инерции  $u, v$  отличаются в три раза, то имеем равенство:

$$3(F - X) = 1(F + X)$$

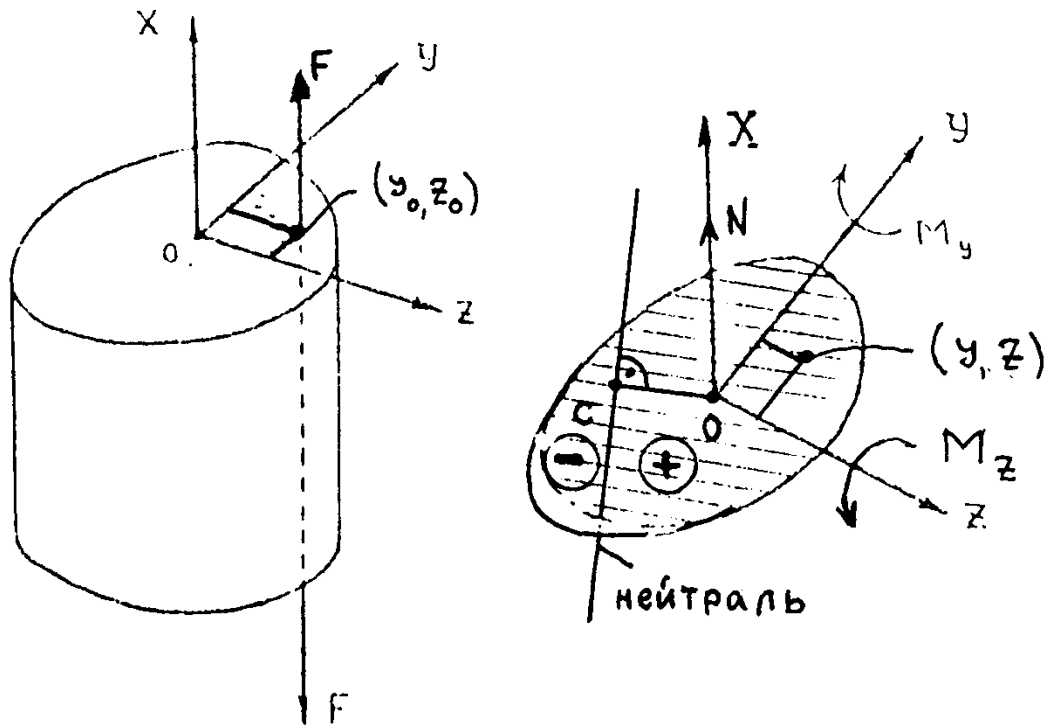
Отсюда находим:

$$X = \frac{1}{2}F$$

## 12.2. Изгиб с растяжением и сжатием

Одновременное воздействие на стержень изгиба и растяжения (или сжатия) рассмотрим на примере внецентренно растянутого стержня (рис. 12.3). Систему координат выберем таким образом, чтобы оси  $y$  и  $z$  были главными центральными осями инерции сечения.

Обозначим координаты точки приложения силы  $F$  через  $y_0$  и  $z_0$ . Тогда относительно главных осей инерции  $y$  и  $z$  возникают изгибающие моменты  $M_y = Fz_0$  и  $M_z = Fy_0$ , а вдоль оси  $X$  - растягивающая сила  $N = F$ .



Напряжения в точке с координатами  $\{y, z\}$  будут равны сумме напряжений, возникающих в этой точке от каждого из трех силовых факторов:

$$\delta = \frac{F}{A} + \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y},$$

где  $A$  - площадь сечения,  $J_y$  и  $J_z$  - главные моменты инерции.

Напряжения в сечении стержня могут быть как положительными, так и отрицательными. Линия, на которой напряжения равны нулю, называется нейтральной линией, или нейтралью. Уравнение этой линии находим из выражения (12.5), полагая в нем  $\sigma = 0$ .

$$\frac{y_0}{J_z} y + \frac{z_0}{J_y} z + \frac{1}{A} = 0$$

Из уравнения (12.6) следует, что нейтральная линия представляет собой прямую, не проходящую через центр тяжести сечения.

Найдем расстояние между нейтральной линией и началом координат. Для этого воспользуемся следующими соотношениями, известными из аналитической геометрии.

Если уравнение прямой в системе координат  $YOZ$  задано в виде:

$$ay + bz + c = 0,$$

то эта прямая проходит от начала координат на расстоянии (рис. 12.3)

$$OC = \frac{C}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Для нашего случая расстояние между нейтралью и началом координат равно отрезку

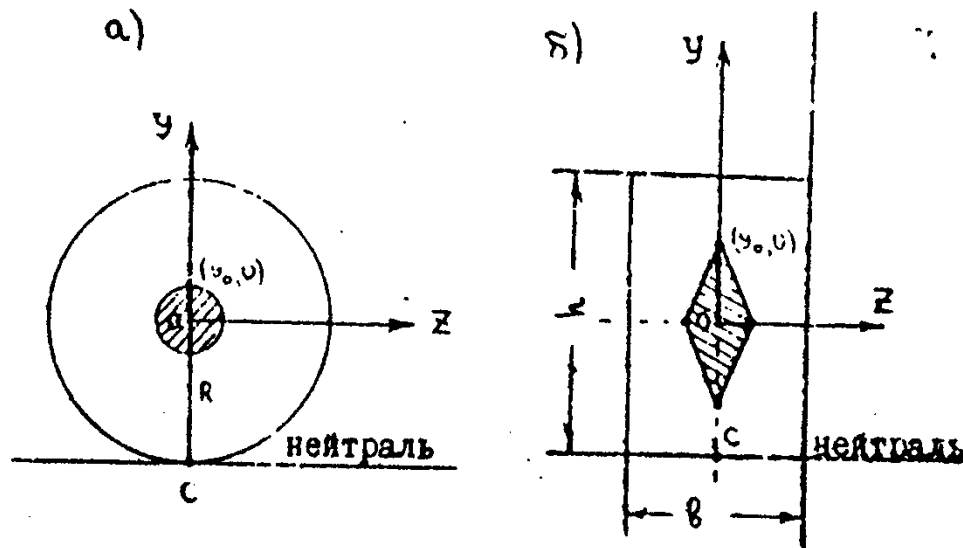
$$OC = \frac{1}{A \sqrt{\left(\frac{y_0}{J_z}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{J_y}\right)^2}}$$

Если внешняя сила приложена в центре тяжести сечения, т.е. если  $z_0 = y_0 = 0$ , то происходит чистое растяжение, а нейтраль удалена в бесконечность ( $OC = \infty$ ). Если же сила расположена в бесконечности, т.е. если  $z_0 = y_0 = \infty$ , то происходит чистый изгиб стержня, и нейтраль проходит через центр тяжести сечения ( $OC = 0$ ).

Таким образом, нейтраль может пересекать сечение и быть вне его. Существует область около центра тяжести сечения обладающая тем свойством, что если в ней прикладывать силы, то напряжения во всем сечении будут оставаться одного знака. Если сила приложена на границе этой области, то нейтраль касается сечения.

Область, обладающая этим свойством, называется ядром сечения.

Определим ядро сечения для круга и прямоугольника. Пусть внешняя сила приложена в точке круга с координатами  $z_0 = 0$ ,  $y_0 \neq 0$  и нейтраль при этом касается сечения (рис. 12.4а). Подставляя в формулу (12.7) величины  $OC = R$ ,  $A = \pi R^2$ ,  $J = \frac{\pi R^4}{4}$ , устанавливаем, что  $r = \frac{R}{4}$ .



Таким образом, ядро сечения для круга есть круг с радиусом, равным одной четверти радиуса сечения.

Пусть в прямоугольнике внешняя сила приложена в точке с координатами  $z_0 = 0$ ,  $y_0 \neq 0$ , а нейтраль при этом проходит через его основание (рис. 12.4б).

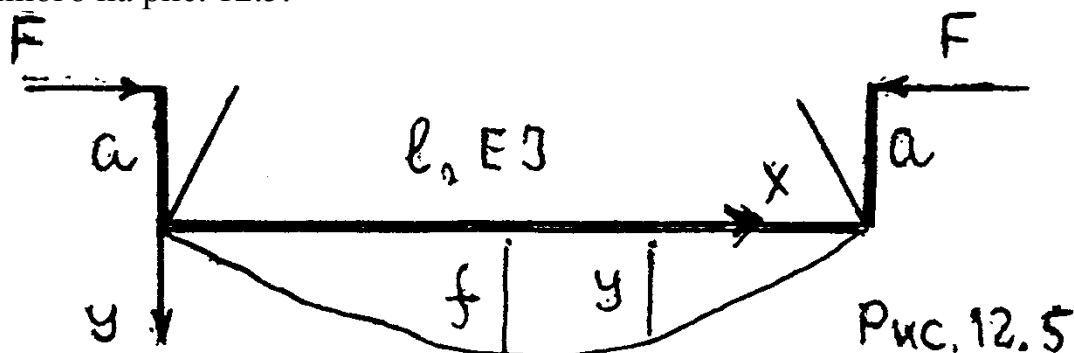
Подставляя в соотношение (12.7) величины:  $OC = \frac{h}{2}$ ,  $A = bh$ ,  $J = \frac{bh^3}{12}$ , устанавливаем, что  $y_0 = \frac{h}{6}$ .

Если внешняя сила приложена на оси  $z$ , то нейтраль проходит через сторону  $CD$  тогда, когда  $z_0 = \frac{b}{6}$ .

Таким образом, ядро сечения для прямоугольника есть ромб с полуосями  $\frac{h}{6}$  и  $\frac{b}{6}$ .

### Контрольная задача

Определить перемещения  $y = y(x)$  для внецентренно нагруженного стержня, показанного на рис. 12.5.



Дифференциальное уравнение упругой линии балки получаем в виде:

$$EJ\ddot{y} = -F(a + y)$$

Примем, что  $y \approx f \sin \frac{\pi x}{l}$ ;  $\ddot{y} = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$ ,

Где  $f$  – максимальный прогиб балки.

Обозначим  $F_0 = EJ \frac{\pi^2}{l^2}$  и запишем уравнение (12.8) при  $x = \frac{l}{2}$  и  $y = f$ :

$$-F_0 f = -F(a + f)$$

Отсюда находим  $f = \frac{Fa}{F_0 - F}$

При  $F \rightarrow F_0$   $f \rightarrow \infty$ .

### Лекция №13

#### Энергетические теоремы в перемещениях

Рассмотрим элемент конструкции, нагруженный силами  $F_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), моментами  $M_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) и внутренним (или наружным) давлением  $q$ , показанный на рис 13.1

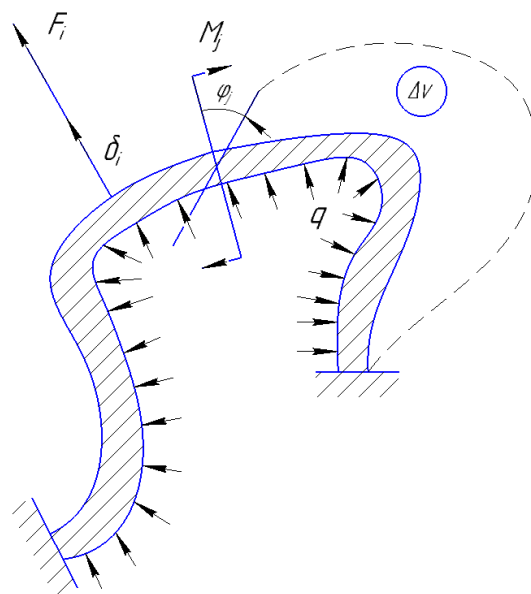


Рис.13.1

В сечениях элемента конструкции возникают шесть силовых факторов : нормальная сила  $N$ , изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , момент кручения  $M_{кр}$  и поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ .

Полная потенциальная энергия системы без учёта малозначимых при определении перемещений сил  $Q_y$  и  $Q_z$  будет определяться по формуле:

$$\Pi = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + \int_0^l \frac{M_{кр}^2 dx}{2GJ_{кр}} \quad (13.1)$$

где  $l$  – длина элемента конструкции.

Обозначим через  $\delta_i$  - перемещение в точке приложения силы  $F_i$  по направлению её действия,  $\varphi_j$  - угол поворота сечения  $j$  в направлении действия момента  $M_j$ ,  $\Delta V$  - изменение объёма под действием давления  $q$ .

Имеем :  $F_i = c_i \delta_i$ ,  $M_j = c_j \varphi_j$ ,  $q = c_v \Delta V$ , где  $c_i, c_j, c_v$  - соответствующие жёсткости.

С учётом этих соотношений, работу  $A$  внешних сил можно представить в следующих трёх видах, представляющих теорему Клапейрона:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \varphi_j + \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \delta_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j^2 + \frac{1}{2} (\Delta V)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2}{c_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{M_j^2}{c_j} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c_v} \end{aligned}$$

Полагая  $A = \Pi$  и опустив нижние индексы, вычислим производные от  $\Pi$  по  $F, M$  и  $q$ . Получим формулы Кастилиано для определения перемещений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F} = \delta; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial M} = \varphi; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \Delta V$$

Вычислив производные от  $\Pi$  по  $\delta, \varphi$  и  $\Delta V$ , получим формулы Лагранжа для определения внешних воздействий :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = F, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = M, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial (\Delta V)} = q$$

Рассмотрим теперь теорему Бетти о «взаимности работ» на примере элемента конструкции, нагруженного силами  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  в точках 1 и 2 (рис. 13.2).

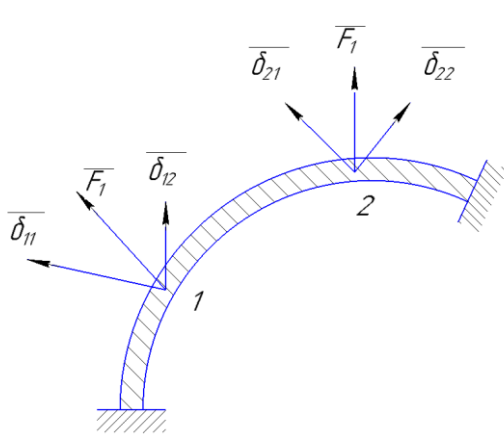


Рис.13.3

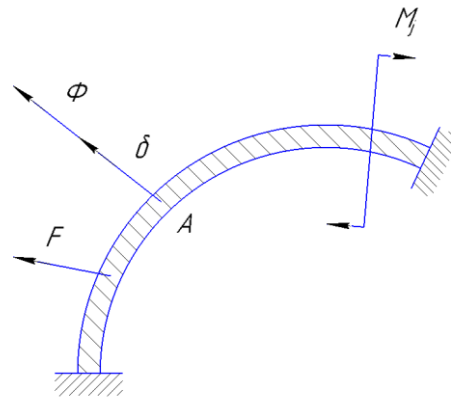


Рис. 13.2

Перемещение в направлении  $i$  ( $i=1,2$ ) от единичной безразмерной силы  $\vec{F}_0 = 1$ , действующей в направлении  $j$  ( $j=1,2$ ), обозначим как  $\vec{\delta}_{ij}$ .

Вначале приложим силу  $\vec{F}_1$ , а затем силу  $\vec{F}_2$  и вычислим работу  $A_1$  этих сил на соответствующих перемещениях:

$$A_1 = \frac{1}{2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{11} + \frac{1}{2} \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{22} + \vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{12}$$

где точка означает скалярное произведение векторов.

Изменим порядок приложения сил. Теперь вначале приложим силу  $\vec{F}_2$ , а затем силу  $\vec{F}_1$  и вычислим работу  $A_2$  этих сил на соответствующих перемещениях

$$A_2 = \frac{1}{2} \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{22} + \frac{1}{2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{11} + \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{21}$$

Из условия  $A_1 = A_2$  получаем равенство :

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{12} = \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{21} \quad (13.2)$$

выражающее теорему *Бетти* о взаимности работ.

В скалярном виде имеем:

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21} \quad (13.3)$$

где  $\delta_{12}$  - перемещение в направлении силы  $F_1$  от действия силы  $F_2$ ,  
 $\delta_{21}$  - перемещение в направлении силы  $F_2$  от действия силы  $F_1$ .

Отсюда, при  $F_1 = F_2$  получаем теорему *Максвелла* о «взаимности перемещений», выраженную соотношениями:

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad \text{или} \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (13.4)$$

Вместо пары сил  $F_1$  и  $F_2$  приложим силу  $F$  и момент  $M$ . Теорема о взаимности работ будет выражаться соотношением (13.3)

$$F \delta_M = M \delta_F \quad (13.5)$$

где  $\delta_M$  - перемещение в направлении силы  $F$  от действия момента  $M$ ,  
 $\delta_F$  - перемещение в направлении силы  $M$  от действия момента  $F$ .

Для пары воздействий  $F$  и  $q$  имеем равенство:

$$F \delta_q = q(\Delta V)_F \quad (13.6)$$

где  $\delta_q$  - перемещение в направлении силы  $F$  от давления  $q$ ,  $(\Delta V)_F$  - изменение объёма под воздействием силы  $F$ .

Для определения перемещений в точках, где нет внешних воздействий теорему *Кастиллиано* применяют для фиктивно приложенной силы  $\Phi$ , при условии, что  $\Phi = 0$  (теорема *Максвелла*), т.е. используют формулу (13.3)

$$(13.7)$$

Силу  $\Phi$  представляют в виде  $\Phi = F_0 \Phi$ , где  $F_0 = 1$  - безразмерная единичная сила.

Внутренние силовые факторы от силы  $F_0 = 1$  обозначают с индексами 1 снизу. При учёте только изгибающего и крутящего моментов имеем:

$$M = M_F + M_1 \Phi; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi} = M_{крF} + M_{кр1} \Phi \quad (13.8)$$

где  $M_F$  и  $M_{кр}$  - изгибающий момент и момент кручения от всех внешних сил.

Подставив (13.8) в (13.7), получим формулу *Максвелла* для определения перемещений:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_F M_1}{EJ} dx + \int_0^l \frac{M_{крF} M_{кр1}}{GJ_k} dx + \dots \quad (13.9)$$

где точки справа указывают возможность аналогичного учёта всех шести внутренних силовых факторов.

## Контрольные задачи

Задача 1. Для криволинейного стержня с жёсткостью  $EJ$ , показанного на рис 13.4 требуется определить перемещение в т.А при действии силы  $F$

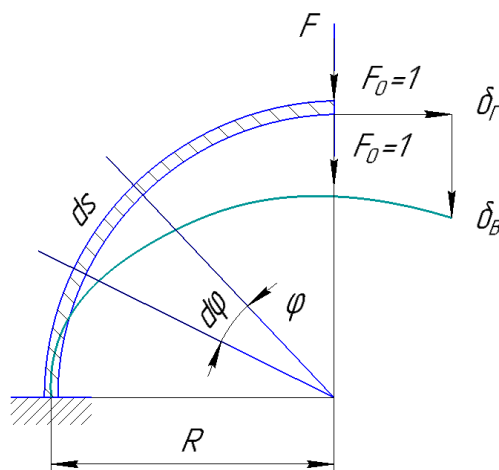


Рис.13.4

Искомое перемещение будет состоять из перемещения вправо  $\delta_r$  и перемещения вниз. В сечении с угловой координатой  $\varphi$  имеем изгибающий момент  $M_F = FR \sin \varphi$ . Для определения  $\delta_B$  приложим вниз силу  $F_0 = 1$  и определим  $M_1 = R \sin \varphi$ . Для определения  $\delta_r$  приложим вправо силу  $F_0 = 1$  и определим  $M_2 = R(1 - \cos \varphi)$ .

Получаем :

$$\delta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F M_1}{EJ} d\varphi = \frac{\pi}{4} \frac{FR^3}{EJ}$$

$$\delta_r = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F M_2}{EJ} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{FR^3}{EJ}$$

Задача 2. Для разрезанного снизу кольца, с жёсткостью сечений на изгиб  $EJ$  и кручение  $GJ_k$ , показанного на рис. 13.5, определить раскрытие нижнего зазора «из плоскости» под действием двух сил  $F$ , приложенных нормально к плоскости кольца.

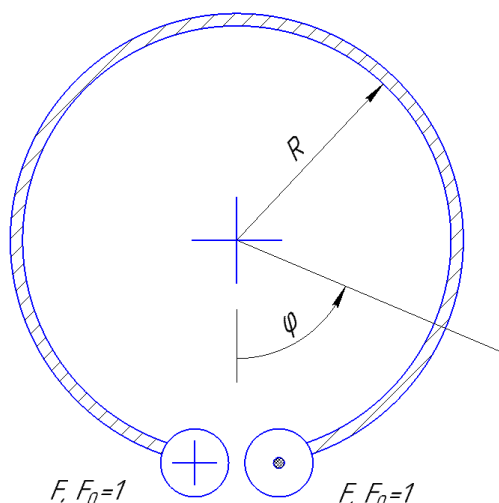


Рис.13.5

В сечении с угловой координатой  $\varphi$  возникает изгибающий момент  $M_F = FR \sin \varphi$  и крутящий момент  $M_{кр} = FR(1 - \cos \varphi)$ . Соответствующие моменты от единичных сил  $F_0 = 1$  будут  $M_1 = R \sin \varphi$  и  $M_2 = R(1 - \cos \varphi)$ .



Искомое раскрытие зазора будет вычисляться по формуле

$$\delta = \frac{FR^3}{EJ} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{FR^3}{GJ_K} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \pi \frac{FR^3}{EJ} + 3\pi \frac{FR^3}{GJ_K}$$

## Лекция 14

### Расчёты на прочность при сложном напряженном состоянии

#### 14.1 Теория напряжений

Рассмотрим в деформируемом теле бесконечно малый объём материала в виде куба и отметим на его гранях все возможные девять напряжений (рис 14.1). Они будут представлены следующей матрицей значений (тензором напряжений).

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (14.1)$$

Из условий равновесия следует, что, если известны эти девять напряжений для какого-либо расположения элементарного куба, то могут быть определены соответствующие девять напряжений и для любого другого расположения этого куба (рис.14.1, б).

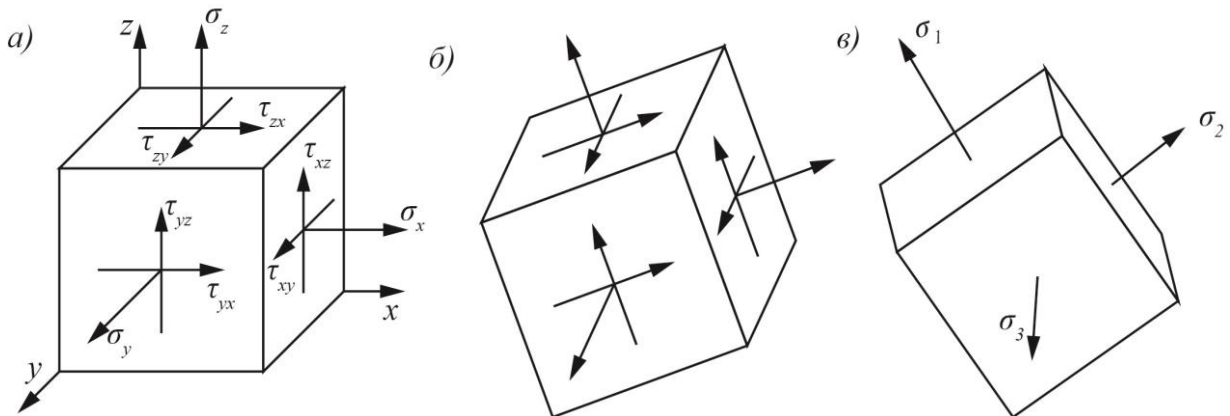


Рис 14.1

Таким образом, тензор напряжений (14.1) полностью характеризует объёмное напряженное состояние в точке. Можно ещё показать, что существует такое расположение куба, при котором на его гранях действуют только нормальные напряжения (рис. 14.1, в). Эти напряжения называются главными напряжениями, а площадки, в которых они действуют, - главными площадками. Главные напряжения обозначаются через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , а индексы для них назначаются таким образом, чтобы напряжение  $\sigma_1$  было наибольшим, а напряжение  $\sigma_3$  – наименьшим. Три главных напряжения также полностью характеризуют напряженное состояние в точке.

При этом тензор напряжений (14.1) принимает вид

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

Рассмотрим теперь плоское напряженное состояние, и вместо элементарного куба будем рассматривать бесконечно малый квадрат, на сторонах которого заданы три напряжения:  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau$  (рис 14.2а). Определим напряжения  $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}, \tau_{\alpha}, \tau_{\beta}$  на сторонах квадрата, повернутого против часовой стрелки относительно заданного на произвольный угол  $\alpha$  (рис. 14.2б).

а) б) в)

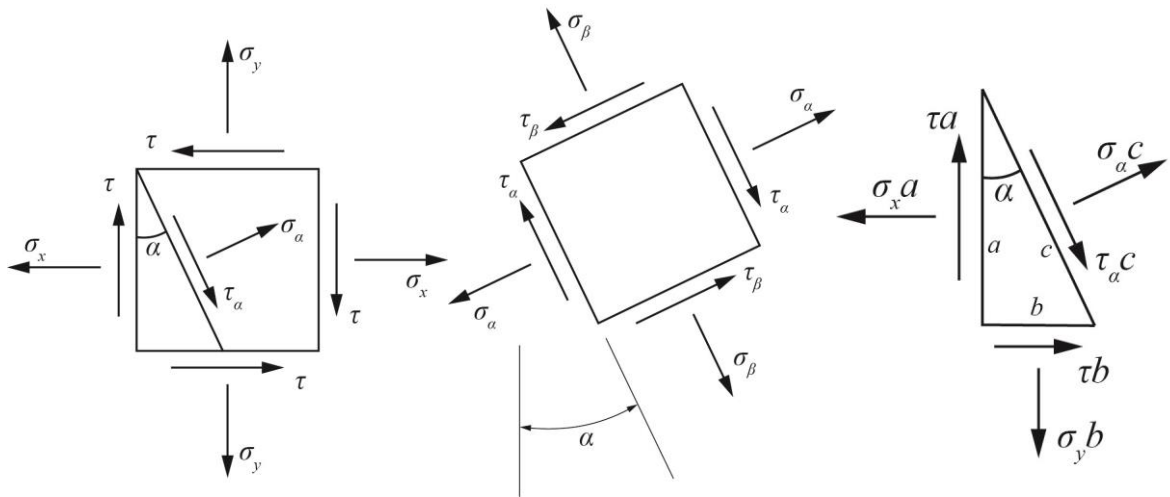


Рис. 14.2

Для этого рассмотрим треугольную призму с толщиной 1, показанную на рис 14.2в. На её сторонах отметим силы, обусловленные действующими напряжениями, и составим уравнения равновесия в проекциях всех сил на направления  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ :

$$\sigma_\alpha c + \tau a \sin(\alpha) + \tau b \cos(\alpha) - \sigma_y b \sin(\alpha) - \sigma_x a \cos(\alpha) = 0$$

$$\tau_\alpha c + \tau b \sin(\alpha) + \sigma_y b \cos(\alpha) - \sigma_x a \sin(\alpha) - \tau a \cos(\alpha) = 0$$

Отсюда получаем, что

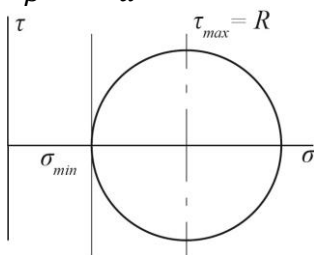
$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha) - \tau \sin(2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) - \tau \sin(2\alpha) \quad (14.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\alpha) + \tau \cos(2\alpha) \quad (14.4)$$

Для определения  $\sigma_\beta$  и  $\tau_\beta$  в выражениях (14.3) и (14.4) вместо угла  $\alpha$  следует подставить угол  $\beta = \alpha + 90^\circ$ . Тогда получим следующие формулы:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2(\alpha) + \sigma_y + \tau \sin(2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) - \tau \sin(2\alpha) \quad (14.5)$$

$$\tau_\beta = \tau_\alpha \quad (14.6)$$



Формула (14.6) выражает теорему о парности касательных напряжений: в двух взаимно перпендикулярных площадках возникают одинаковые по величине касательные напряжения.

Из соотношений (14.3) и (14.5) следует, что сумма нормальных напряжений на двух взаимноперпендикулярных площадках всегда остаётся постоянной и, если на какой-либо площадке напряжение достигает максимального значения, то на площадке, перпендикулярной к ней, напряжение будет минимальным:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{max} + \sigma_{min} = const \quad (14.7)$$

Нормальные напряжения принимают экстремальные значения при условии:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\frac{d\sigma_\beta}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\alpha) - 2\tau \cos(2\alpha) = -2\tau_\alpha = 0 \quad (14.8)$$

Из выражений (14.8) и (14.4) следует, что нормальные напряжения достигают экстремальных значений в тех площадках, в которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки будут главными площадками, а экстремальные напряжения в этих площадках  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$  главными напряжениями. Эти напряжения обозначаются также через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , или  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , или  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в соответствии с принятым выше правилом для расстановки индексов.

Расположение главных площадок определяется углом  $\alpha$ , вычисляется из уравнения (14.8). Это уравнение имеет решение:

$$tg(2\alpha) = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (14.9)$$

Значения главных напряжений вычисляются по формулам (14.3) и (14.5) при подстановке в них значения угла  $\alpha$  из соотношения (14.9). После преобразования получим:

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (14.10)$$

## 14.2 Обобщённый закон Гука

Выше было показано, что напряженное состояние в точке можно задать тремя напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Этим напряжениям соответствуют три главные деформации  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ . Вычислим эти деформации (рис. 14.3).

Если действует только напряжение  $\sigma_1$ , то по закону Гука деформация в направлении напряжения  $\sigma_1$  будет равна  $\frac{\sigma_1}{E}$

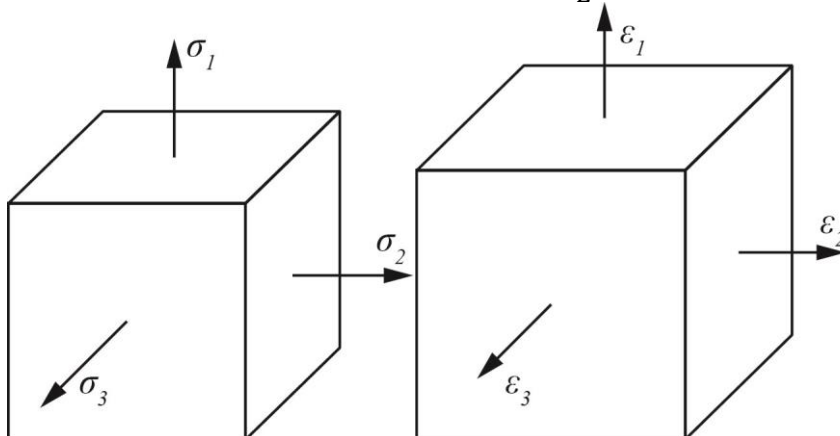


Рис. 14.3

Если действует только напряжения  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , то деформация в направлении напряжения  $\sigma_1$  согласно закону Пуассона будет равна  $\frac{-\mu\sigma_2}{E}$  или  $\frac{-\mu\sigma_3}{E}$ . Используя принцип независимости действия сил, получаем следующее выражение для определения деформации в направлении напряжения  $\sigma_1$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (14.11)$$

Аналогично определяются деформации в направлении напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) \quad (14.12)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)) \quad (14.13)$$

Соответственно (14.11)-(14.13) выражают обобщённый закон Гука.

### 14.3 Теория прочности

Определим теперь условия, при которых в материале могут возникнуть пластические деформации и начаться процессы разрушения.

Поскольку напряжение  $\sigma_1$  является наибольшим, то условие появления пластических деформаций и условие прочности можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_T, \quad (14.14)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \leq [\sigma], \quad (14.15)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение при растяжении.

Соотношение (14.15) выражает первую теорию прочности – теорию наибольших нормальных напряжений. По этой теории наличие напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  не оказывает влияния на прочность материала.

По второй теории – теории наибольших деформаций считается, что условие прочности можно записать в виде:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \quad (14.16)$$

где наибольшая деформация  $\varepsilon_{max}$  сравнивается с допустимой деформацией  $[\varepsilon]$  при растяжении.

Подставим в (14.16) соотношение (14.11), получим следующее условие прочности

$$\sigma_3^{\parallel} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (14.17)$$

где  $\sigma_3^{\parallel}$  - эквивалентное (или расчётное) напряжение по второй теории прочности.

По третьей теории прочности (теория наибольших касательных напряжений) считается, что пластические деформации могут наступить при превышении наибольшими касательными напряжениями уровня касательных напряжений, возникающих в растянутом стержне при появлении в нём пластических деформаций, т.е. условие прочности можно записать в виде

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Для определения наибольших касательных напряжений рассмотрим три наклонные площадки, отмеченные на рис.14.4 штриховкой. В соответствии с (14.4) напряжения в этих площадках определяются по формулам:

$$\tau_{\alpha}^{(1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha); \tau_{\alpha}^{(2)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin(2\alpha); \tau_{\alpha}^{(3)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(2\alpha); \quad (14.18)$$

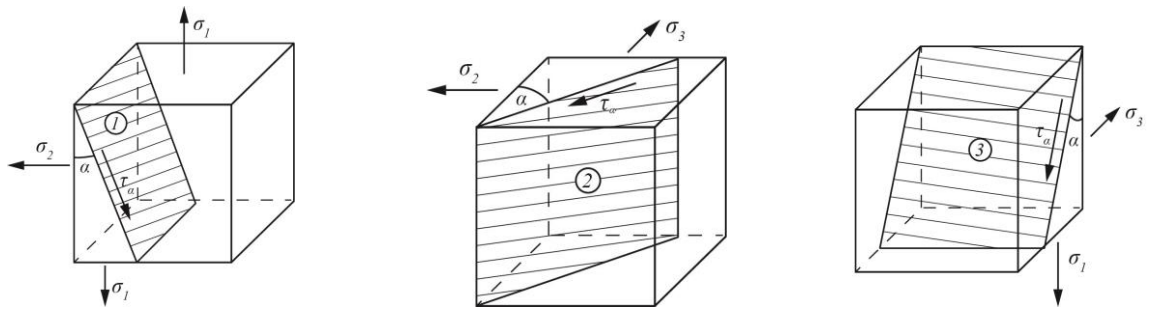


Рис 14.4

Наибольшие касательные напряжения возникают в третьей площадке при  $\alpha=45^\circ$ . Эти напряжения должны быть меньше наибольших допустимых касательных напряжений при растяжении. Это условие приводит к соотношению, выражающему третью теорию прочности:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

или

$$\sigma_3^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (14.19)$$

где  $\sigma_3^{III}$  - эквивалентное (расчётное) напряжение по третьей теории прочности.

Заметим, что при растяжении в направлении  $\sigma_1$  с напряжением  $[\sigma]$  касательные напряжения в площадках 1 и 3 равны  $\frac{[\sigma]}{2}$ , а во второй площадке – нулю. Тогда эквивалентность объёмного напряженного состояния и напряженного состояния при растяжении можно выразить соотношением:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2 \left( \frac{[\sigma]}{2} \right)^2, \quad (14.20)$$

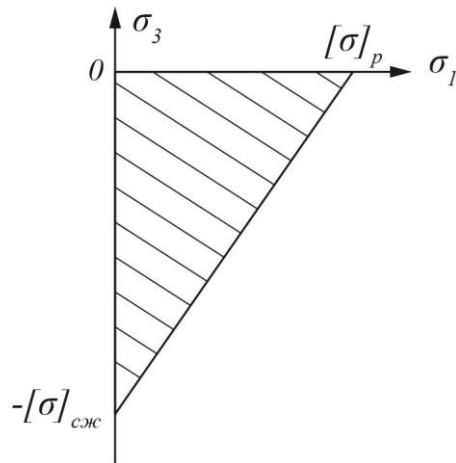
Где  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  определяется по формулам (14.18) при  $\alpha=45^\circ$ .

После преобразований условие (14.20) можно представить в виде четвертой теории прочности:

$$\sigma_3^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma], \quad (14.21)$$

где  $\sigma_3^{IV}$  – эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности.

Для материалов, у которых допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, условие прочности можно выразить следующим образом. Построим в системе координат  $\{\sigma_1, \sigma_3\}$  линию, соединяющую точки с координатами  $\{\sigma_1 = [\sigma]_p, \sigma_3 = 0\}$  и  $\{\sigma_3 = 0, \sigma_1 = -[\sigma]_{сж}\}$ , где  $[\sigma]_p, [\sigma]_{сж}$  - допускаемые напряжения при растяжении и сжатии, соответственно (рис.14.5).



Считается, что если точки с координатами  $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ , будут расположены в заштрихованной на рис.14.5 области, то разрушения не произойдёт. Это условие описывается неравенством:

$$\frac{\sigma_1}{[\sigma]_p} - \frac{\sigma_3}{[\sigma]_{сж}} \leq 1,$$

или

$$\sigma_3 = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p \quad (14.22)$$

где

$$k = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$$

Теория прочности, выраженная соотношением (14.22), предложена О.Мором.

#### 14.4 Расчёты на прочность при изгибе с кручением

Особенности расчёта валов, работающих на изгиб с кручением, рассмотрим на примере, показанном на рис.14.6.а. Здесь вращение на исполни-

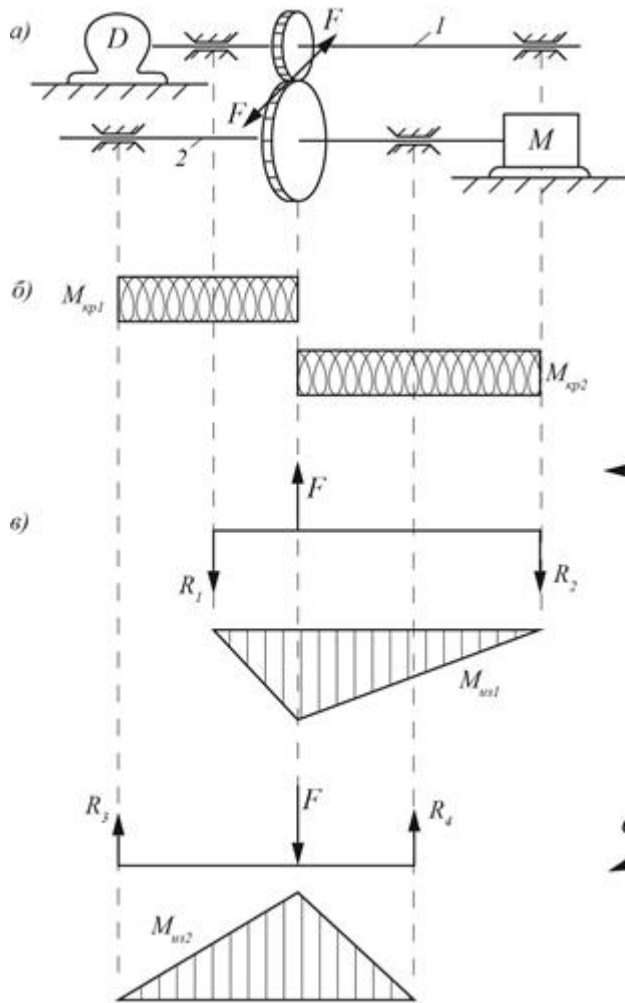


Рис. 14.6

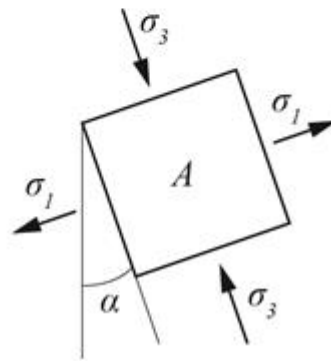
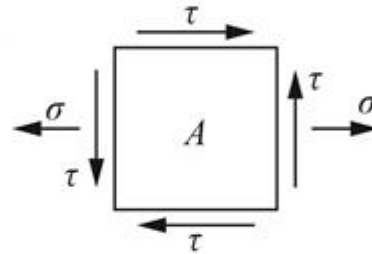
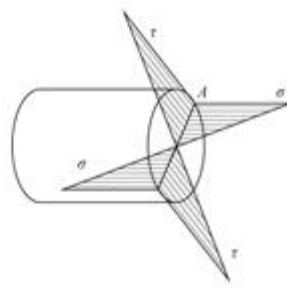


Рис. 14.7

тельный механизм “М” от двигателя “Д” передаётся с помощью двух шестерён, расположенных на валах 1 и 2. Требуется произвести расчёт на прочность этих валов. Эпюры крутящих моментов для них показаны на рис. 14.6б. На рис 14.6в показаны схемы нагружения и эпюры изгибающих моментов. Наиболее нагруженными оказываются сечения, где расположены шестерни. При этом от воздействия крутящего момента – касательные напряжения. Эпюры этих напряжений показаны на рис.14.7ф. В наиболее опасной точке А возникают напряжения:

$$\sigma = \frac{M}{W}; \tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{2W}$$

где  $W=0.1\alpha^3$  – осевой момент сопротивления,  $W_p = 0.2\alpha^3$  – полярный момент сопротивления сечения,  $d$  – диаметр сечения.

Напряженное состояние на рис.14.7в. В соответствии с формулой (14.10), получаем следующие выражения:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

В соответствии с третьей теорией условие прочности получаем в виде:

$$\sigma_3^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$



где  $M_3^{III} = \sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_{кр}^2}$  – эквивалентный момент по третьей теории прочности.

Отсюда находим необходимый диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_3^{III}}{0.1[\sigma]}}$$

В местах контакта деталей (зубьев шестерен, элементов шариковых и роликовых подшипников и т.п.) возникают напряжения, приводящие к смятию и выкрашиванию рабочих поверхностей. Рассмотрим два типа контакта: контакт цилиндрических поверхностей вдоль образующих (рис. 14.8а) и контакт шаров в точке (рис. 14.8б). Напряженно-деформированное состояние в зоне контакта характеризуется площадью контакта, контактным давлением и наибольшим эквивалентным напряжением.

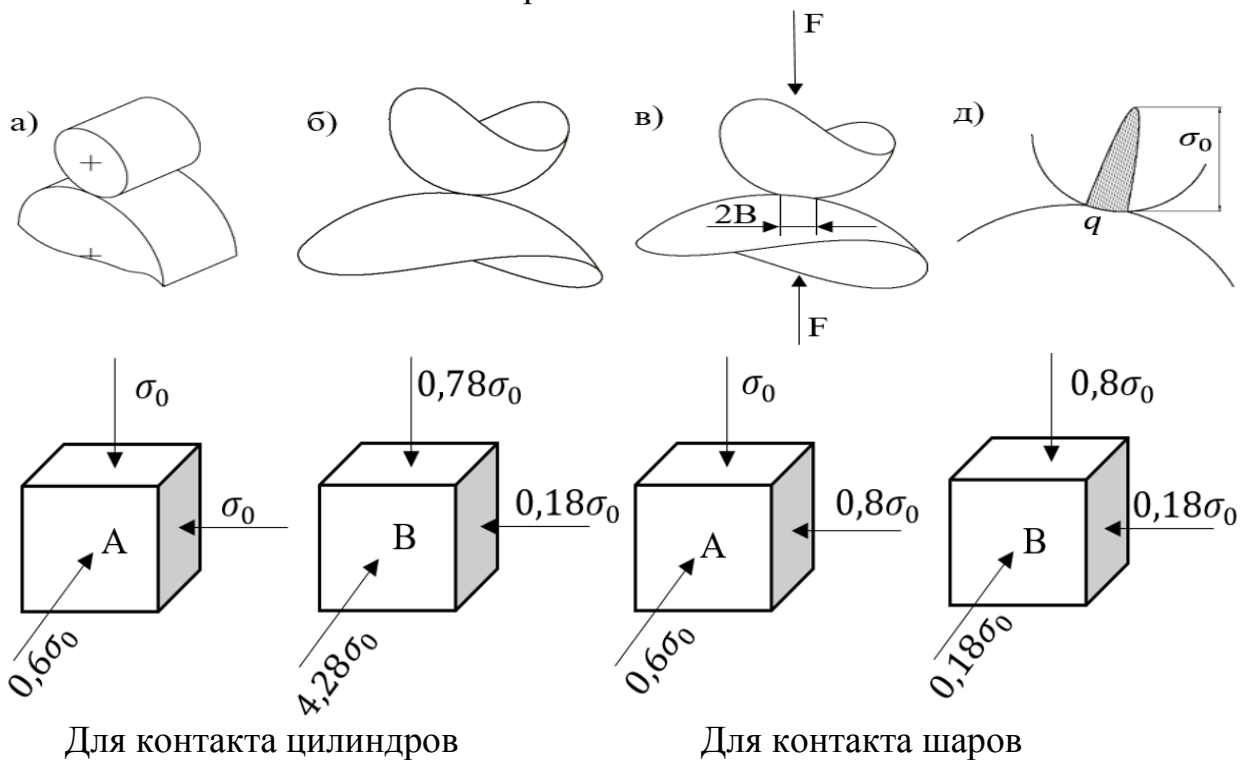


Рис. 14.8

При контакте цилиндров полуширина площадки контакта вычисляется по формуле:

$$l = 1,5 \sqrt{\frac{F}{lE} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

где  $F$  – приложенное сжимающее усилие,  $l$  – длина площадки контакта,  $R_1, R_2$  – радиусы цилиндров.

Максимальное давление в зоне контакта

$$\sigma_{max} = 0,418 \sqrt{\frac{FE}{l} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Наиболее опасное напряженное состояние возникает не на поверхности, а на некоторой глубине под площадкой контакта (см. точки А и В на рис. 14.8). В точке В эквивалентное напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_3^{III} = 0,6 \sigma_{max}.$$

При контакте шаров радиус площадки контакта вычисляется по формуле

$$b = 1,1 \sqrt[3]{\frac{F}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

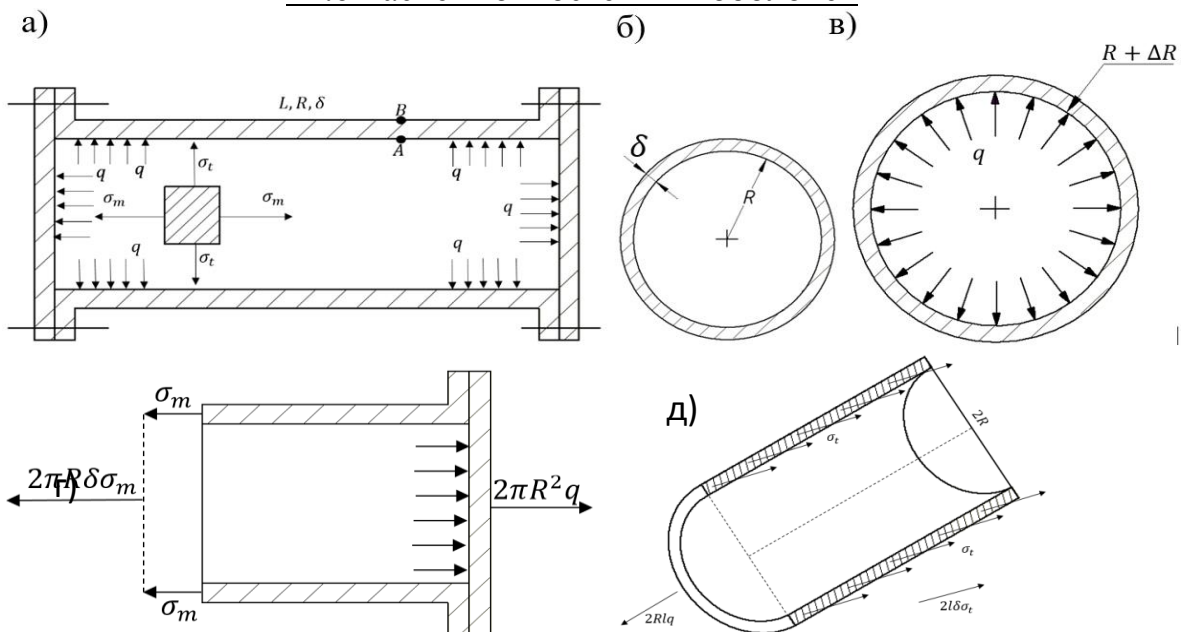
Максимальное давление в зоне контакта

$$\sigma_{max} = 0,388 \sqrt[3]{F E^2 \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^2}.$$

Наиболее опасное напряженное состояние также возникает на некоторой глубине под площадкой контакта. В этой точке

$$\sigma_3^{III} = 0,62 \sigma_{max}.$$

#### 14.6 Расчет тонкостенных оболочек



Рассмотрим тонкостенную цилиндрическую оболочку, находящуюся под воздействием внутреннего давления  $q$ , показанную на рис. 14.9а.

В оболочке возникает меридиональное напряжение  $\sigma_m$  и тангенциальное напряжение  $\sigma_t$ . Напряжение  $\sigma_m$  определяется из условия равновесия отсеченной части оболочки, показанное на рис. 14.9г, а напряжение  $\sigma_t$  – из условия равновесия части оболочки, показанной на рис. 14.9д. Из этих условий получаем формулы:

$$\sigma_m = \frac{qR}{2\delta}; \quad \sigma_t = \frac{qR}{\delta},$$

т.е. напряжение  $\sigma_t$  в два раза превышает напряжение  $\sigma_m$  и предопределяет возможное разрушение (появление трещин) вдоль оболочки.

Напряженное состояние на внутренней поверхности оболочки (в т.А) отличается от напряженного состояния на её наружной поверхности (в т. В). Для этих точек оно показано на рис. 14.10

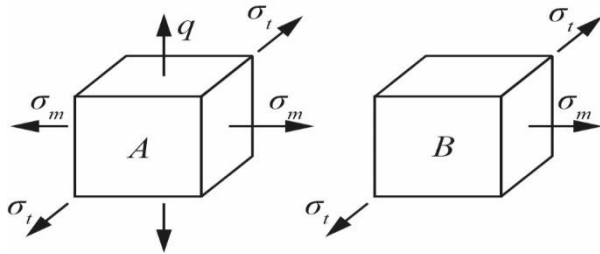


Рис. 14.10

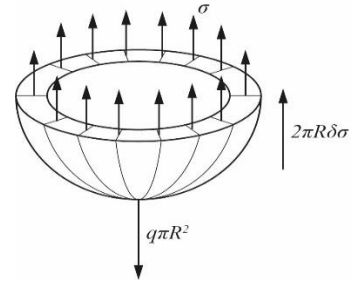


Рис. 14.11

Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_3^{III} = \sigma_t + q \leq [\sigma].$$

Напряжения в сферической оболочке определяется из условия равновесия её части, показанной на рис. 14.11

$$\text{Имеем } \sigma_t = \sigma_m = \sigma = \frac{qR}{2\delta}.$$

#### 14.7 Расчет толстостенных цилиндров

Рассмотрим толстостенный цилиндр, находящийся под воздействием наружного  $P_H$  и внутреннего  $P_B$  давлений. Внутренний радиус цилиндра обозначим как  $\Gamma_B$ , а наружного -  $\Gamma_H$  (рис. 14.12а)

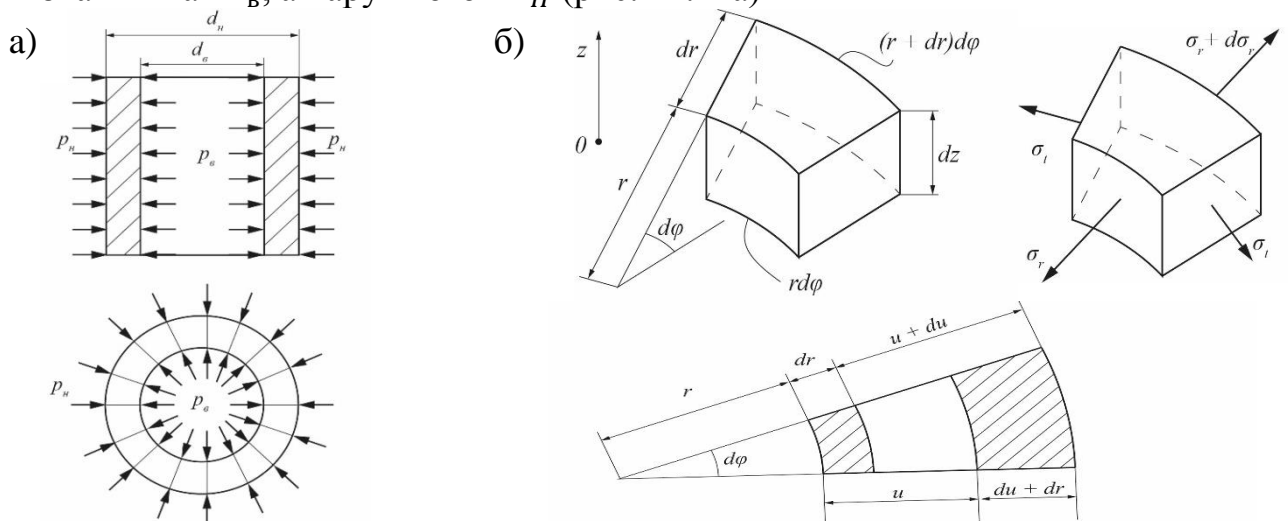


Рис. 14.12

В бесконечно малом объеме  $(rd\varphi, (r + dr)d\varphi, dz)$  с радиальной координатой  $r$  возникают напряжения  $\sigma_r, \sigma_r + d\sigma_r$  и  $\sigma_t$  (рис. 14.12б). Уравнение равновесия для бесконечно малого объема получаем в виде равенства суммы всех сил в направлении  $r$ .

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi dz - \sigma_r r d\varphi dz - \sigma_t dr d\varphi = 0$$

или

$$r \frac{\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (14.22).$$

Радиальная  $\varepsilon_r$  и тангенциальная деформация  $\varepsilon_t$  рассматриваемого бесконечно малого объема будут вычисляться по формулам:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r},$$

где  $u$  – радиальное перемещение точки с координатой  $r$ .

Отсюда получаем уравнение совместности деформаций  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_t$ .

$$\varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_t)}{dr} = r \frac{d\varepsilon_t}{dr} + \varepsilon_t \quad (14.23)$$

В соответствии с обобщение закона Гука имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_t) \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu\sigma_r) \end{aligned} \quad (14.24)$$

Подставляя (14.24) в (14.23), получаем уравнение совместности деформаций, выраженное в напряжениях

$$-r \frac{d\sigma_t}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (14.25)$$

Для определения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  получили систему уравнений (14.22) и (14.25).

Вычтем из уравнения (14.22) уравнение (14.25), а затем сложим его с этим уравнение. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_t) &= 0 \\ r \frac{d}{dr} (\sigma_r - \sigma_t) + 2(\sigma_r - \sigma_t) &= \frac{d}{dr} (r^2(\sigma_r - \sigma_t)) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_t &= c_1 \\ \sigma_r - \sigma_t &= c_2/r^2 \end{aligned} \quad (14.26)$$

где константы  $c_1$  и  $c_2$  определяются из граничных условий:  $r = r_B$ ,  $\sigma = -P_B$ ; при  $r = r_H$ ,  $\sigma_r = -P_H$ .

Решим систему уравнений (14.26), получим формулы для расчета искоемых напряжений:

$$\sigma_{r,t} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2r^2},$$

Где

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2} &= \frac{P_B r_B^2 - P_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \\ \frac{c_2}{2} &= \frac{P_B - P_H}{r_H^2 - r_B^2} r_H^2 r_B^2. \end{aligned}$$

Таким образом, задача о расчете напряжений для толстостенных цилиндров решена.

## Лекция 15

### Расчет статически неопределимых систем изгиба

Система называется статически неопределимой, если из уравнений равновесия статики нельзя определить все реакции связей или все внутренние силовые факторы.

Так, для один раз статически неопределимой балки, показанной на рис. 15.1, а, нельзя из уравнений её равновесия определить все три реакции связей:  $X_1, X_2, X_3$ , а для трижды статически неопределимой рамы, показанной на рис. 15.2, а, нельзя определить все три силовых фактора в сечениях стержней  $X_1, X_2, X_3$ , тогда как две реакции связей  $R_1$  и  $R_2$  легко определяются из двух уравнений равновесия рамы.

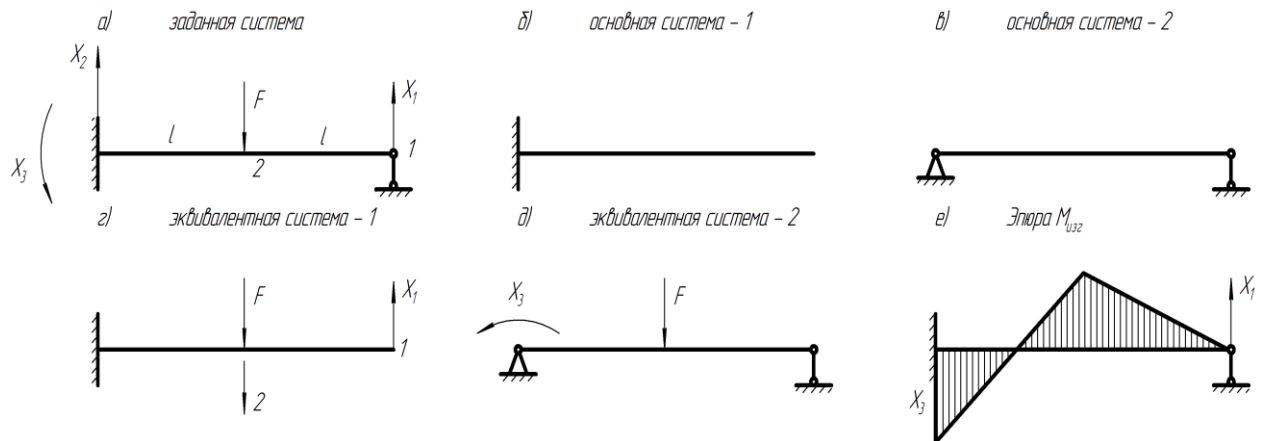


Рис. 15.1

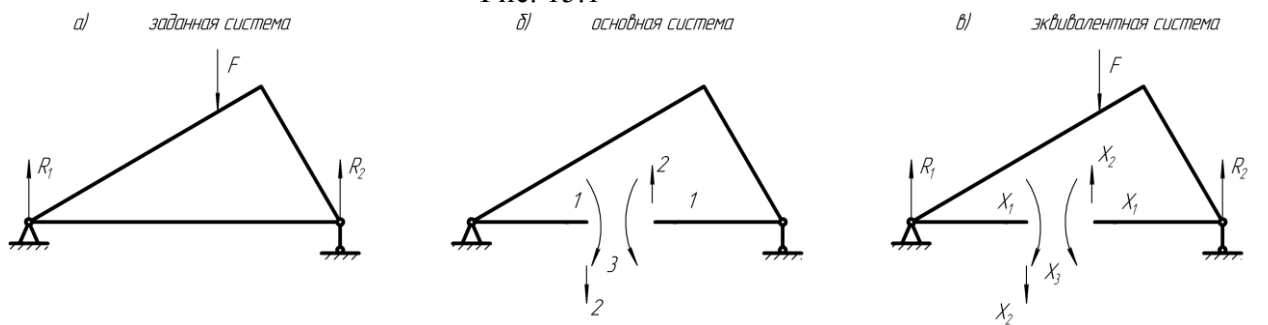


Рис. 15.2

Для расчета статически неопределимых систем вначале выбирают для них основные статически определимые системы, которые получают из заданных систем путем отбрасывания в них «лишних» связей и всех внешних сил. Так, для рассматриваемой балки две такие основные системы показаны на рис. 15.1, б, в, а для рамы – одна такая система показана на рис. 15.2, б.

К основным системам прикладывают отброшенные внешние силы, неизвестные реакции связей и внутренние силовые факторы с тем, чтобы сделать из них системы, эквивалентные заданным. Для балки такие эквивалентные системы показаны на рис. 15.1, г, д, а для рамы – одна такая система показана на рис. 15.2, в.

Для балки условие эквивалентности систем состоит либо в том, что перемещение на опоре 1 равно нулю, либо в том, что угол поворота в левой заделке равен нулю. Эти условия выражаются уравнениями:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}F &= 0 \\ \delta_{33}X_3 + \delta_{32}F &= 0 \end{aligned} \quad (15.1)$$

Где  $\delta_{ij}$  - перемещение в направлении  $i$  от единичной силы или момента, приложенных в направлении  $j$ .

После вычисления из уравнений (15.1) силы  $X_1$  и момента  $X_3$  строим эпюру изгибающих моментов, которая ориентировочно показана на рис. 15.1, е.

Для рамы условие эквивалентности систем, показанных на рис. 15.2, будет состоять в том, что все три перемещения  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  в направлениях 1, 2 и 3 (рис. 15.2,б) будут равны нулю, т.е. из уравнений :

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_3 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

Или в матричном виде

$$[\delta] \cdot \vec{X} = -\vec{\delta}_F \quad (15.2)$$

Где

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = [X_1, X_2, X_3]^T; \\ \vec{\delta}_F = [\delta_{1F}, \delta_{2F}, \delta_{3F}]^T;$$

После определения всех коэффициентов податливостей из решения уравнений (15.2) находим искомые силовые факторы в виде

$$\vec{X} = -[\delta]^{-1} \cdot \vec{\delta}_F$$

При этом эквивалентная система, показанная на рис. 15.2 в, будет статически определимой системой с уже известными воздействиями  $X_1, X_2, X_3, F$ , которая решается известными методами.

#### Контрольная задача

Для рамы, показанной на рис. 15.3, а требуется построить эпюры изгибающих моментов в её элементах.

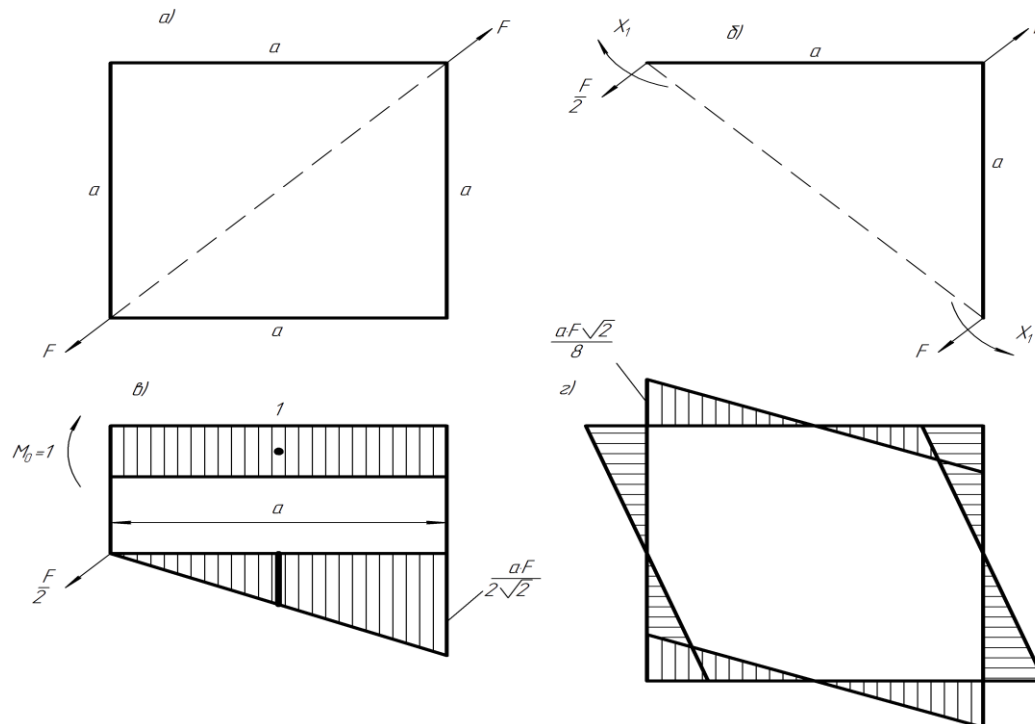


Рис. 15.3

Отсеченная по диагонали часть рамы, показанная на рис. 15.3,б, находится в равновесии под действием силы  $F$ , двух сил  $\frac{F}{2}$  и неизвестного изгибающего момента  $X_1$  в сечении, которое не поворачивается. Из этого условия получаем уравнение для определения момента  $X_1$ :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0,$$

Где

$\delta_{11}$  - угол поворота в направлении  $X_1$  при  $X_1 = 1$ ,

$\delta_{1F}$  - угол поворота в направлении  $X_1$  от воздействия силы  $F$ .

## Лекция 16

### Расчёт пружин

Стержень, изогнутый по винтовой линии, называется пружиной. По характеру пружины подразделяются на пружины растяжения, сжатия, изгиба и кручения. Сечение проволоки, из которой изготавливаются пружины, может быть круглым, овальным, кольцевым и т. д. Форма пружины — цилиндрической, конической, параболической и т. п.

Рассмотрим вначале пружины растяжения (рис. 16.1) и вычислим сложные факторы в её сечениях (рис. 16.2). Разложив вектор-момент и вектор-силу в сечении витков пружины на составляющие, получим:

$$\begin{aligned} M_{кр} &= M \cos \alpha = FR \cos \alpha; M_{из} = FR \sin \alpha; \\ Q &= F \cos \alpha; N = F \sin \alpha, \end{aligned} \quad (16.1)$$

где  $R$  — радиус пружины, соответствующий рассматриваемому сечению.

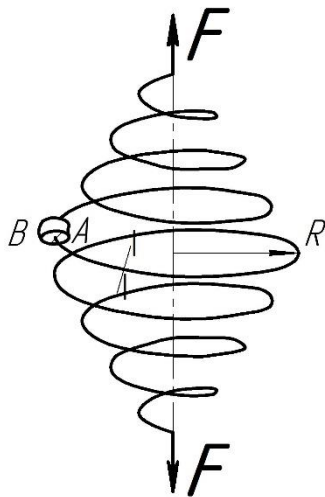


Рис. 16.1

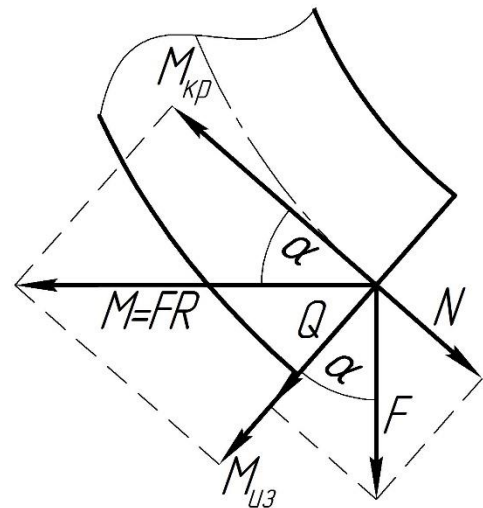


Рис. 16.2

Из приведённых соотношений следует, что при малом угле  $\alpha$  подъёма винтовой линии пружины изгибом и растяжением можно пренебречь. Характер распределения напряжений от сдвига и кручения показан на рис. 16.3. Максимальные напряжения возникают во внутренней точке А:

$$\tau_A = \tau_{Mкр} + \tau_Q = \frac{M_{кр}}{W_p} \left( 1 + \frac{r}{2R} \right)$$

Определим теперь удлинение и жёсткость пружины (рис. 16.4). За счёт кручения бесконечно малого участка витка пружины  $ds$  длина пружины увеличивается на величину



$$d\delta = R d\varphi = \frac{M_{кр} R}{GJ_p} ds.$$

Полное удлинение пружины будет

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{кр} R}{GJ_p} ds,$$

где  $l$  — длина проволоки, из которой изготовлена пружина.

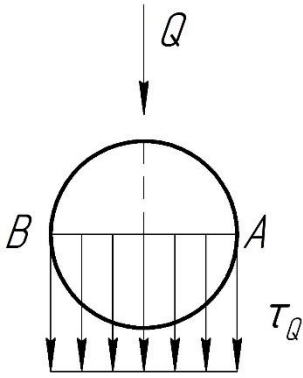


Рис. 16.3

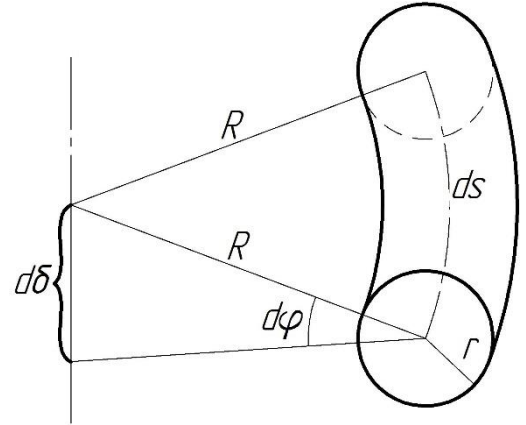
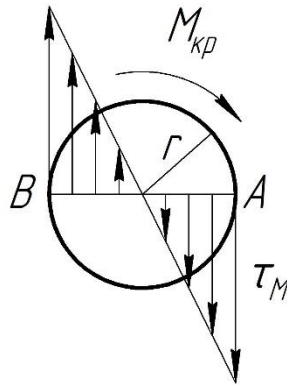


Рис. 16.4

Для цилиндрической пружины с круглым поперечным сечением витка имеем

$$\delta = \frac{4FR^3 n}{Gr^4},$$

где  $n$  — число витков пружины,  $r$  — радиус сечения.

Потенциальная энергия в элементе длиной  $ds$  будет

$$d\Pi = \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_{кр}}.$$

Полная потенциальная энергия в пружине будет равна

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_{кр}}.$$

Для цилиндрической пружины

$$\Pi = \frac{2F^2 R^3 n}{Gr^4}.$$

Растяжение пружины сопровождается её закручиванием. Угол закручивания можно вычислить по методу Максвелла — Мора, описанного

в лекции 13. В соответствии с этим методом приложим к пружине единственный безразмерный вектор-момент  $M_0 = 1$  и вычислим в сечениях витка пружины соответствующий изгибающий момент и момент кручения (рис. 16.5).

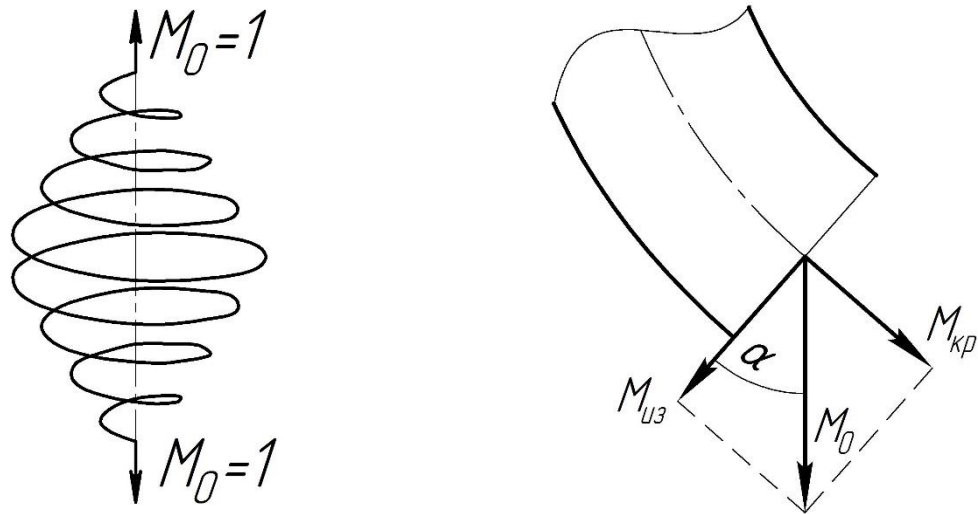


Рис. 16.5

Имеем:  $M_{из,1} = 1 \cdot \cos \alpha$ ;  $M_{кр,1} = 1 \cdot \sin \alpha$ .

С учётом (16.1) получаем формулу для определения угла закручивания цилиндрической витой пружины

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_{из} \cdot M_{из,1} ds + \frac{1}{GJ_p} \int_0^l M_{кр} \cdot M_{кр,1} ds = \frac{1}{2} FRl \sin 2\alpha \left( \frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p} \right).$$

Рассмотрим теперь пружину кручения, находящуюся под воздействием момента кручения  $\vec{M}$  и единичного безразмерного момента  $M_0 = 1$  и вычислим в её сечениях соответствующие изгибающие моменты и моменты кручения (рис. 16.6, а).

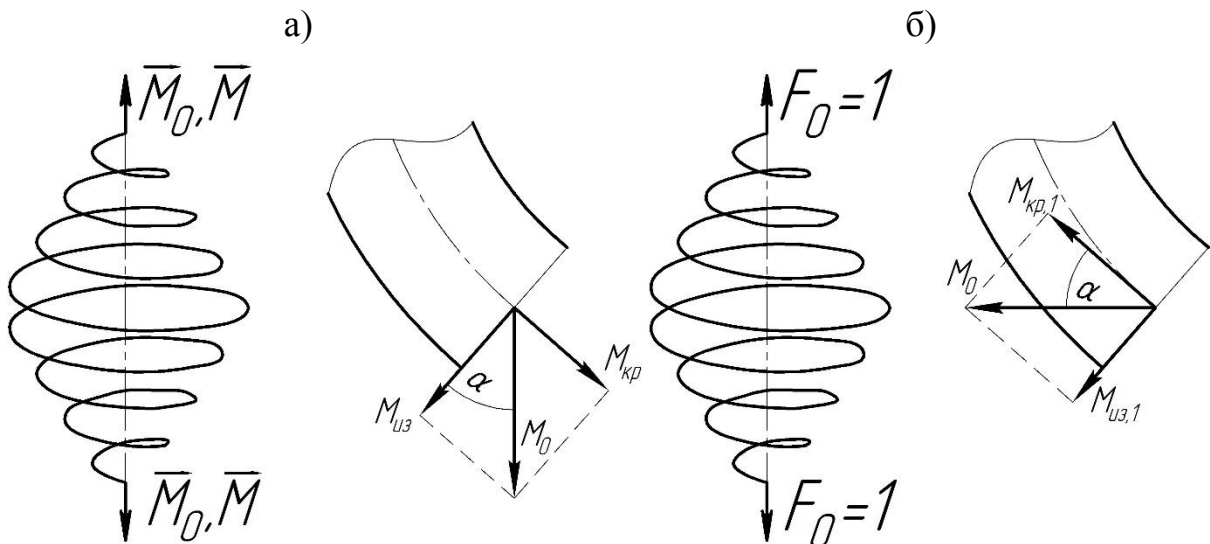


Рис. 16.6

Имеем:  $M_{из} = M \cdot \cos \alpha$ ;  $M_{кр} = M \cdot \sin \alpha$ ;  $M_{из,1} = 1 \cdot \cos \alpha$ ;  $M_{кр,1} = 1 \cdot \sin \alpha$ .

Для определения угла закручивания пружины получаем формулу

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_{из} \cdot M_{из,1} ds + \frac{1}{GJ_p} \int_0^l M_{кр} \cdot M_{кр,1} ds = \frac{Ml}{EJ} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{Ml}{GJ_p} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Кручение пружины сопровождается изменением её длины. Для определения этого изменения приложим к ней единичную безразмерную силу  $F_0 = 1$  и вычислим соответствующий изгибающий и крутящий моменты (рис. 16.6, б).

Имеем:  $M_{из,1} = R \cdot \sin \alpha$ ;  $M_{кр,1} = R \cdot \cos \alpha$ .

Для определения удлинения пружины кручения получаем формулу

$$\delta = \frac{1}{2} M R l \sin 2\alpha \left( \frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p} \right)$$

Рассмотрим теперь пружину изгиба, находящуюся под воздействием момента  $\vec{M}$  и вычислим в сечениях её витков изгибающий и крутящий моменты (рис. 16.7).

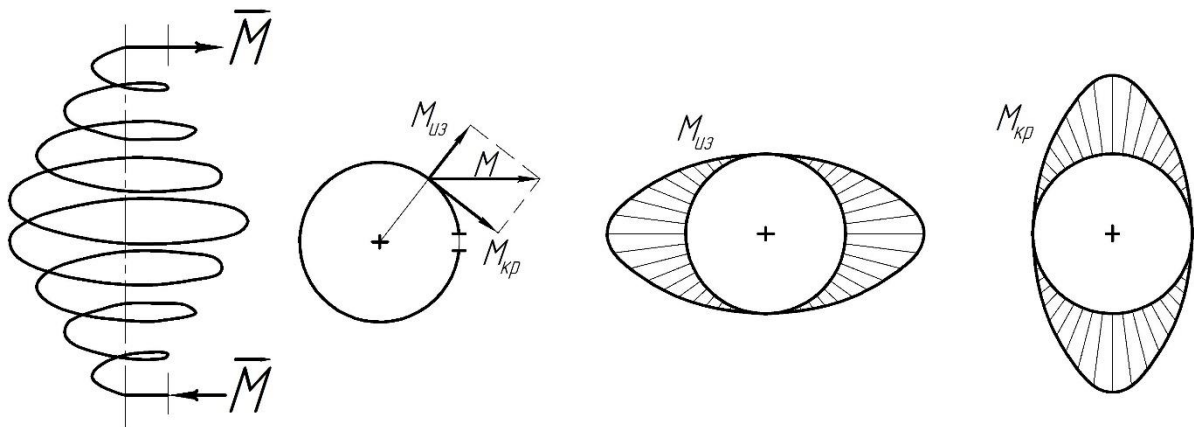


Рис. 16.7

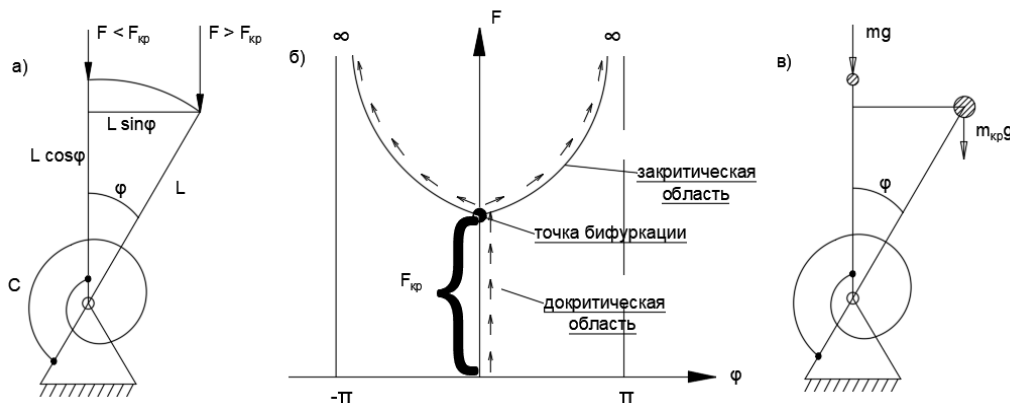
Имеем:  $M_{из} = M \cdot \cos \varphi$ ;  $M_{кр} = M \cdot \sin \varphi$ .

Эпюры этих моментов показаны на рис. 16.7. Дальнейшие вычисления теперь можно сделать по аналогии рассмотренных выше расчётов пружин растяжения и кручения.

## Лекция 17. Расчеты на устойчивость при сдвиге

**Устойчивость** - способность конструкций сохранять при нагружении первоначальную форму равновесия. Нагрузки, при которых появляются новые формы равновесия, называются критическими и обозначаются как  $F_{кр}$ . Определение этих нагрузок является основной задачей расчета конструкций на устойчивость.

Для примера рассмотрим жесткий стержень, упруго закрепленный в заделке и нагруженный силой  $F$  (рис.5.1,а).



**Рис.5.1 К понятию об устойчивости конструкций**

При малых нагрузках стержень сохраняет первоначальную вертикальную форму равновесия, а при критической нагрузке  $F_{кр}$  он поворачивается и появляется новая наклонная форма равновесия. Для определения этой нагрузки можно использовать различные методы.

### 1. Метод уравнений равновесия.

Условие равновесия стержня в момент потери устойчивости можно записать как

$$F_{кр} l \sin \varphi = c \varphi$$

где  $c$  - жёсткость пружины.

При малом  $\varphi \neq 0$  (т.е. при потере устойчивости) получаем

$$F_{кр} = c \varphi$$

При  $F > F_{кр}$  кривеем

$$F = F_{кр} \sin \varphi$$

График этой функции представлен на рис. 5.1, б. При  $F < F_{кр}$  кривеем докритическое нагружение стержня, при  $F > F_{кр}$  - закритическое его нагружение, при

котором угол наклона стержня возрастает. Точка перехода в новое положение равновесия называется точкой бифуркации.

## 2. Энергетический метод

При повороте стержня сила  $F_{кр}$  совершает работу, равную энергии деформации пружины. Отсюда получаем равенства:

$$F_{кр}l(1-\cos\theta) = \frac{c}{2}l^2(1-\cos\theta)^2$$

Отсюда следует, что  $F_{кр} = cl$ .

## 3. Динамический метод

Свободные колебания расположенной сверху массы  $m$  описывается уравнением (рис. 5.1, в)

$$J\ddot{\theta} + mgl - c\theta = 0$$

$$\text{или } \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

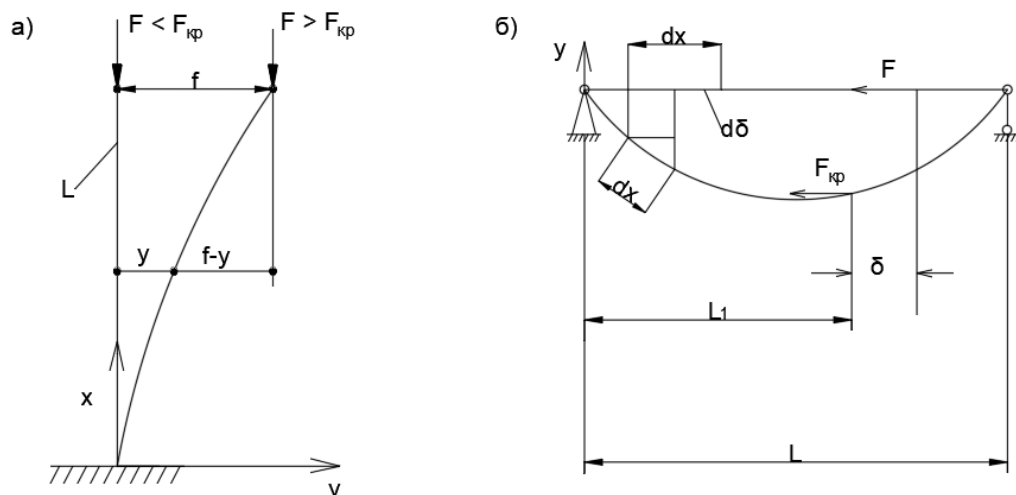
где квадрат частоты свободных колебаний  $\omega^2 = 1/J(mgl - c)$ ,  
 $J$  - момент инерции массы  $M$  относительно т. О.

Из условия  $\omega = 0$ , т.е. из условия потери устойчивости, находим критическую массу  $M_{кр}$  и соответствующую ей силу  $F_{кр} = M_{кр}g = cl$

Все три метода расчета привели к одинаковым результатам по определению критических сил.

## 4. Устойчивость гибких стержней

Рассмотрим теперь гибкий упругий стержень длиной  $l$  и жёсткостью  $EJ$ , нагруженный силой  $F$  и показанный на рис. 5.2, а.



### Рис.5.2. К расчету упругих стержней на устойчивость

При  $F > F_{кр}$  стержень перейдет к новой форме равновесия - изгибу.  
Для момента потери устойчивости дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$EJy'' = M = F_{кр} EJ$$

$$\text{или } y'' + K^2 y = K^2 f, \quad (5.1),$$

$$\text{где } K^2 = F_{кр} EJ$$

Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$y(x) = f(1 - \cos kx)$$

Из граничных условий:  $y(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$ , находим:  $A = 0$ ,  $B = -f$

$$y(x) = f(1 - \cos kx)$$

Из граничного условия  $y(l) = f$  находим:

$$\cos kl = 0, \quad kl = 2(2n-1), \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$F_{кр} = 2EJ \frac{\pi^2}{l^2} \quad \text{при } n=1$$

Для определения критических сил в сложных случаях нагружения стержня используется энергетический метод расчета.

Решим этим методом задачу, представленную на рис. 5.2, б. Смещение силы  $F_{кр}$  при потере устойчивости обозначим как  $\Delta$ . Работа этой силы будет равна потенциальной энергии изгиба стержня. Отсюда имеем равенства:

$$F_{кр} \Delta = \int_0^l M^2 dx \cdot 2EJ \quad (5.2),$$

$$\text{где } M = EJy''; \quad d = dx(1 - \cos y'') = dx(1 - (1 - y'^2)) = 2(y')^2 dx$$

$$= 2 \int_0^l (y')^2 dx$$

Подставив выражения для  $M$  и  $d$  в формулу (5.2), найдем

$$F_{кр} = \frac{\int_0^l EJ(y'')^2 dx}{2 \int_0^l (y')^2 dx} \quad (5.3)$$

Если ориентировочно принять  $y = \sin kx$ , то при  $l = \frac{\pi}{2}$  получим

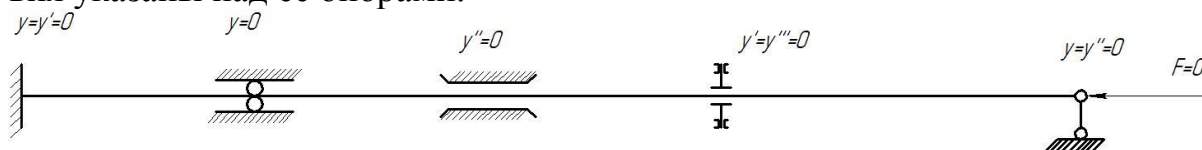
$$F_{кр} = 2EJ \frac{\pi^2}{l^2}$$

Основная трудность в практическом использовании формулы (5.3) состоит в определении функции  $y=f(x)$ , которая в расчетах ориентировочно принимается в виде полинома

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

в котором  $a_n=1$ , а остальные  $n$  констант определяются из  $n$  граничных условий.

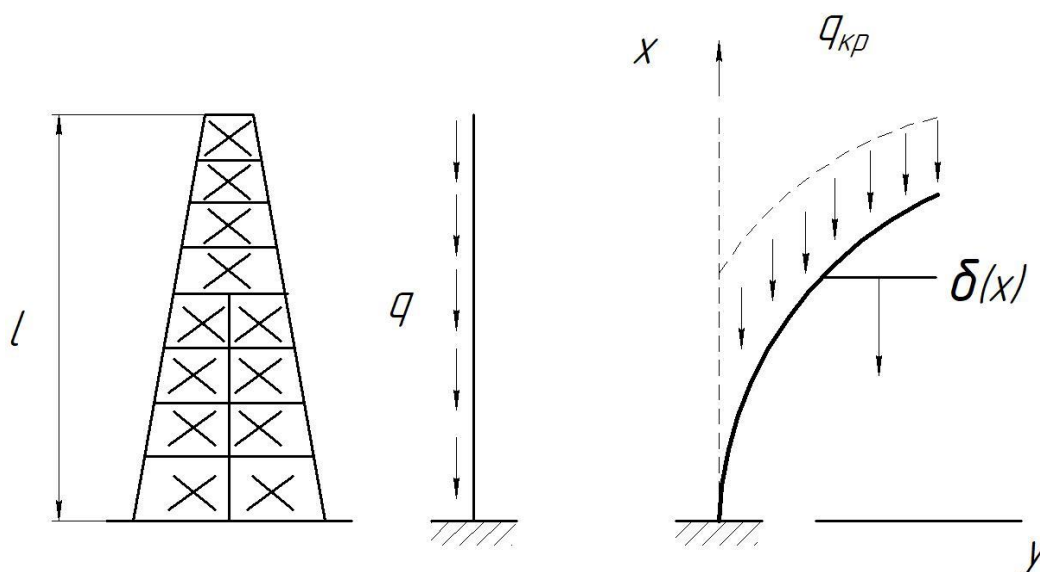
Применительно к конструкции, показанной на рисунке 5.3, граничные условия указаны над ее опорами.



**Рис. 5.3** К определению граничных условий

Контрольные задачи

Задача 1. Для высотного сооружения требуется найти критическую распределенную нагрузку  $q_{кр}$ , обусловленного её собственным весом.



Решение. Форму изгиба при потере устойчивости примем в виде

$$y(x)=1-\cos x/2l$$

Потенциальная энергия будет

$$П=120lEJ(y'')^2dx=14EJl(2l)^4 \quad \text{проверить}$$

Перемещение в т. с координатой  $x$  будет

$$(x)=120x(y')^2dz=14(2l(x-1\sin x/l))$$

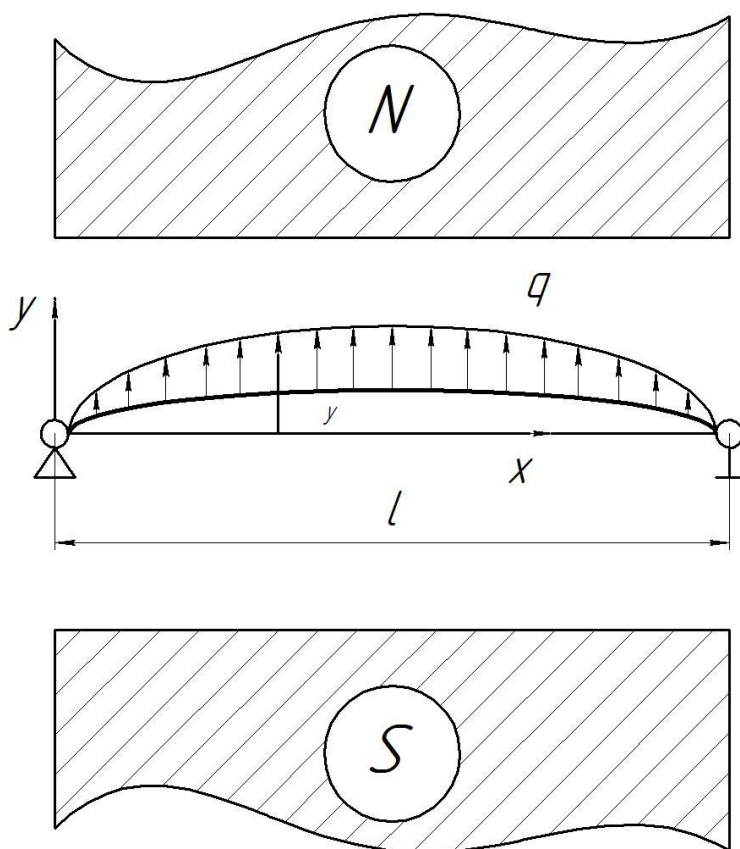
а работа сил  $q_{кр}$  будет

$$A = 0.1 q_{кр}(x) dx = 1.4 q_{кр} (2l)^2 (1.22 - 2l^2)$$

Из условия  $A = \Pi$  находим

$$q_{кр} = EJ^2 / 342.4$$

**Задача 2.** Упругий стержень находится между полюсами магнита. Распределенная сила притяжения к ним  $q = ky$ , где коэффициент, зависящий от напряженности магнитного поля. При каком  $k$  стержень изогнется, потеряет устойчивость?



**Рис. 5.5**

Решение:

Дифференциальное уравнение изгиба стержня имеет вид

$$EJy^{IV} = ky$$

или  $y^{IV} - 4y = 0$ , где  $4 = k/EJ$

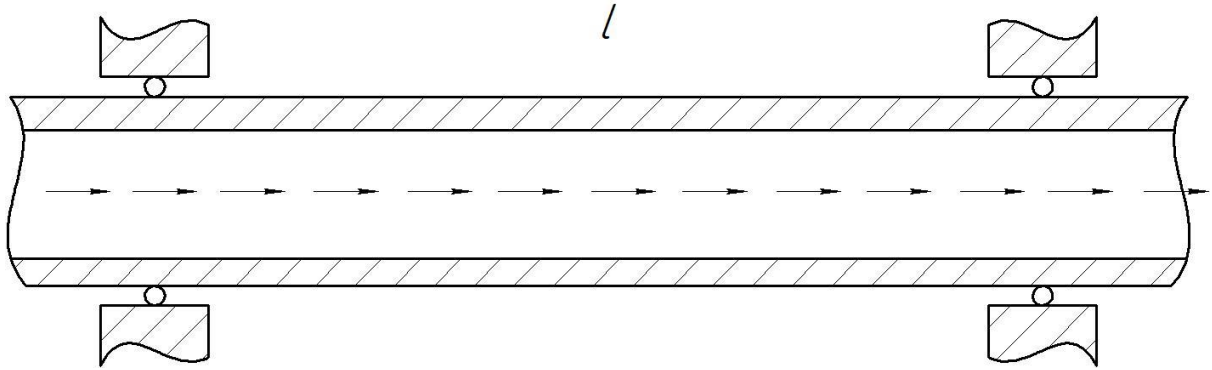
Можно принять

$$y = \sin x$$

При  $x=0$  и  $x=l$  имеем  $y=0$ . Отсюда следует, что  $l = \pi$  и  $k_{крит} = EJ / 4l^4$



Задача 3. Определить критическую скорость протекания жидкости по трубопроводу, показанном на рис. 5.6.



**Рис. 5.6**

Решение: При изгибе трубки в момент потери устойчивости возникает центробежная распределенная сила инерции

$$q = \rho v^2 y''$$

где  $\rho$  - распределенная масса трубы,  $v$  - скорость движения жидкости,  $R$  - радиус кривизны трубки в момент потери устойчивости,  $y(x)$  - прогиб трубы. Дифференциальное уравнения изгиба имеет вид

$$EJy'''' + \rho v^2 y'' = 0$$

или

$$z'' + 2z = 0, \text{ где } z = y'' = \sin x, \text{ где } 2 = \rho v^2 EJ$$

Из граничных условий: при  $x=0$   $y=0$ , при  $x=l$   $y=0$  получаем

$$l =$$

$$v_{кр} = \sqrt{EJ}$$

