Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

А.С. Гусев

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ,УСТОЙЧИВОСТЬ И УСТАЛОСТЬ

Цель расчета – ПОНИМАНИЕ
и число

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана

2019

Оглавление

Предисловие 3
Лекция 1. Основные понятия и задачи сопротивления материалов 4
Лекция 2. Растяжение и сжатие стержней 8
Лекция 3. Механические характеристики материалов 13
Лекция 4. Расчеты на прочность и жесткость стержней при растяжении и сжатии 17
Лекция 5. Расчеты на прочность при сдвиге 20
Лекция 6. Кручение круглых стержней 24
Лекция 7. Кручение некруглых стержней 29
Лекция 8. Геометрические характеристики плоских сечений 32
Лекция 9. Прямой чистый изгиб балок 36
Лекция 10. Поперечный изгиб балок 41
Лекция 11. Определение перемещений при изгибе по методу Мора и Верещагина. 45
Лекция 12. Расчеты на прочность и жесткость при сложном нагружении 47
Лекция 13. Энергетические теоремы о перемещениях 52
Лекция 14. Расчёты на прочность при сложном напряженном состоянии 55
Лекция 15. Расчет статически неопределимых систем изгиба 69
Лекция 16. Расчет пружин 71
Лекция 17. Расчеты на устойчивость 75
Лекция 18. Расчеты на сопротивление усталости 84
Лекция 19. Расчеты на ударные воздействия. 91
Лекция 20. Продольно-поперечный изгиб балок…….....

Цель расчета - понимание
и число

Предисловие

Настоящее учебное пособие представляет собой краткий конспект лекций, прочитанных автором в различные годы студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана, МГТУ МАДИ и МГТУ МАМИ, обучающихся по различным инженерным специальностям. Оно соответствует программам курсов «Сопротивление материалов» и «Прикладная механика».

В результате обучения студент должен **знать**:

- закономерности деформирования твердых тел (законы Гука и Пуассона), механические характеристики материалов в виде диаграмм деформирования, диаграмм ползучести и релаксации напряжений и закономерности деформирования элементов конструкций с трещинами;
- принципы разработки расчетных схем для современных машин, конструкций, оборудования и приборов;
- методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и сопротивление усталости;
- основные понятия и термины, используемые при создании новых конструкций с заданными требованиями по надежности и долговечности.

Студент должен **уметь**:

- решать задачи по оценке прочности, жесткости, устойчивости и долговечности элементов конструкций;
- находить для элементов конструкций наиболее рациональные для них размеры и формы;
- пользоваться таблицами ГОСТ и другими справочными материалами при расчетах;
- использовать особенности различных материалов для создания машин и конструкций с заданными требованиями прочности и экономичности.

В компетенции обучающихся входит круг вопросов, связанных с созданием современных машин, конструкций и приборов, отвечающих требованиям надежности, долговечности и безопасности в эксплуатации.

Цель преподавания курса «Сопротивление материалов» состоит в формировании у студентов инженерного мышления в области прочности, жесткости, устойчивости и усталости элементов конструкций машин и приборов на относительно простых расчетных схемах стержней, пластин и оболочек.

Лекция 1. Основные понятия и задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов – это учебная дисциплина втузов, в которой изучаются основы инженерных методов расчета прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций. Под элементом конструкции понимается любая деталь машины, устройства или сооружения, которая рассматривается без учета особенностей изготовления, условий работы, качества поверхности и других подобных факторов, и в которой на первый план ставится ее геометрическая форма и вид нагружения. Влияние других факторов на прочность реальных деталей может оказаться решающим, однако учет этих факторов при проектировании и расчете рассматриваются в специальных курсах по конструированию и технологии изготовления конструкций.

Под прочностью понимается способность элементов конструкции не разрушаться под воздействием приложенных нагрузок. Под жесткостью – способность сохранять при этом свои размеры и форму. Под устойчивостью – способность сохранять первоначальную форму равновесия.

Сопротивление материалов строится на ряде допущений (гипотез) о свойствах материалов и на ряде упрощающих принципов, положенных в основу расчетов. Так, принимается гипотеза о сплошности материала, по которой считается, что материал не имеет пустот и других внутренних дефектов. По другой гипотезе (гипотезе изотропности) считается, что свойства материала во всех направлениях одинаковы. В расчетах применяются три основных принципа: принцип независимости действия сил, принцип Сен-Венана и принцип первоначальных размеров. По первому из этих принципов считается, что результат суммарного действия нескольких нагрузок равен сумме результатов действия каждой нагрузки в отдельности. Согласно второму принципу локальные особенности деформирования материала в местах приложения нагрузок быстро затухают по мере удаления от этих мест. Согласно третьему принципу считается, что реакция связей и внутренние усилия в элементах конструкций могут быть достаточно точно определены без учета изменения размеров и форм конструкции при нагружении.

Объектами изучения в сопротивлении материалов являются стержни (балки), оболочки и пластины. Стержень (балка) – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (длина) значительно превышает два других. Форма сечений стержней может быть различной. На рис. 1.1а показаны сечения в виде квадрата, круга, двутавра, швеллера и тавра. Возможны различные комбинации этих элементарных сечений. Оболочка – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (толщина) значительно меньше двух других (рис. 1.1, б). Пластина – оболочка, у которой кривизна равна нулю (рис. 1.1, в).

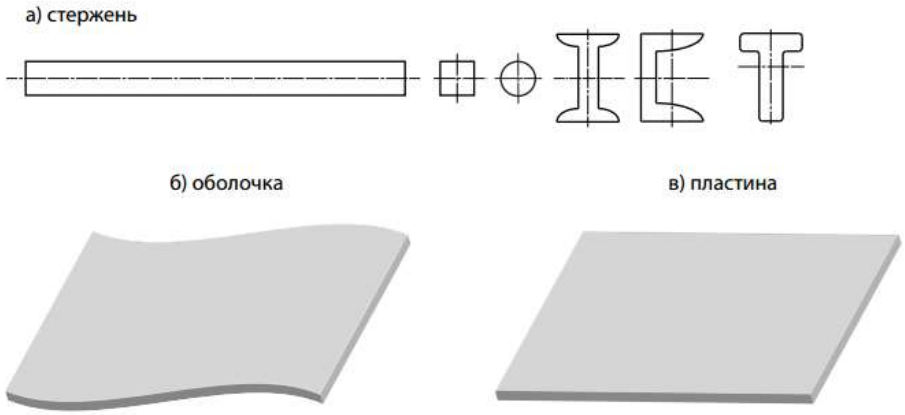


Рис. 1.1

Основным понятием в сопротивлении материалов является понятие о напряжениях. Оно вводится следующим образом. Рассмотрим некоторый элемент конструкции, находящийся под воздействием внешних нагрузок (рис. 1.2, а). Мысленно отделим сечением I-I одну его часть от другой (рис. 1.2, б). Для равновесия каждой из этих частей необходимо, чтобы в сечении возникли такие силы, которые были бы эквивалентны приложенным к ним внешним нагрузкам. При этом в каждой элементарной площадке ΔA сечения возникает элементарная сила ΔF.

Величина

$$S = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

называется полным напряжением в точке. Это напряжение измеряется в паскалях – Па или мегапаскалях – МПа:

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \qquad \text{МПа} = 10^6\ \text{Па}$$

Полное напряжение в точке (см. точку А на рис. 1.2в) можно разложить на две составляющие: нормальное напряжение σ и касательное τ.

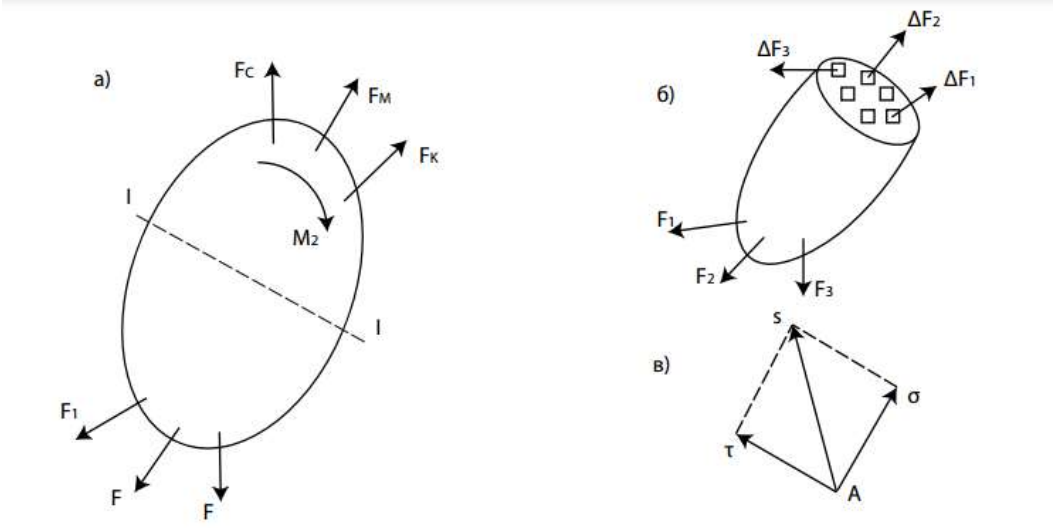


Рис. 1.2

Важнейшим понятием в сопротивлении материалов является понятие о внутренних силовых факторах. Оно вводится с помощью метода сечений, при котором элемент конструкции мысленно рассекается на две части. В каждой из частей все внутренние силы приводятся к одной вектор-силе $\vec{F}$, приложенной в центре тяжести сечения, и вектор-моменту $\vec{M}$ (рис. 1.3, а). Поместим в центр тяжести сечения систему координат $\{x, y, z\}$ и разложим $\vec{F}$ и $\vec{M}$ на составляющие: $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ (рис. 1.3, б). Эти составляющие называются внутренними силовыми факторами.

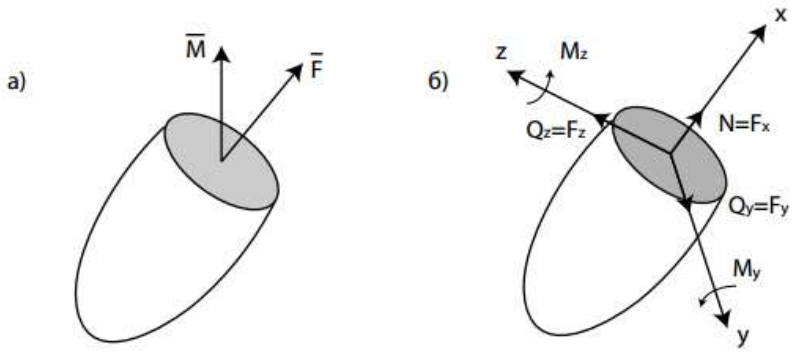


Рис. 1.3

Сила $F_x = N$ называется нормальной силой (силой растяжения или сжатия). Силы $F_y = Q_y$ и $F_z = Q_z$ – силами сдвига. Момент $M_x = M_{\text{кр}}$ – крутящим моментом. Моменты M_y и M_z – изгибающими моментами.

Для определения внутренних силовых факторов достаточно составить и решить шесть уравнений равновесия для любой из отсеченных частей элемента конструкции.

Нагружение стержня называется простым, если в его сечениях возникает только один силовой фактор. В противном случае нагружение называется сложным.

Простыми видами нагружения являются: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и изгиб. К сложным нагружениям относятся: изгиб с растяжением, изгиб с кручением и т.п.

Для примера рассмотрим определение силовых факторов в сечениях витков пружины растяжения с углом подъема винтовой линии α, показанной на рис. 1.4.

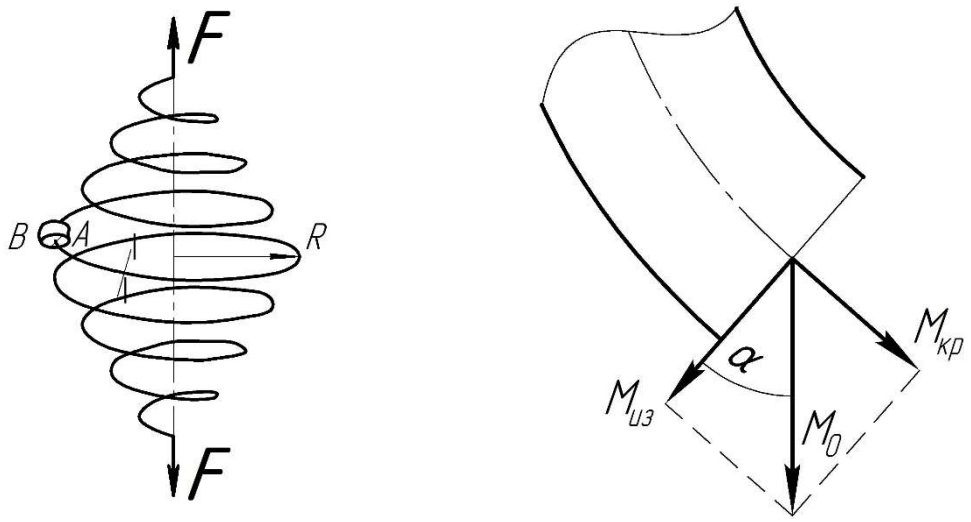


Рис.1.4

Разложив вектор-силу $\vec{F}$ и вектор-момент $\vec{M}$ в сечении пружины на составляющие, получим:

$$Q = F\cos\alpha$$
$$N = F\sin\alpha$$
$$M_{\text{кр}} = M\cos\alpha = FR\cos\alpha$$
$$M_{\text{из}} = FR\sin\alpha$$

где R – радиус пружины, соответствующий рассматриваемому сечению.

Контрольные задачи

<u>Задача 1.</u> По концам разреза кольца в его плоскости приложены две силы F (рис. 1.5). Определить внутренние силовые факторы в сечениях кольца.

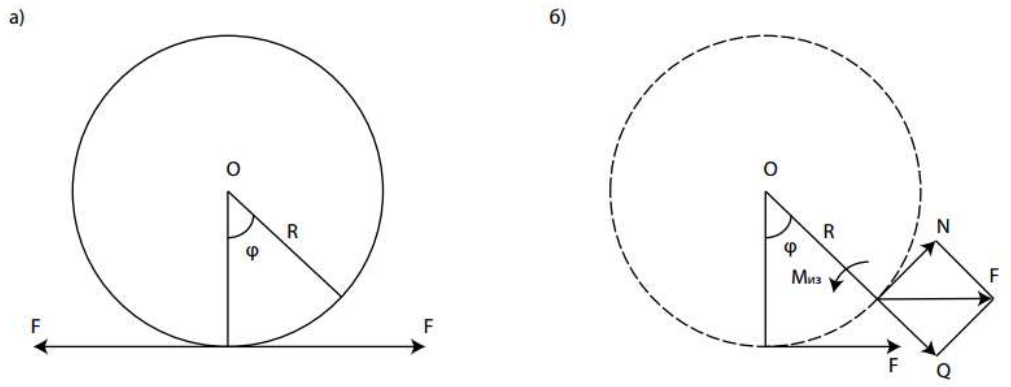


Рис. 1.5

<u>Решение.</u> Из условий равновесия части кольца, показанного на рис. 1.5, б, следует:

$Q = F\sin\varphi$ $\qquad$ $\max Q = F$, при $\varphi = {}^{\pi}/_{2}$

$N = -F\cos\varphi$ $\qquad$ $\min N = -F$, при $\varphi = 0$ $\qquad$ $\max N = F$, при $\varphi = \pi$

$M_{\text{из}} = Fh = FR(1-\cos\varphi)$ $\qquad$ $\max M_{\text{из}} = 2FR$, при $\varphi = \pi$

<u>Задача 2.</u> По концам разреза кольца перпендикулярно его плоскости приложены две силы F (рис. 1.6, а). Определить внутренние силовые факторы в сечениях кольца.

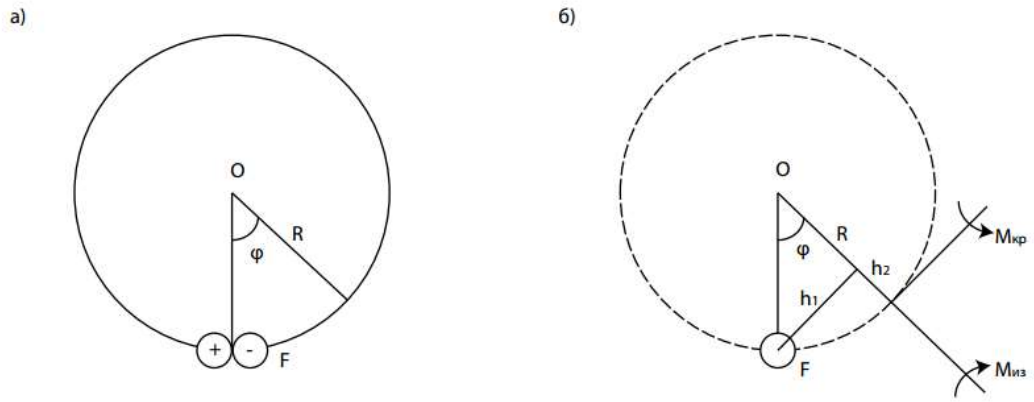


Рис. 1.6

<u>Решение.</u> Из условий равновесия части кольца, показанного на рис. 1.6, б, следует:

$M_{\text{из}} = Fh_1 = FR\sin\varphi$ $\qquad$ $\max M_{\text{из}} = FR$, при $\varphi = {}^{\pi}/_{2}$

$M_{\text{кр}} = Fh_2 = FR(1-\cos\varphi)$ $\qquad$ $\max M_{\text{кр}} = 2FR$, при $\varphi = \pi$

Лекция 2. Растяжение и сжатие стержней

1. Анализ напряженного состояния

Рассмотрим растянутый силами F стержень с переменной площадью сечений A, показанный на рис.2.1а. Сечениями (1-1) и (2-2) разделим его на три части, каждая из которых находится в равновесии под действием внешних сил F и внутренних усилий с интенсивностями (напряжениями)

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} > \sigma_2 = \frac{F}{A_2} \text{при} A_2 > A_1$$

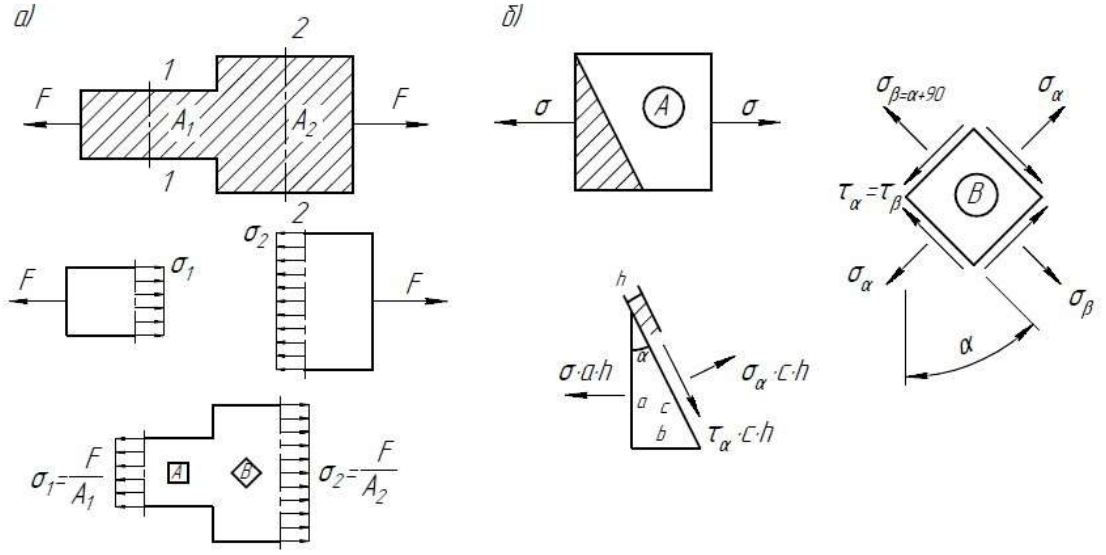


Рис.2.1 Анализ напряженного состояния

Напряженное состояние элементарных разно расположенных квадратов А и В показаны на рис.2.1, б. Определим напряжения$\sigma_\alpha, \sigma_{\beta=\alpha+9}$, τ_αи$\tau_{\beta=\alpha+9}$ по заданному напряжениюσ и углуα.

Элементарная треугольная призма со сторонамиa, b, cи толщиной h находится в равновесии под действием сил σah,$\sigma_\alpha ch$, $\tau_\alpha ch$. Из условий ее равновесия получаем формулы для определения напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha, \tau_\beta$:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \,; \sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \tau_\beta = \frac{1}{2}\sigma \cdot \sin 2\alpha, \; \tau_{max} = \tau_{45^\circ} = \frac{1}{2}\sigma$$

2. Законы Гука и Пуассона

Экспериментально установлено, что при растяжении стержня происходит изменение его линейныхl, h, b размеров и объёма V, т.е. стержень деформируется, схематично так, как это показано на рис.2.2.

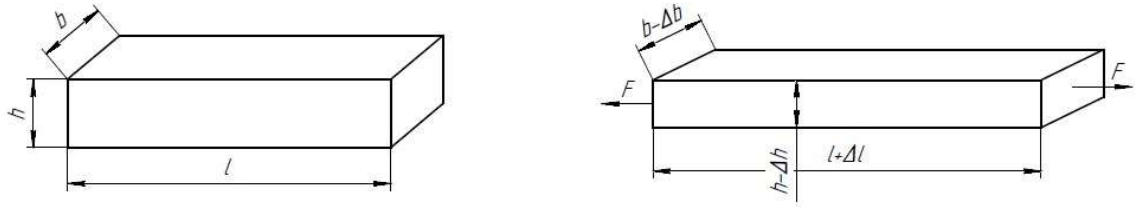


Рис.2.2. Деформации стержня при растяжении

Величины Δl, Δh, Δbназываются абсолютными линейными деформациями, ΔV - абсолютной объемной деформацией.
Величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\ ;\ \varepsilon_{\text{п}} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}\ ;\ \varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$$

называются относительной продольной деформацией, относительной поперечной деформацией и относительной объемной деформацией, соответственно.
Экспериментально установлено, что при малых деформациях имеют место следующие зависимости.
Закон Гука: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (2.1)
Закон Пуассона: $\varepsilon_{\text{п}} = -\mu\varepsilon = -\mu \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (2.2)
Величина E называется модулем упругости, величина μ- коэффициентом Пуассона. Легко вычислить, что$\varepsilon_v \approx \varepsilon(1 - 2\mu)$. (2.3)
Для стали$E = 2 \cdot 10^5$МПа, $\mu = 0{,}28$.
Для меди$E = 1 \cdot 10^5$МПа, $\mu = 0{,}33$.
Для алюминия$E = 0{,}7 \cdot 10^5$МПа, $\mu = 0{,}35$.
При нагревании стержня длинойl на$t°$градусов происходит его удлинение на величину

$$\Delta l_t = \alpha l t,$$

гдеα - коэффициент линейного расширения.
Соответственно изменяются размеры стержняh, b иего объём V.
Для стали$\alpha_{\text{ст}} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}/_{\text{град}}$.
Для меди$\alpha_{\text{м}} = 1{,}67 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}/_{\text{град}}$.
Для алюминия$\alpha_{\text{а}} = 2{,}3 \cdot 10^{-5}\ {}^{1}/_{\text{град}}$.
Коэффициент объемного расширения$\beta = 3 \cdot \alpha$.

<u>3. Определение перемещений и потенциальной энергии деформации в растянутом стержне</u>

Рассмотрим защемленный слева стержень с переменной площадью сеченияA и переменным модулем упругости E, показанный на рис.2.3.

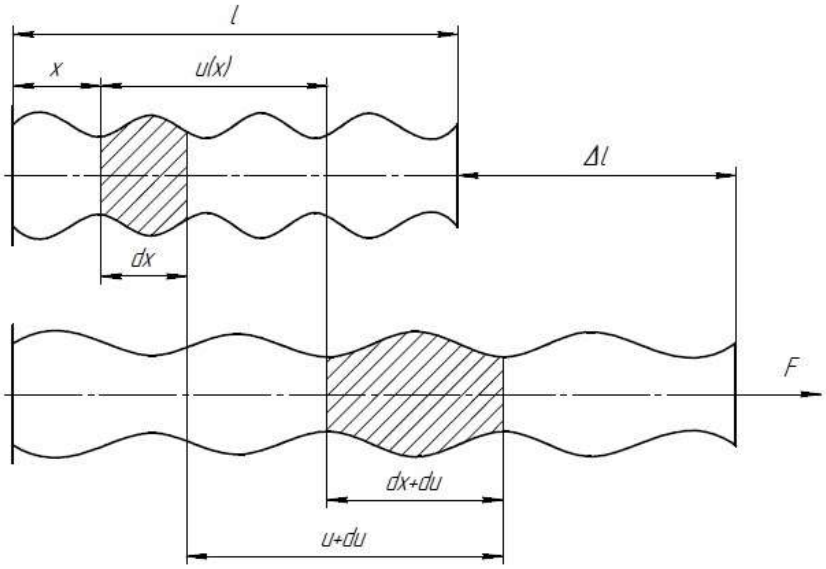


Рис. 2.3 К определению перемещений

Искомое перемещение сечения с координатой x обозначим$u(x)$. Перемещение сечения с координатой $x + dx$ будет$u + du$. Из рисунка и закона Гука видно, что деформацию элемента dx можно определить как

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{EA}$$

Отсюда находим:

$$u(x) = \int_0^x \frac{F}{EA} dx; u(0) = 0; u(l) = \Delta l = \int_0^l \frac{F}{EA} dx$$

Потенциальная энергия деформации $d\Pi$ в элементе длиной dx будет определяться по формуле

$$d\Pi = \frac{1}{2} F du = \frac{F^2 dx}{2EA}$$

а энергии на длинах x и l будут

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{F^2 dx}{2EA} dx, \qquad \Pi(l) = \int_0^l \frac{F^2 dx}{2EA} dx$$

Если подынтегральные функции в приведенных формулах есть константы, то имеем:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}; \Pi = \frac{F^2 l}{2EA}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial F} = u(x); \qquad \frac{\partial \Pi(x)}{\partial u} = F(x)$$

Первая формула выражает теорему Кастилиано о перемещениях, а вторая - теорему Лагранжа о силах.

В заключение отметим, что приведенные выше формулы относятся к идеальным бездефектным стержням, не имеющим концентраторов напряжений, таких как отверстия и резкие изменения формы, показанные на рис. 2.4.

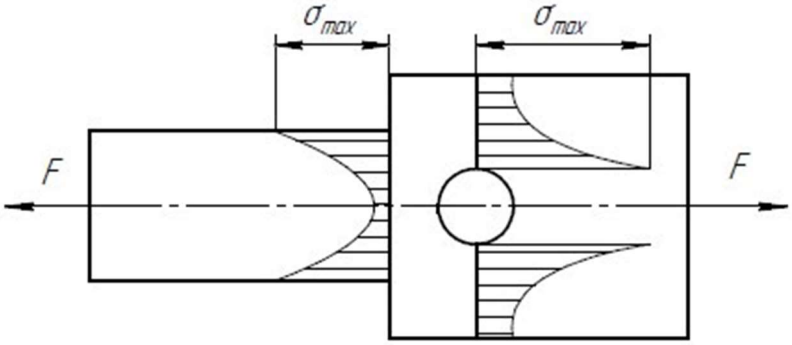


Рис. 2.4. К понятию о концентрации напряжений

Экспериментально установлено, что в этих местах происходит местное увеличение (концентрация) напряжений, которые могут превышать расчетные значения в несколько раз.

Контрольные задачи

<u>Задача 1.</u> В растянутом стержне найти расположение линии (угол α), вдоль которой деформация $\varepsilon_\alpha = 0$, а напряжение$\sigma_\alpha \neq 0$ и найти расположение линии (угол β), вдоль которой напряжение $\sigma_\beta = 0$, а деформация $\varepsilon_\beta \neq 0$(рис. 2.5).

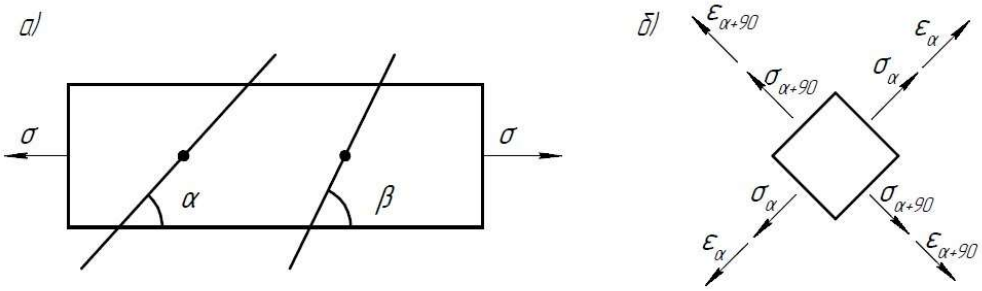


Рис. 2.5 К решению задачи 1

В соответствии с изображенным на рис. 2.5, б напряженно-деформированным состоянием точек стержня и законами Гука и Пуассона имеем равенства:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}\sigma_\alpha - \mu\frac{\sigma_{\alpha+90}}{E} = \frac{\sigma}{E}cos^2\,\alpha - \mu\frac{\sigma}{E}sin^2\,\alpha = 0.$$

Отсюда получаем

$$ctg^2\,\alpha = \mu \text{ и при } \mu = 0{,}3 \text{ имеем } \alpha = 61°.$$

При этом$\sigma_\alpha = \sigma\,cos^2\,\alpha \approx 0{,}23\sigma \neq 0$.

На линии, определяемой углом β, имеем

$$\sigma_\beta = \sigma\,cos^2\,\beta \text{ и при } \beta = 90° \text{ имеем } \sigma_\beta = 0.$$

Деформация

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E}\sigma_\beta - \mu\frac{\sigma_{\beta+90}}{E} = \frac{\sigma}{E}cos^2\,\beta - \mu\frac{\sigma}{E}sin^2\,\beta = -\mu E \neq 0.$$

Таким образом, в вертикальном направлении$\sigma = 0$, а$\varepsilon \neq 0$. Вдоль линии с углом наклона $\alpha = 61°$ имеем $\varepsilon = 0$, а $\sigma \neq 0$.

<u>Задача 2.</u> При растяжении стержня энергия деформации в единице объёма определяется как

$$\Pi = \frac{1}{2}\cdot\sigma\cdot\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$

При этом происходит изменение объема стержня и изменение его формы, так что

$\Pi = \Pi_V + \Pi_\Phi$,

где Π_V- потенциальная энергия изменения объёма, Π_Φ – потенциальная энергия изменения формы.

Требуется составить формулы для определения Π_V и Π_Φ.

<u>Решение.</u>

Напряженное состояние элементарного объёма стержня состоит из напряженного состояния, приводящего к изменению объёма V и к изменению формы Ф (Рис.2.6).

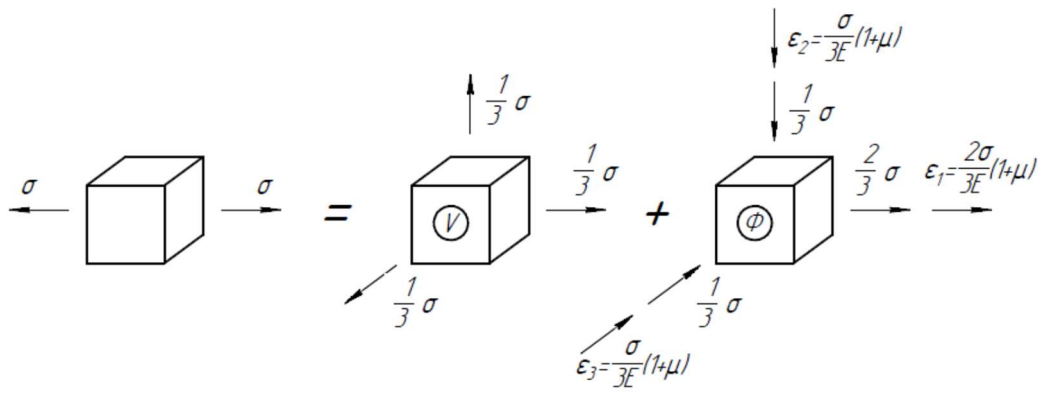


Рис.2.6 К решению задачи 2

В объёме Ф объёмная деформация $\varepsilon_V = (1-2\mu)\cdot\frac{\sigma}{E}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = 0$, так что здесь происходит только изменение формы с относительными деформациями

$\varepsilon_1 = \frac{2\sigma}{3E}\cdot(1+\mu)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\sigma}{3E}\cdot(1+\mu)$.

Тогда потенциальная энергия формы будет:

$$\Pi_Ф = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\varepsilon_i = \frac{\sigma^2}{3E}\cdot(1+\mu) \qquad (2.4)$$

Потенциальная энергия изменения объема:

$$\Pi_V = \Pi - \Pi_Ф = \frac{\sigma^2}{6E}\cdot(1-2\mu) \qquad (2.5)$$

Лекция 3. Механические характеристики материалов

Механические характеристика материалов определяются при испытании образцов на растяжение и сжатие. При этом используются специальное испытательные машины, позволяющие одновременно фиксировать нагрузки и соответствующие им деформации образца. После пересчета опытных данных получают зависимость напряжений от деформации σ=f(ε), две из которых показаны на рис.3.1 со стр.15. Диаграмма I относится к малопрочному пластичному материалу, а диаграмма II – к высокопрочному материалу.
Отметим характерные зоны на диаграмме растяжения пластического материала. Зона ОА – зона упругости. Здесь выполняется закон Гука: напряжения пропорциональны деформациям. Если в некоторой точке этой зоны прекратить нагружения, а затем уменьшить нагрузку, то разгружение образца будет происходить по той же линии ОА. При нулевой нагрузке все размеры образца возвратятся к первоначальным. Зона АВ – зона общей текучести. Эта зона характеризуется тем, что увеличение деформации происходит почти без увеличения нагрузки. Если остановить нагружение в некоторой точке этой зоны, а затем уменьшить нагрузку, то разгружение будет происходить по линии, параллельной линии упругости ОА. После полного снятия нагрузки образец останется удлиненным на величину остаточной пластической деформации.
Зона ВС – зона упрочнения. Она характеризуется тем. Что увеличение деформации сопровождается возрастанием напряжений. Если прекратить нагружение в некоторой точке, этой зоны и затем уменьшить нагрузку, то разгружение будет так же происходить по линии, параллельной линии упругости ОА. Остаточная пластическая деформация обозначена ε_n. При повторном погружении образца возрастание нагрузки будет происходить по линии разгружения. В конце стадии упрочнения (в точке С) на образце появляется местное сужение («шейка») – место будущего разрушения. Зона СД – зона местной текучести и разрушения. Удлинение образца в этой зоне носит локальный характер. Оно происходит в основной области «шейки». Точка Д соответствует моменту полного разрушения образца.
В зоне упругости выполняется закон Гука $\sigma = \varepsilon E$, где модуль упругости первого рода Е определяется как тангенс угла наклона линии упругости к оси ε:

$$E=\mathrm{tg}\alpha \qquad (3.1)$$

Отметим основные механические характеристики материалов, определяемые по диаграмме растяжения.
σ_n- предел пропорциональности – наибольшее напряжение, при котором еще сохраняется линейная зависимость между напряжениями и деформациями.
σ_T – предел текучести – напряжение, при котором рост деформации происходит без заметного увеличения нагрузки.
(если материалы не обладают ярко выраженной зоной текучести (диаграмма II), то за условный предел текучести σ_{02}(или σ_{05}) принимаются напряжение, при котором остаточная пластическая деформация $\varepsilon_а$=0,2% (или, соответственно, 0,5%);
$\sigma_В$ – предел прочности – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке.
Описанные выше характеристики прочности относятся к материалам, не имеющим дефектов. В реальных материалах можно обнаружить трещины, пустоты, раковины, волосовины и другие дефекты. Наибольшую опасность представляют дефекты типа трещин, рост которых при циклическом нагружении приводит к полному разрушению конструкции. Характеристики трещиностойкости материала можно определить на образцах с трещинами. При этом к испытаниям подготавливают образцы с различными длинами трещин. При растяжении таких образцов в момент разрушения фиксируются предельные напряжения (рис.3.2 и рис.3.3. со стр.16). Различным длинам трещин соответствуют различные предельные напряжения.
По опытным данным строится зависимость предельного напряжения от длины трещин (рис.3.3). Опытные данные могут быть предоставлены в виде зависимости:

$$\sigma\sqrt{l} = const \qquad (3.2)$$

Отсюда следует, что для деталей с трещинами сами по себе уровень напряжений и длина трещины не определяют ее прочность. При уменьшении уровня напряжений можно допустить удлинение трещины и при уменьшении длины трещины – повышение уровня напряжений.

Для теоретического обоснования зависимости (3.2) заметим, что появление трещины приводит к образованию свободных от напряжений поверхностей и к соответствующей разгруженной зоне вокруг трещины. На появление новых поверхностей необходима затрата энергии, которая равна высвобождающейся энергии деформации из разгруженной зоны. Полагая, что (рис.3.4) зона разгрузки вокруг трещины имеет эллиптическую форму с площадью $\pi\, l^2$, получаем следующее уравнение, выражающее баланс энергии:

$$\frac{\pi\, l^2\, \sigma^3}{2E} = 2l\gamma, \qquad (3.3)$$

где γ – удельная поверхностная энергия.

Из соотношения (4.3) получаем равенство:

$$\sigma\sqrt{l} = \frac{2\sqrt{E\gamma}}{V\pi} = К_{IC}, \qquad (3.4)$$

из которого следует соотношение (3.2). Константа в уравнениях (3.2) и (3.4) называются вязкостью разрушения и обозначается через $К_{IC}$.

Условие трещиностойкости выражается неравенством

$$\sigma\sqrt{l} \le К_{IC}$$

Для стали Ст.3 имеем $К_{IC} = 30\ {}^{МПа}/_{м}$, т.е., например, для трещины длиной 0,01м допустимый уровень напряжений составляется 300МПа.

Исходя из формулы (3.4) можно оценить прочность идеального бездефектного металла, если за длину трещины принять расстояние между атомами $l = 1 * 10^{-8}$ см = 1 ангстрем.

Для стали примем γ=0,01 ${}^{Н}/_{см}$, $E = 2 * 10^7$Н / см^2. В этом случае получаем $\sigma_В = 2\sqrt{\frac{E\gamma}{\pi l}} \approx 50 * 10^3$МПа, что намного больше реального предела прочности.

Экспериментально установлено, что начальная деформация ε_0 нагруженного стержня изменяется со временем ориентировочно так, как это показано на рис.3.5. Это явление в технике называется ползучестью (от англ. creep), интенсивность которой с повышением напряжений возрастает.

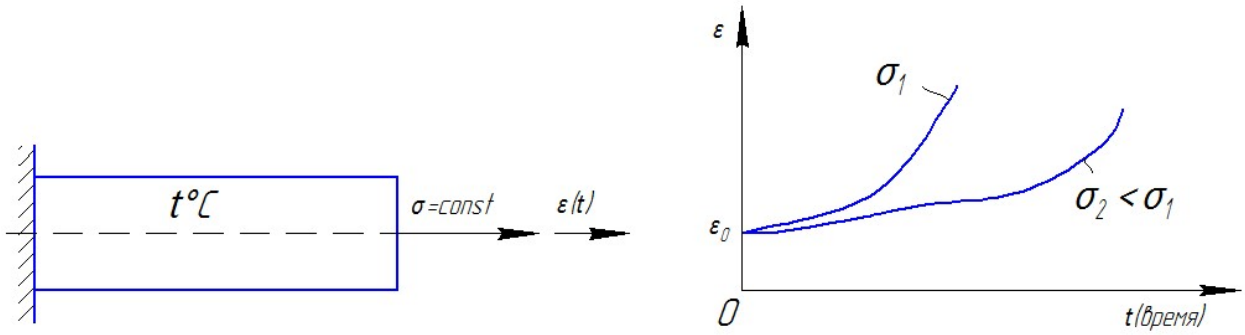


Рис 3.5 К понятию ползучести металлов

Экспериментально так же установлено, что начальное напряжение σ_0 в нагруженном стержне со временем изменяется ориентировочно так, как это показано на рис.3.6. Это явление в технике называется релаксацией напряжений (от англ. Relax), интенсивность которого зависит от температуры.

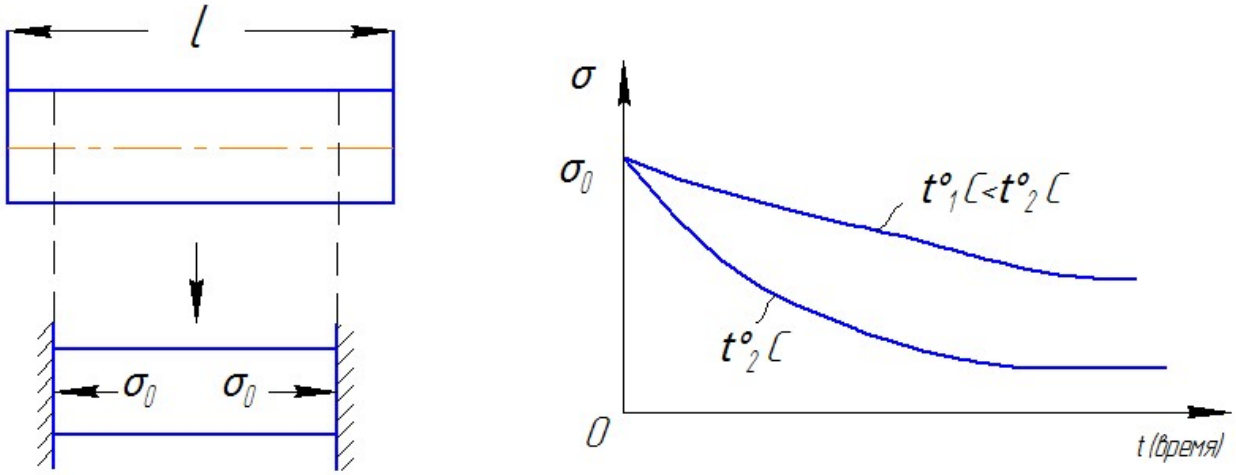


Рис.3.6 К понятию о релаксации напряжений

Экспериментально установлено, что с понижением температуры происходит охрупчивание металла и при -50°С предел текучести может уменьшиться в три раза.

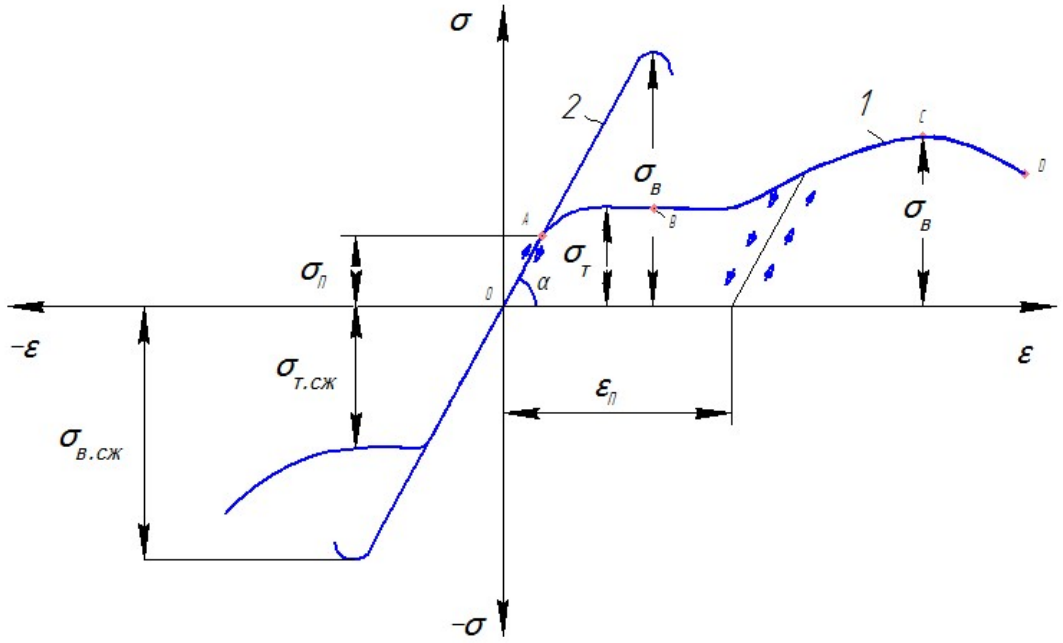


Рис.3.1

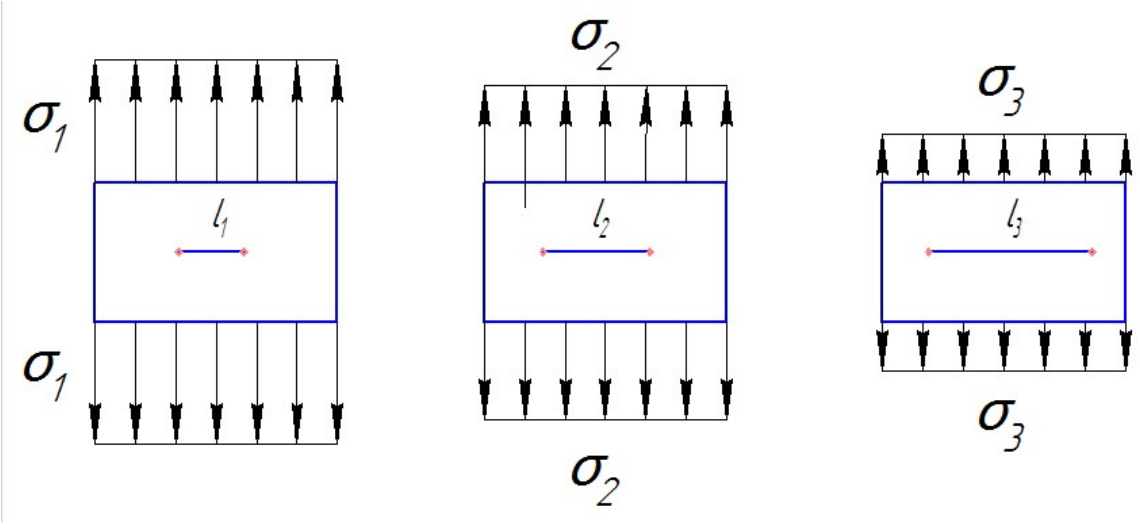


Рис.3.2

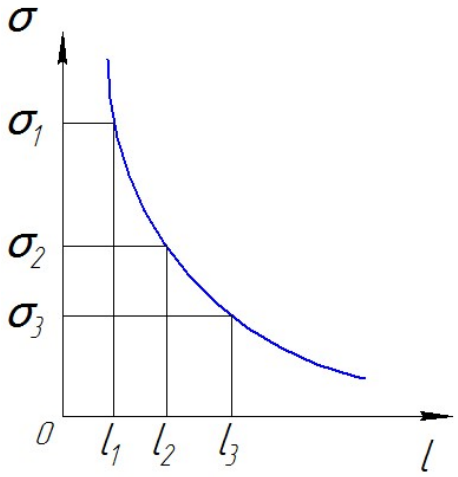


Рис.3.3

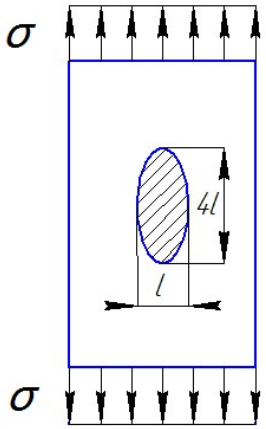


Рис3.4

Лекция 4. Расчеты на прочность и жесткость стержней при растяжении и сжатии

В расчетах на прочность и жесткость стержней используется схематизированная диаграмма растяжения-сжатия, показанная на рис 4.1

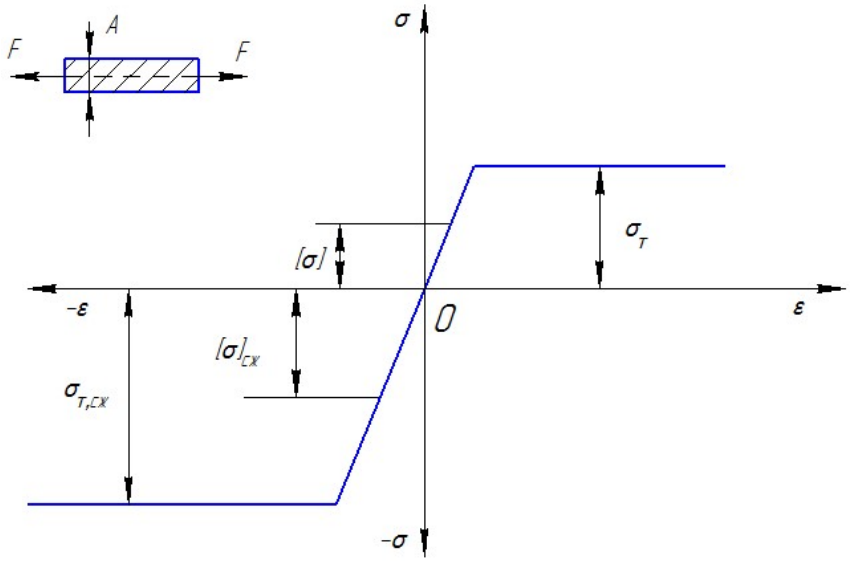


Рис.4.1. Схематизированная диаграмма растяжения сжатия

Здесь $\sigma_{\text{т}}$ и $\sigma_{\text{Т,сж}}$ - пределы текучести при растяжении и сжатии.
Условие ненаступления в растянутом стержне пластических деформаций имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\text{Т}}$$

Определяемая из этого условия предельная для стержня сила

$$F_{\text{пр}} = \sigma_{\text{Т}}\text{A}$$

Допускаемое для растянутого стержня напряжение определяется по формуле
$[\sigma]=\frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{т}}}$
, где $n_{\text{т}} = 1{,}5 - 3{,}0$ – коэффициент запаса прочности.
Из условия прочности
$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$
при заданных F и [σ] определяется необходимая площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}$$

При заданных $[\sigma]$ и A определяется допускаемая для стержня нагрузка

$$[F] \geq \text{A}[\sigma]$$

Для расчетов на жесткость используется условие жесткости
$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq [\Delta l] = \frac{\Delta l_{\text{пр}}}{n_{\text{ж}}}$,
где $\Delta l_{\text{пр}}$ - предельное удлинение стержня, $n_{\text{ж}}$ – коэффициент запаса жесткости, Δl- допускаемое удлинение стержня.
Для примера рассмотрит стержневую систему, показанную на рис.4.2

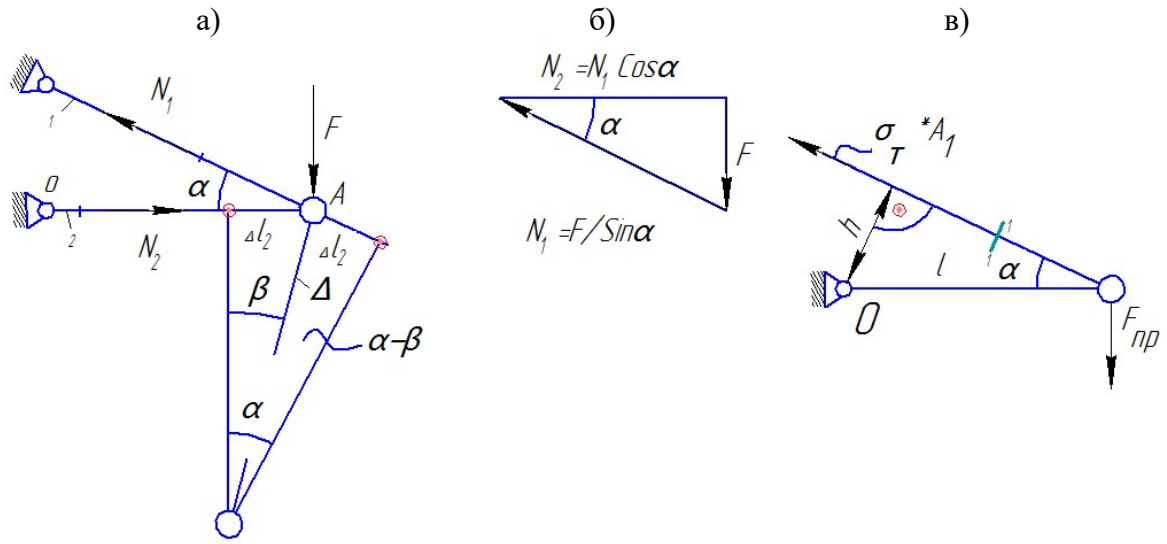


Рис.4.2. К расчету стержневой системы

При заданной силе F, допускаемом напряжении $[\sigma]$ и пределе текучести $\sigma_{\text{Т}}$, требуется определить площадь поперечных сечений стержней A_1 и A_2 и предельное(разрушающее) для системы силу $F_{\text{пр}}$.

Необходимые для выполнения условной прочности площади сечений стержней будут определяться по формулам:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]},$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]}$$

где $N_1 = F/_{\sin\alpha}$, $N_2 = Fctg\beta$

Определены из условия равновесия узла А.

Удлинение стержней будет:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1\, l_1}{E_1\, A_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2\, l_2}{E_2\, A_2}$$

а полное перемещение Δ узла А и его направление, определяемое углом β, будут определяться из решения следующей системы уравнений

$$\sin\beta = \frac{\Delta l_2}{\Delta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\Delta l_1}{\Delta}$$

На рис.4.2, б показано предельное состояние системы при разрушении первого стержня, в котором предельное усилие равно $\sigma_{\text{Т}}\text{A}_1$

Из условия равновесия системы

$$\sum \text{M}_0 = \sigma_{\text{Т}}\, Ah - F_{\text{пр}} l = 0$$

находим предельную для нее нагрузку

$$F_{\text{пр}} = \sigma_{\text{Т}}\text{A}\sin\alpha$$

Контрольная задача

Для статически неопределимой стержневой системы, показанной на рис.4.3, требуется составить систему уравнений для решения задачи о ее прочности и определить предельную нагрузку $F_{пр}$, при которой эта система будет разрушена.

а) б)

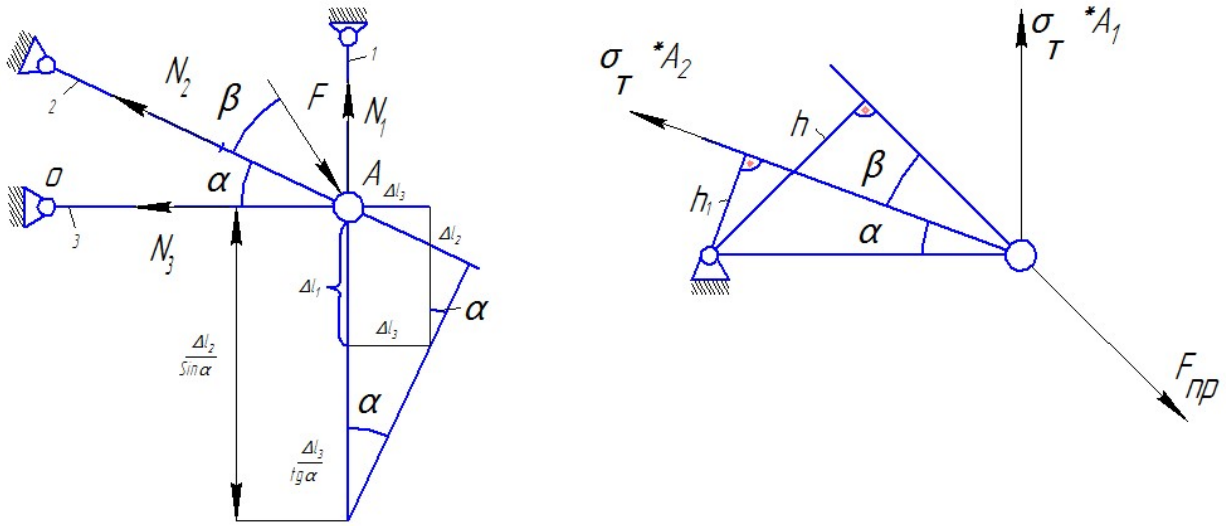


Рис.4.3 К расчету статически неопределимой системы

В узле А имеем три неизвестные силы N_1 , N_2 , N_3 для определения которых необходимо составить три уравнения. Два из них – это равенства нулю сумм проекций всех сил в любых двух направлениях.

Третье уравнение составляется из условия совместной деформации трех стержней, состоящее в том, что деформации этих стержней $\Delta l_1, \Delta l_2$ и Δl_3 связаны между собой так, как это показано на рис.4.3, а описывается соотношением

$$\Delta l_1 + \frac{\Delta l_3}{tg\alpha} = \frac{\Delta l_2}{sin\alpha}$$

, где $\Delta l_1 = \frac{N_1\, l_1}{E_1\, A_1}$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2\, l_2}{E_2\, A_2}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3\, l_3}{E_3\, A_3}$$

После определения усилий N_1 , N_2 , N_3 определяется напряжения в стержнях $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}$, $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$, $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3}$ и составляются соответствующие условия прочности.

При определении силы $F_{пр}$ рассмотрим один из вариантов возможного разрушения системы, когда разрушились стержни 1 и 2 и в их сечениях возникли предельные для них усилия $\sigma_T A_1$ и $\sigma_T A_2$(рис.4.3, б)

Из условия равновесия системы

$$\sum M_0 = \sigma_T\, A_1 l + \sigma_T A_2 h_1 - F_{пр} h = 0$$

определяется сила $F_{пр}$.

Лекция 5. Расчеты на прочность при сдвиге

Сдвигом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только поперечная сила. В чистом виде сдвиг, как вид нагружения, встречается редко. Характерным примером элемента конструкции, работающего в основном на сдвиг, может служить заклепка в соединении, показанном на рис. 5.1. Определение всех силовых факторов в сечениях заклепки, а также усилий взаимодействий на контактируемых плоскостях представляет собой сложную задачу. Однако, очевидно, что определяющим силовым фактором будет поперечная сила. При этом по плоскости сдвига возникнут касательные напряжения $\tau = F/A$, где А – площадь сечения элемента.

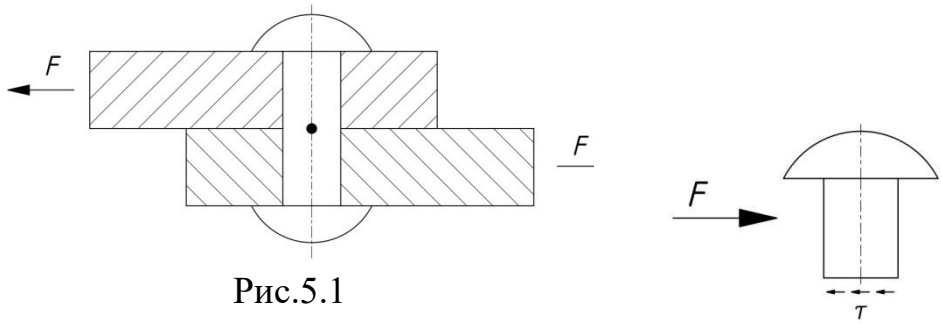


Рис.5.1

Рассмотрим некоторую точку в области сдвига. Представим ее в виде элементарного квадрата, показанного на рис. 5.2,а. Из условия равновесия этого квадрата следует, что на всех его гранях действуют касательные напряжения τ. То есть при сдвиге, так же как и при растяжении, на двух взаимно перпендикулярных площадках возникают касательные напряжения, равные по величине и обратные по направлению созданному ими момента.

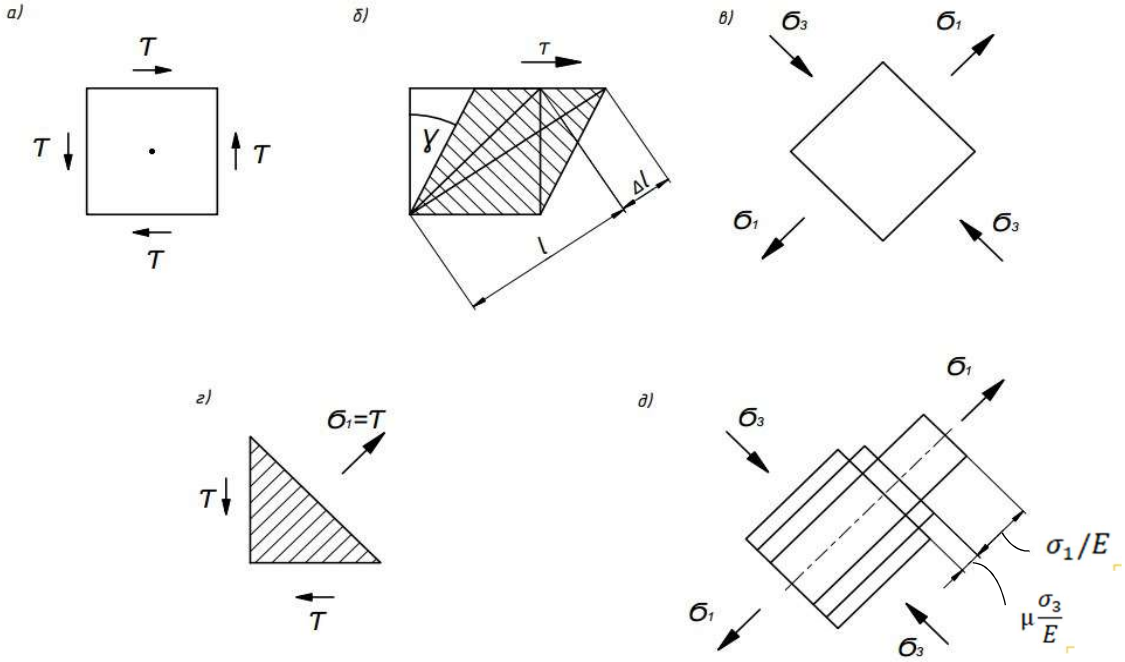


Рис. 5.2

Экспериментально установлено, что в изотропных материалах деформация элементарного квадрата происходит так, как показано на рис. 5.2б.

Угол сдвига обозначается ɣ. Относительная деформация диагонали рассматриваемого квадрата

$$\varepsilon=\gamma/2 \qquad (5.1)$$

Выделим теперь малую квадратную область, повернутую относительно заданной на угол 45° (5.2,в)

Из условий равновесия следует, что материал в этой области находится в состоянии растяжения с напряжением $\sigma_1 = \tau$ и сжатия с напряжением $\sigma_3 = -\tau$ (рис. 5.2,в,г). Индексы 1 и 2 выбраны из условия, что наибольшему по алгебраической величине напряжению дается индекс 1, а наименьшему – 3. Среднему по величине напряжению дается индекс 2. В нашем случае $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$, где σ_2 – напряжение, перпендикулярное плоскости чертежа.

По аналогии с законом Гука при растяжении зависимость угловой деформации ɣ от величины касательного напряжения τ носит название закона Гука при сдвиге. Для установления этой зависимости вычислим вначале деформацию диагонали рассматриваемого квадрата. Эта деформация обусловлена напряжениями σ_1 и σ_3. Используя законы Гука и Пуассона, получаем (рис. 5.2д):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau}{E}(1+\mu) \qquad (5.2)$$

Приравнивая соотношения (5.1) и (5.2), имеем равенство:

$$\frac{\tau}{E}(1+\mu) = \frac{\gamma}{2}$$

Отсюда получаем :

$$\tau = G\gamma, \qquad (5.3)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ (5.4)

Соотношение (5.3) выражает закон Гука при сдвиге. Коэффициент G называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода. Для стали (при $E = 2\cdot10^5$ Мпа, μ=0,25) имеем $G = 8\cdot10^4$ Мпа.

Схематизированная диаграмма деформирования материала при сдвиге показана на рис. 5.3.

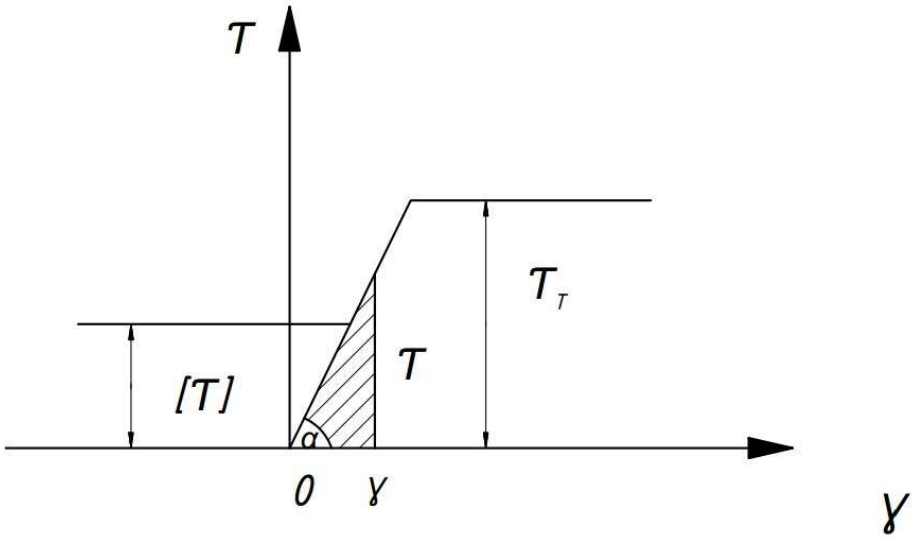


Рис. 5.3 Схематизированная диаграмма при сдвиге.

Здесь $\tau_{\text{Т}}$ – предел текучести при сдвиге, $[\tau] = \frac{\tau_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}$ – допускаемое напряжение при сдвиге, $n_{\text{Т}}$ – коэффициент запаса прочности при сдвиге, $\text{tg}\,\alpha = \frac{\tau}{\gamma} = G$ – модуль сдвига.

Удельная (в единице объема) потенциальная энергия деформации при сдвиге будет определяться как площадь заштрихованного на рис. 5.3 треугольника, т.е. как

$$\Pi = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

Условие прочности при сдвиге будет иметь вид:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau]$$

При заданном усилии F и $[\tau]$ необходимая площадь сечения заклёпок:

$$\text{A} \geq \frac{F}{[\tau]}$$

Предельная нагрузка заклепочного соединения будет определяться как

$$F_{\text{пр}} = \text{A}\tau_{\text{Т}}$$

где A – площадь сечения всех заклёпок.

Отметим, что при напряженном состоянии чистого сдвига изменения объема не происходит, т.к. при $\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$, в соответствии с (2.3) объемная деформация $\varepsilon_x = 0$, так что вычисленная выше потенциальная энергия деформации есть потенциальная энергия деформации «изменения формы». Приравнивая ее значение потенциальной энергии деформации формы при растяжении (2.4) для момента наступления пластических деформаций (т.е. используя энергетическую гипотезу пластичности) получим равенство:

$$\frac{1+\mu}{3\text{E}}\sigma_{\text{Т}}^2 = \frac{\tau_{\text{Т}}^2}{2G}$$

Отсюда следует, что

$$\tau_{\text{Т}} = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{\sqrt{3}}$$

и диаграммы растяжения и сдвига отличаются лишь множителем $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

<u>Контрольные задачи.</u>

Задача 1. Две пластины закреплены n заклёпками и нагружены так, как это показано на рис. 5.4. Требуется вычислить напряжения в заклёпках.

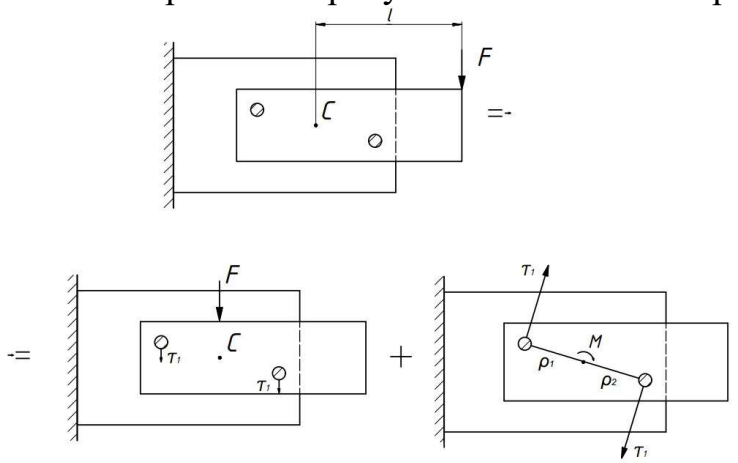


Рис. 5.4. К расчету заклёпочного соединения.

Решение.

Действие данной силы F заменим на действие равной ей силе и момент $M = Fl$ (на рис. 5.4 показаны только сечения двух заклёпок).

Напряжения от сдвига будут определяться как $\tau_1 = \frac{F}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$.

Напряжения τ_i от действия момента M будем считать пропорциональными их расстояниям ρ_i от центра сечений всех заклёпок C, т.е. примем, что $\tau_i = K\rho_i$, где коэффициент K определим из условия равновесия.

$M = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \tau_i A_i = K \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 A_i$

Отсюда получаем: $K = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 A_i}$; $\tau_i = \frac{M\rho_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 A_i}$.

Задача 2.

Две пластины соединены тремя сварными швами так, как показано на рис. 5.5. Центр сечений швов обозначим C.

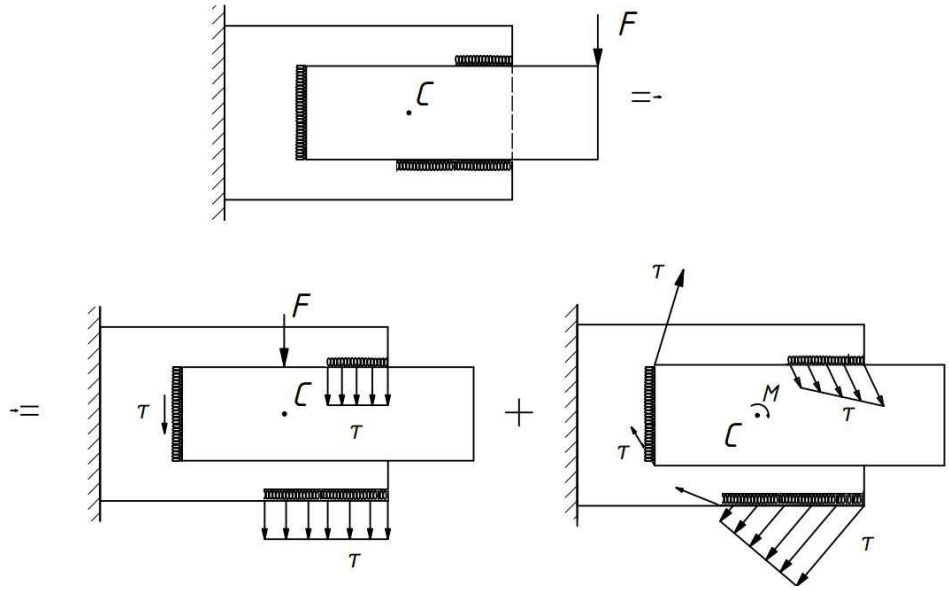


Рис. 5.5. К расчету сварного соединения.

Решение.

Сила сдвига предопределяет касательные напряжения $\tau = F / \sum_{i=1}^{n} A_i$, где A_i – площадь сечения i-го сварного шва.

Момент M=Fl предопределяет напряжения скручивания швов $\tau = K\rho_i$, где ρ_i – координата i-го сварного шва.

Так как $M = \int \rho_i \tau_i dA_i = K \int \rho^2 dA$, то $K = M / \int \rho^2 dA$.

Лекция 6. Кручение круглых стержней

Рассмотрим круглый стержень в состоянии кручения, показанный на рис. 6.1.

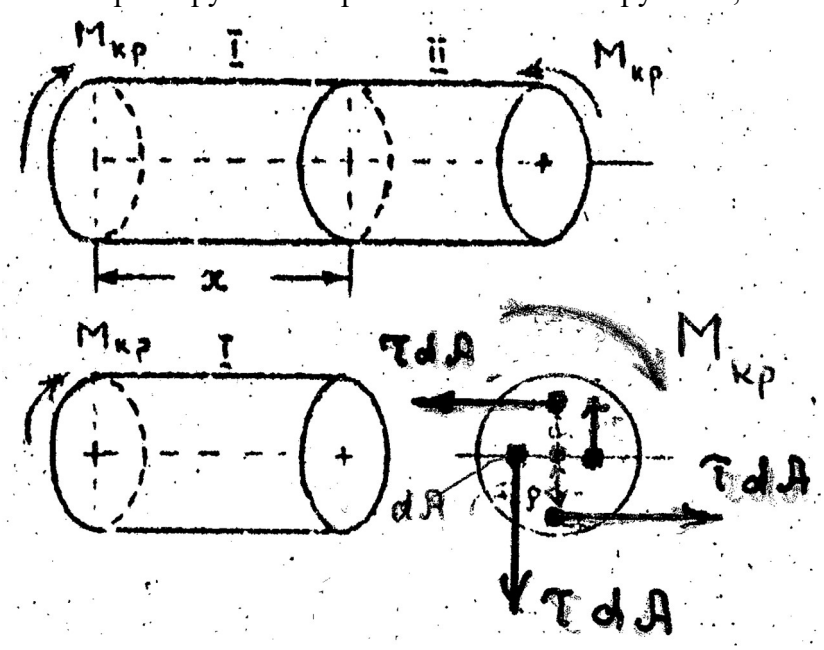


Рис 6.1

Мысленно отделим одну часть стержня от другой. Любая из этих частей находится в равновесии под воздействием момента внешних сил $M_{кр}$ и моментов внутренних сил в сечении, обусловленных касательными напряжениями τ. Из условия равновесия следует равенство:

$$M_{кр} = \int_{(A)} \tau\rho \, dA, \qquad (6.1)$$

Рассмотрим деформацию треугольной призмы, вырезанной из стержня и показанную на рис.6.2.

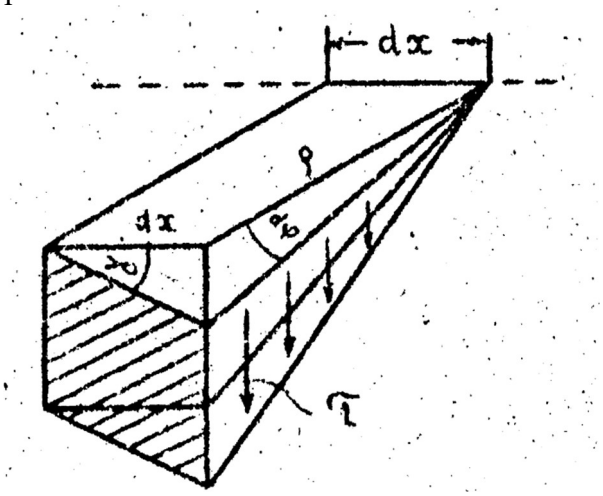


Рис 6.2.

Обозначим через dφ взаимный угол допорота двух сечений стержня, расположенных на расстоянии dx, а через γ - угол сдвига. Из рисунка видно, что выполняется следующее соотношение:

$$\gamma dx = \rho d\varphi, \qquad (6.2)$$

Касательные напряжения определены по закону Гука при сдвиге:

$$\tau = \sigma\gamma = \sigma\rho\frac{d\varphi}{dx}, \qquad (6.3)$$

Из уравнений (6.1) и (6.3) получаем равенства:

$$\text{М}_{\text{кр}} = \int\limits_{(\text{A})} \sigma\gamma\rho\, dA = GJ_\rho\frac{d\varphi}{dx}, \qquad (6.4)$$

где величина

$$J_\rho = \int\limits_{(A)} \rho^2\, dA, \qquad (6.5)$$

называется полярным моментом инерции сечения.

Для круга с радиусом r и диаметром d имеем:

$$J_\rho = \frac{\pi}{2}r^4 \simeq 0{,}1d^4$$

Равенство (6.4) представляет собой дифференциальное уравнение кручения. Интегрируя уравнение, получаем формулу для определения угла закручивания:

$$\varphi = \int\limits_0^l \frac{\text{М}_{\text{кр}}}{GJ_\rho}dx, \qquad (6.6)$$

где l – длина стержня.

При $GJ_\rho = const$ получаем

$$\varphi = \frac{\text{М}_{\text{кр}}l}{GJ_\rho}, \qquad (6.7)$$

Подставив в формулу (6.3) соотношение (6.4), получим уравнение для расчета касательных напряжений при кручении:

$$\tau = \frac{\text{М}_{\text{кр}}\rho}{J_\rho}, \qquad (6.8)$$

Формула (6.8) показывает, что касательные напряжения в поперечных сечениях стержня распределены по линейному закону, в центре сечения напряжения равны нулю. Максимальное напряжение получаем на поверхности стержня при ρ = r (рис. 6.3а):

$$\tau_{max} = \frac{\text{М}_{\text{кр}}}{W_\rho}, \qquad (6.9)$$

где величина

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{r} \simeq 0{,}2d^3$$

называется полярным моментом сопротивления сечения.

Условия прочности и жесткости стержней при кручении имеют вид:

$$\tau_{max} = \frac{\text{М}_{\text{кр}}}{W_\rho} \le [\tau], \qquad \varphi = \frac{\text{М}_{\text{кр}}l}{GJ_\rho} \le [\varphi],$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение при кручении,

$[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания.

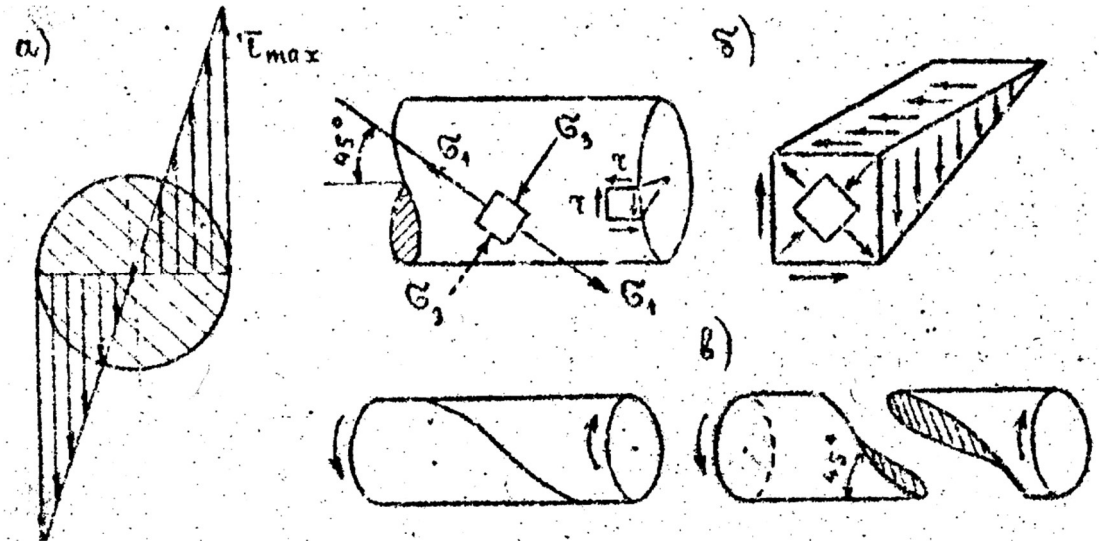


Рис 6.3

Рассмотрим элемент поверхности стержня, показанный на рис 6.3б. На его гранях действуют касательные напряжения τ. *В* повернутой на угол 45° площадке, как и при сдвиге, возникают только нормальные напряжения $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$. Наличие растягивающих напряжений σ_1 предопределяют характер разрушения стержней при кручении. Картина такого разрушения показала на рис. 6.3а.

Вычислим теперь потенциальную энергию закрученного стержня. Работа, совершаемая моментом $\mathrm{M_{кр}}$ на угле поворота $d\varphi$ равна потенциальной энергии в бесконечно малом объеме стержня

$$d\Pi = \frac{1}{2}\mathrm{M_{кр}}d\varphi = \frac{\mathrm{M_{кр}}^2 dx}{2GJ_\rho}$$

Полная энергия в стержне длиной l

$$\Pi = \int_0^l \frac{\mathrm{M_{кр}}^2 dx}{2GJ_\rho}$$

Контрольные задачи

<u>Задача 1</u>. Сравнить прочность и жесткость тонкостенных труб открытого и закрытого профиля, показанных на рис. 6.4.

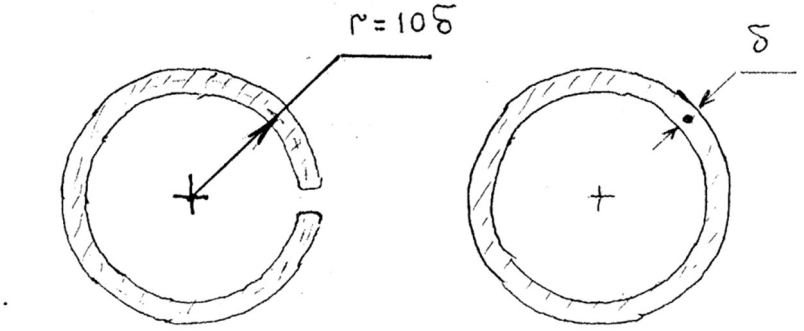


Рис 6.4.

<u>Решение.</u> Моменты инерции и моменты сопротивления показанных сечений определяются по формулам:

$$J_k = \frac{1}{3} 2\pi r \delta^3; \quad J_\rho = r^2 2\pi r \delta \quad ;$$

$$W_k = \frac{2\pi}{3} r \delta^2; \quad W_\rho = 2\pi r^2 \delta \quad ;$$

Отсюда имеем:

$$\frac{J_\rho}{J_k} = 3\frac{r^2}{\delta^2} = 300; \quad \frac{W_\rho}{W_k} = 3\frac{r}{\delta} = 30;$$

т.е. жесткость закрытого профиля в 300 раз, а прочность в 30 раз выше чем открытого профиля.

<u>Задача 2.</u> В составном стержне с жесткостями частей C_1 и C_2, показанном на рис. 6.5, сечение 1 повернуто на угол φ, а сечение 2 затем закреплено. Внешний момент снят. Найти угол раскручивания x и возникающий момент M.

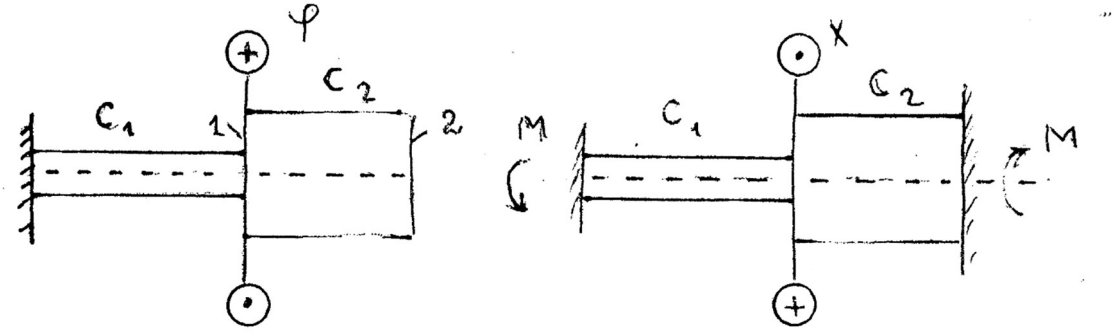


Рис 6.5.

Имеем равенства:

$$M = C_1(\varphi - x) = C_2 x$$

Отсюда получаем:

$$x = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\varphi$$

$$M = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\varphi$$

При $C_1 = C_2$ имеем $x = \frac{1}{2}\varphi$.

Лекция 7. Кручение некруглых стержней

Касательные напряжение на контуре стержней с некруглым поперечным сечением при кручение всегда направлены по касательной к контуру, а в угловых точках эти напряжения равны нулю. Данный вывод следует из закона парности касательных напряжений и условия равенства нулю касательных напряжений вдоль боковых поверхностей стержня (рис 7.1 а, б)

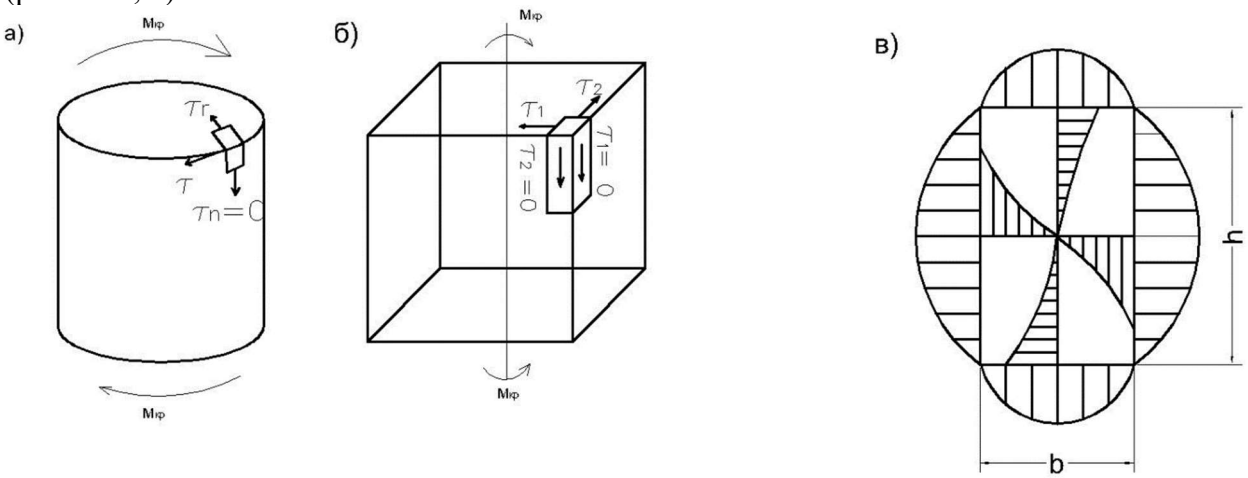


Рис. 7.1

При этом напряжения по сечению стержня распределены по нелинейному закону. Для прямоугольного стержня эти напряжения показаны на рис 7.1 в. В характерных точках А и В наряжениях можно вычислить по формулам:

$\tau_A = M_{кр} / W_к$; $\tau_B = \eta . \tau_A$ (7.1)

где $W_K = \alpha.h.b^2$ – момент сопротивления при кручении α,η – коэффициенты, зависящие от ширины b и высоты h сечения, примем $\eta \leq 1$.

Угол закручивания стержня определяется по формуле

$$\phi = M_{KP} . l / G.J_K \quad (7.2)$$

где $J_K = \beta.h.b^3$ – момент инерции сечения при кручении, β – коэффициент, зависящий от b и h.

Коэффициенты α и β можно вычислить по следующим приближенным формулам:

$\alpha = \frac{1 + K^2}{0,35+K^2}\beta$; $\beta = \frac{1}{3} - \frac{0,21}{K}$; $K = \frac{h}{b}$

Для узкого прямоугольного сечения или тонкостенного стержня, сечение которого можно условно представить в виде прямоугольника (рис 7.2а), имеем: h>>b , $k \to \infty$, $\alpha = \beta = 1/3$.

В этом случае формулы (7.1) и (7.2) принимают вид:

$\tau_{max} = 3.M_{KP}/ S.\delta^2$; $\phi = 3.M_{KP}.l / G.S.\delta^3$

где S – полупериметр сечения, δ – толщина стенки.

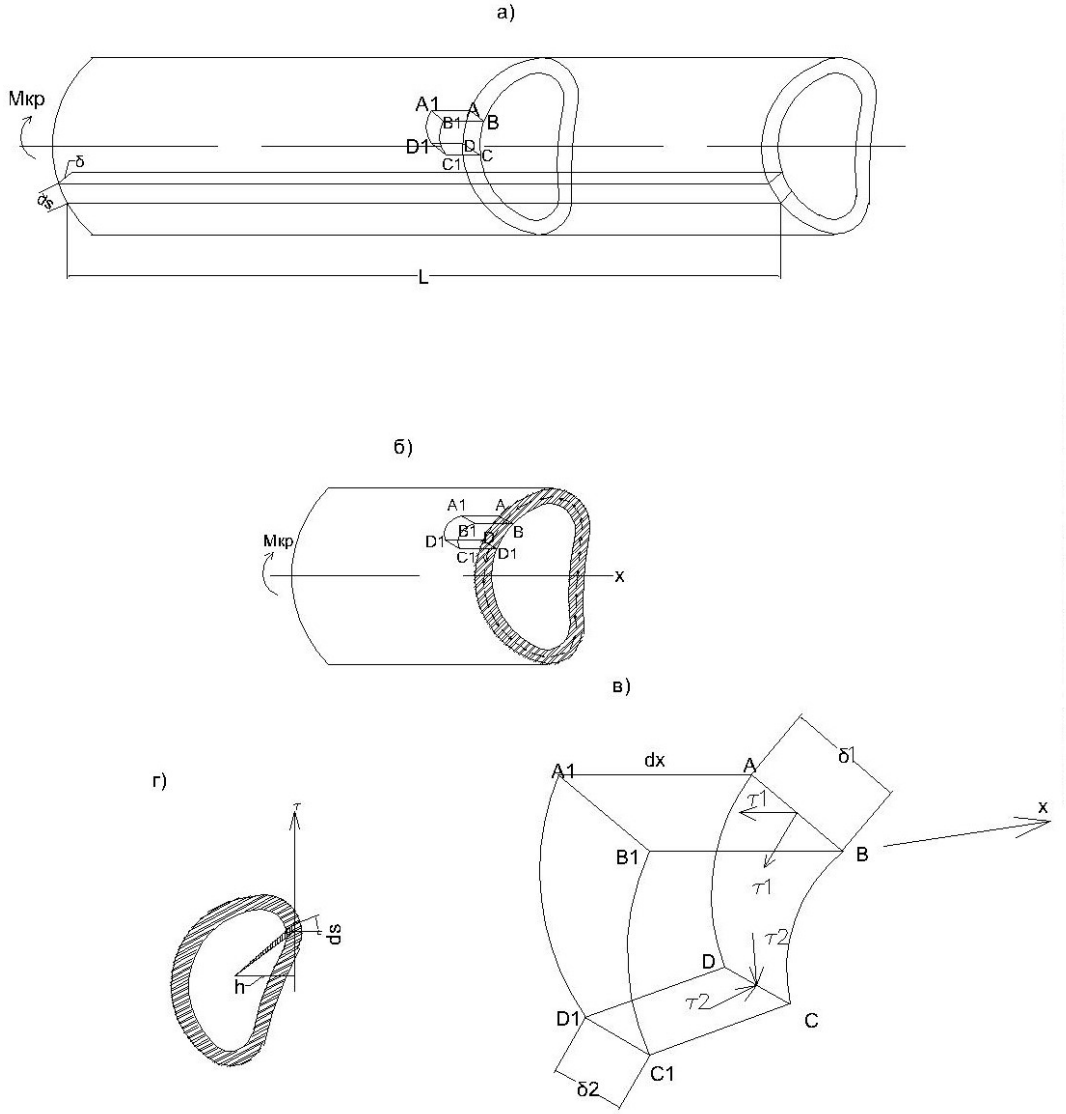


Рис.7.3

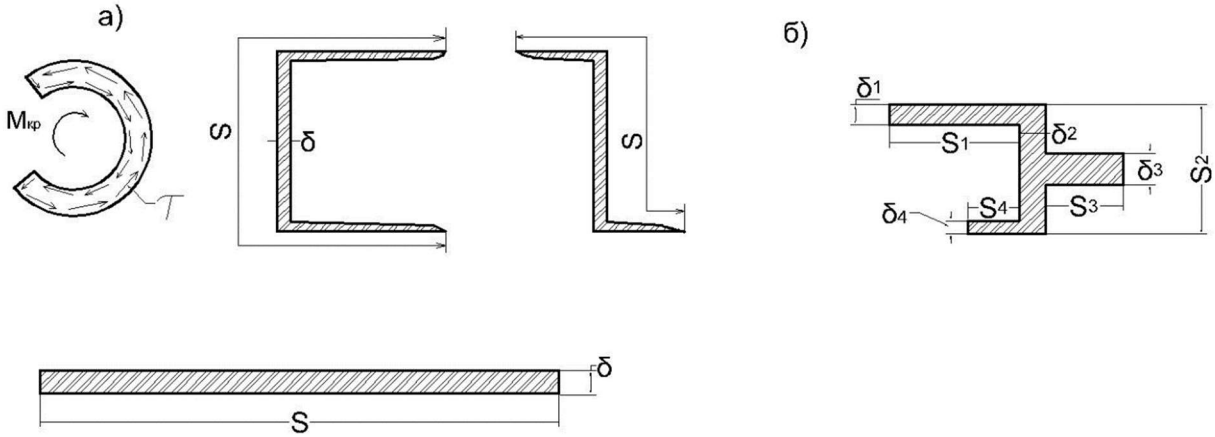


Рис.7.2

Для сечений, не приводимых к одному прямоугольнику (рис. 7.2б), общий момент кручения складывается из моментов кручения, приходящихся на каждый из составляющих общее сечение прямоугольников:

$$M_{KP} = \sum_{i=1}^{i=n} Mi \text{ , } Mi = \phi G S_i \delta_i^3 / 3.1$$

Где η – число прямоугольников, на которое подразделяется заданное сечение, M_i – момент кручения, приходящийся на i–й прямоугольник. Для сечения, показанного на рис.16.2б, I = 4.

Пологая, что сечение стержня поворачивается при кручении как единое целое и используя соотношение (7.4), получаем:

$$M_{КР} = \frac{\varphi.G}{3.l}\sum_{i=1}^{i=n} Si\,.\,\delta^3 i$$

Отсюда следует формула для определения угла закручивания стержня:

$$\varphi = \frac{3.Мкр.l}{G.\sum_{i=1}^{i=n} Si\,.\delta^3 i}\ ;\quad \tau = \frac{3.Mi}{Si.\delta^2 i} = \frac{\varphi G Si\delta^3 i}{lSi\delta^2 i} = \frac{3M\delta i}{\sum_{i=1}^{i=n} Si\,.\delta^3 i}$$

Из соотношения (7.4) и условия $\phi_i = \phi$ при любом i.

получаем равенство $\tau_i\, l = \phi.G.\delta_i$

Отсюда определяем максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{G\delta max}{l} = \frac{3Мкр\delta max}{\sum_{i=1}^{i=n} Si\,.\delta^3 i}$$

Рассмотрим теперь кручение тонкостенного стержня закрытого профиля (рис.7.3 а, б). Выделим бесконечно малый элемент АВСД $A_1B_1C_1Д_1$ и рассмотрим его равновесие под воздействием приложенных к нему внутренних сил. Будем считать, что напряжения по толщине стенки стержня распределены равномерно. Пусть при δ_1 имеем τ_1 , а при δ_2 имеем τ_2 (рис.7.3в). По закону парности касательных напряжения τ_1 и τ_2 . Запишем уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы проекций всех сил, действующих в направлении оси стержня:

$$\tau_2\delta_2 dx - \tau_1\delta_1 dx = 0.$$

Отсюда следует, что произведение τ δ остается постоянным и в местах с минимальной толщиной стенки возникают максимальные напряжения, а в местах с максимальной толщиной стенки – минимальные напряжения.

Рассмотрим часть стержня, показанную на рис 7.3б, г. Эта часть находится в равновесии под воздействием внешнего момента Мкр и моментов внутренних сил в сечении. Из этого условия получаем равенство

$$Мкр = \oint \tau\delta h ds = \tau\delta \int h ds$$

Где h – плечо силы τδds.

Произведение h.ds представляет собой удвоенную площадь, заштрихованного на рис.16.3г треугольника. Отсюда следует, что

$$\oint h ds = 2A$$

Где А – площадь фигуры, очерченной средней линией контура сечения.

При этом из соотношения (7.7) следует, что

$$\tau = \frac{Мкр}{2A\delta} \qquad (7.9)$$

Определим теперь угол закручивания стержня ϕ и потенциальную энергию стержня при кручении П.

Энергия и бесконечно малом объёме и во всем стержне будет соответсвенно равна:

$$dП = \frac{\tau^2 l\delta}{2G} ds\ ;\quad П = \frac{\tau^2\delta^2 l}{2G}\oint\frac{ds}{\delta} \qquad (7.10)$$

Полую энергию можно также вычислить по заданному моменту Мкр и углу закручивания ϕ :

$$П = ½\ Мкр.\phi \qquad (7.11)$$

Из соотношений (7.9) ,(7.10) и (7.11) следует, что искомый угол закручиваний

$$\phi = \frac{Мкрl}{4A^2G}\oint\frac{ds}{\delta}$$

при δ = const имеем:

$$П = \frac{М^2кр.l.S}{3A^2G\delta}\ ;\quad \phi = \frac{Мкр.l.S}{4A^2G\delta}$$ Где S – длина контура сечения.

Лекция 8. Геометрические характеристики плоских сечений

Рассмотрим произвольной формы сечение в системе координат XOY и вычислим его интегральные характеристики (рис. 8.1):

$$S_x = \int_{(A)} y dA \qquad J_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

$$J_{xy} = \int_{(A)} xy dA$$

$$S_y = \int_{(A)} x dA \qquad J_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

$$J_p = \int_{(A)} \rho^2 dA$$

Здесь A – площадь сечения. S_x ,S_y - статические моменты плошади относительно осей X и Y; J_x ,J_y -

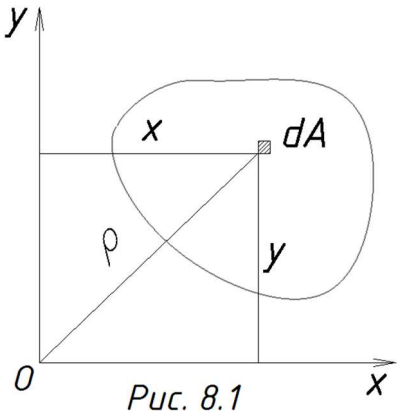


Рис. 8.1

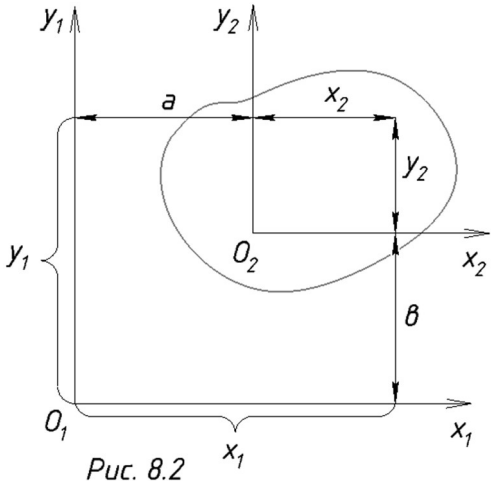


Рис. 8.2

осевые моменты инерции относительно осей X и Y; J_{xy} - центробежный момент инерции; J_p - полярный момент инерции.

Пусть заданы геометрические характеристики сечения относительно системы координат X_1 O_1 Y_1 (рис. 8.2) и требуется определить геометрические характеристики этого сечения относительно новой системы координат X_2 O_2 Y_2 , сдвинутой относительно системы X_1 O_1 Y_1 на расстояние a вдоль оси X_1 и на расстояние в вдоль оси Y_1 .

Между координатами x_1, x_2, y_1 , y_2 можно записать следующее соответствие:

$$x_2 = x_1 - a; \qquad y_2 = y_1 - b.$$

Используя эти соотношения вычислим геометрические характеристики сечения в новой системе отсчёта:

$$S_{x_2} = \int_{(A)} y_2 dA = S_{x_1} - b * A;$$

$$S_{y_2} = S_{y_1} - a * A;$$

$$J_{x_2} = \int_{(A)} y_2{}^2 dA = \int_{(A)} (y_1 - b)^2 dA = J_{x_1} - 2 * b * S_{x_1} + b^2 * A;$$

$$J_{x_2 y_2} = \int_{(A)} (x_1 - a) * (y_1 - b) dA = J_{x_1 y_1} - a * S_{x_1} - b * S_{y_1} + a * b * A;$$

$$J_{y_2} = J_{y_1} - 2 * a * S_{y_1} + a^2 * A;$$

Система координат, относительно которой статические моменты площади равны 0, называется центральной. Её оси называются центральными осями инерции, а её начало –

центром (тяжести) сечения. Из полученных соотношений следует, что координаты центра сечения в системе координат X_1 Y_1 можно вычислить по формулам:

$$a = S_{y_1} / A; \qquad b = S_{x_1} / A;$$

Если первоначальная система координат является центральной, то $S_{x1} = S_{y1} = 0$ и тогда формулы для определения моментов инерции примут вид:

$$J_{x_2} = J_{x_1} + b^2 A; \qquad J_{y_2} = J_{y_1} + a^2 A; \qquad J_{x_2 y_2} = J_{x_1 y_1} + abA;$$

Моменты инерции, вычисленные в центральной системе координат, называются центральными моментами инерции сечения.

Рассмотрим теперь как изменяются моменты инерции при повороте системы координат. Пусть моменты инерции некоторого сечения заданы в системе координат XOY (рис. 6.3). Требуется определить моменты инерции этого сечения в системе координат UOV, повернутой относительно системы координат XOY на угол α против часовой стрелки.

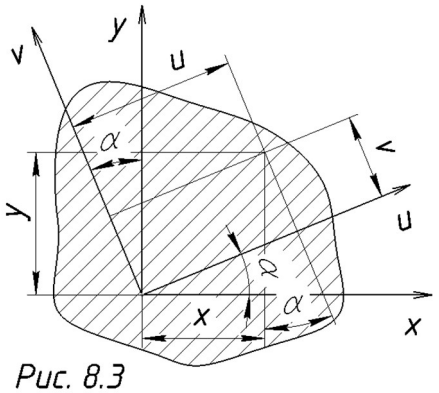


Рис. 8.3

Из геометрических соотношений получаем следующие зависимости между координатами:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \qquad v = y\cos\alpha - x\sin\alpha;$$

Используя эти соотношения, получаем:

$$J_u = \int_{(A)} v^2 dA = \int_{(A)} (y*\cos\alpha - x*\sin\alpha)^2 dA = J_x*\cos^2\alpha + J_y*\sin^2\alpha - J_{xy}*\sin 2\alpha;$$

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}*\cos 2\alpha - J_{xy}*\sin 2\alpha;$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}*\cos 2\alpha + J_{xy}*\sin 2\alpha;$$

$$J_{uv} = \int_{(A)} uvdA = J_{xy}*\cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2}*\sin 2\alpha;$$

Проведём исследования выражений (8.3) и (8.4) на экстремум. Для этого приравняем производные от этих выражений по углу α нулю.

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -\frac{dJ_v}{d\alpha} = (J_y - J_x)\sin 2\alpha - 2J_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

Из соотношений (8.5) и (8.6) следует, что осевые моменты инерции принимают экстремальные значения в тех осях, относительно которых центробежный момент равен нулю. Такие оси называются главными осями инерции. Если их начало находится в центре тяжести сечения, то эти оси называются главными центральными осями инерции. Осевые моменты инерции сечения относительно этих осей называются соответственно главными и главными центральными моментами инерции.

Расположение главных осей инерции определяется углом α, определяемым из уравнения (8.6). Из этого уравнения следует, что:

$$tg\,2\alpha = 2\frac{J_{xy}}{\left(J_y - J_x\right)};$$

Подставляя значение угла α из выражения (8.7) в соотношения (8.3) и (8.4), получаем следующие формулы для определения главных моментов инерции:

$$J_{max} = J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4{J_{xy}}^2};$$

Знак плюс относится к определению J_1, а знак минус – к определению J_2.

Отметим, что для сечения в виде прямоугольника со сторонами b, h главные центральные моменты инерции равны:

$J_{max} = \frac{b*h^3}{12}$; $J_{min} = \frac{h*b^3}{12}$;

Для круглого сечения с радиусом r и диаметром d:

$J = {\pi * r^4}/{4} \approx 0.05 * d^4$; $J_p = 2 * J \approx 0.1 * d^4$.

Контрольные задачи

<u>Задача.</u> Вычислить геометрические характеристики сечений, показанных на рис. 8.4:

<u>Решение:</u>

Для сечения 1:

$$J_{x_1} = J_{y_1} = 2\int_0^{\frac{a}{2}} y^2 dA = \frac{a^4}{12}; \qquad W_x = W_y = \frac{a^3}{6};$$

Для сечения 2:

$$J_{x_2} = J_{y_2} = J_{x_1} cos^2 45° + J_{y_1} sin^2 45° = J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{a^4}{12}; \qquad W_x = W_y = \frac{a^4}{12} : \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{a^3}{6 * \sqrt{2}};$$

Для сечения 3:

$$J_{x_3} = \frac{J_{y_1}}{2} = \frac{a^4}{24}; \qquad W_{x_3} = \frac{a^3}{24}\frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$J_{y_3} = \frac{a^4}{24} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{a}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^4}{72};$$

$$W_{y_3} = \frac{a^4}{72} : \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{a^3}{36\sqrt{2}};$$

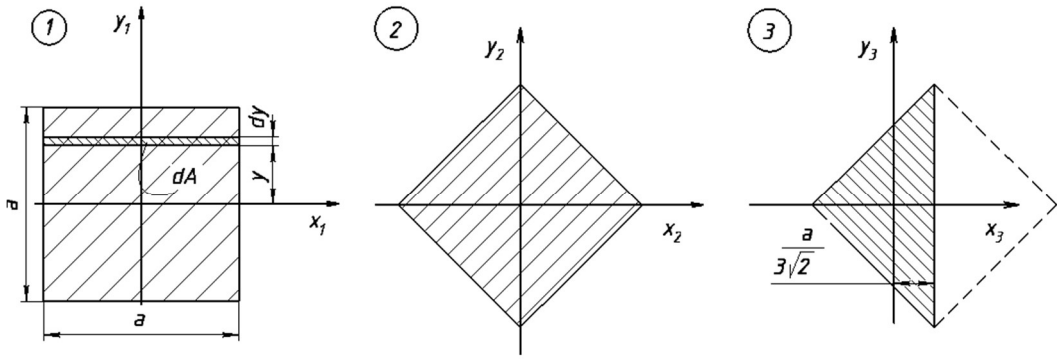


Рис. 8.4

Лекция 9. Прямой чистый изгиб балок

Прямым чистым изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки возникает только изгибающий момент, действующий в одной из главных плоскостей инерции.

Рассмотрим балку, нагруженную так, как это показано на рис.9.1. Построим для нее эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M. Из этих эпюр видно, что на участке BC возникают только изгибающие моменты M, а на участках AB и CD, кроме изгибающих моментов в сечениях балки, возникают еще и поперечные силы Q. Изгиб на участке BC называется чистым изгибом, а на участках AB и CD – поперечным изгибом.

Рассмотрим участок балки, находящийся в состоянии чистого изгиба (рис.9.2). Пусть изгибающие моменты M лежат в плоскости XOY, где оси OY и OZ – главные оси инерции сечения балки. Эти оси должны быть еще и центральными.

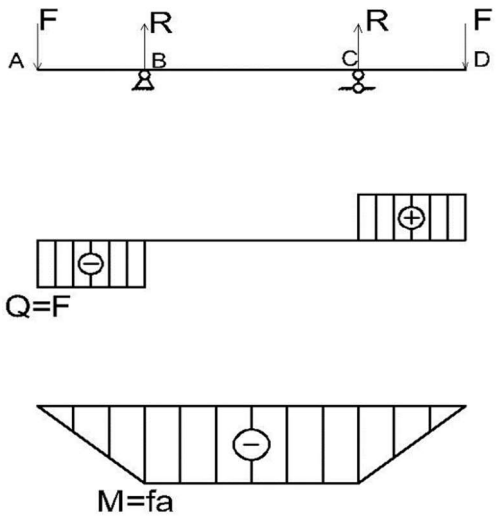


Рис.9.1

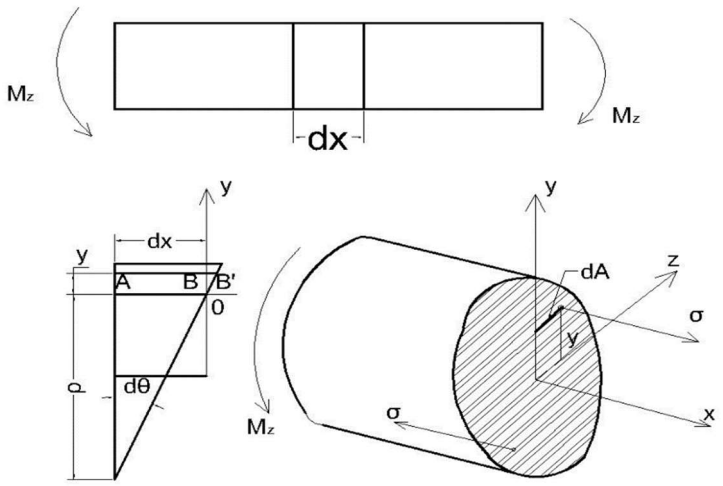


Рис.9.2

Отметим двумя бесконечно близкими сечениями 1 и 2 участок балки длиной dx . До деформации этот участок представлял собой прямоугольник. Пусть после деформации одно сечение (оставаясь плоскими) поворачивается относительно другого вокруг точки O на угол dθ. Тогда верхняя часть балки будет растянутой, в нижняя часть сжатой. Деформация элемента AB, находящегося от точки O на расстоянии Y, будет

$\varepsilon = \frac{BB}{AB} = \frac{yd\theta}{dx} = \frac{y}{\rho}$ (9.1)

где – $\rho = \frac{dx}{d\theta}$ – радиус кривизны волокна балки, проходящего через точку O.

Деформациям ε соответствует напряжение

$$\sigma = E\frac{y}{\rho} \quad (9.2)$$

Полученные соотношении показывают, что при изгибе напряжения и деформации в сечениях балок распределяются по линейному закону. В каждой элементарной площадке dA сечения балки возникает напряжение σ. Рассмотрим левую часть балки. Эта часть находится в равновесии под действием внешнего момента Mz и внутренних сил в сечении, обусловленных напряжениями σ. Составим уравнения равновесия и проанализируем их. Имеем:

$\sum X = \int \sigma dA = \frac{E}{\rho}\int ydA = \frac{E}{\rho}Sz = 0;$

$\sum y = \sum Z = \sum Mx = 0;$

$\sum My = \int z\sigma dA = \frac{E}{\rho}\int zydA = \frac{E}{\rho}J_{zy} = 0;$

$\sum Mz = Mz - \int y\sigma dA = Mz - \frac{E}{\rho}\int y^2 dA = Mz - \frac{E}{\rho}J_z = 0;$

Из первого уравнения следует, что статический момент площади сечения $S_z = 0$, т.е. система координат YOZ должна быть центральной. Из третьего уравнения следует, что центробежный момент инерции $J_{zy} = 0$, т.е. система координат YOZ является главной. Из последнего уравнения получаем формулу для определения кривизны балки при изгибе:

$$\theta \approx y \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{d\theta}{dx} = y'' \quad (9.3)$$

где – y = y(x) , θ = y(x) – прогиб и угол поворота сечения балки с координатой x (рис.9.3).

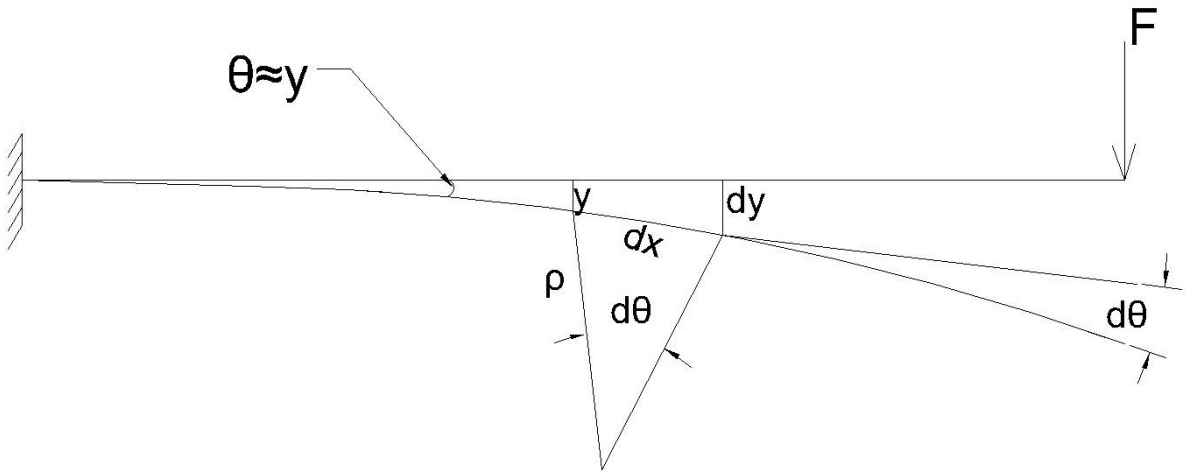


Рис.9.3

Из (9.3) следует дифференциальное уравнение упругой линии балки

$EJy'' = M$ (9.4)

Подставляя соотношение (9.3) в уравнение (9.2), получаем формулу для определения напряжений при изгибе:

$$\sigma = \frac{Mz.Y}{Jz} \qquad (9.5)$$

Максимальное напряжение получаем при $y = y_{max}$:

$$\sigma_{max} = \frac{Mz}{Wz} \quad (9.6)$$

Где Wz - $\frac{Jz}{Ymax}$ – осевой момент сопротивления сечения балки относительно оси z . Для прямоугольного сечения $(b \cdot h)$:

$$Wy = \frac{hb^2}{6} \qquad Wz = \frac{bh^2}{6}$$

Для круглого сечения

$$W = \frac{\pi r^3}{4} \approx 0{,}1d\text{^}3$$

Где r и d – радиус и диаметр сечения.
Условия прочности при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma] \quad (9.7)$$

где [σ] – допускаемое напряжение при изгибе.

при относительном повороте сечений балки 1 и 2 под действием момента Mz на угол dθ (рис.9.2) совершается работа, определяющая потенциальную энергию в бесконечно малом объеме балки, равную

$$dA = d\pi = \frac{1}{2} Mz d\theta \quad (9.8)$$

Используя формулу (9.3) получаем:

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{Mzdx}{EJz} \quad (9.9)$$

Подставляя соотношение (9.9) в формулу (9.8) и суммируя энергию по всей длине балки, имеем:

$$\Pi = \int_0^l \frac{Mz^2 dx}{2EJz} \quad (9.10)$$

Исчерпание возможности балки сопротивляться изгибу при увеличении изгибающего момента (см. Рис.9.4) приводит к появлению “пластического шарнира”

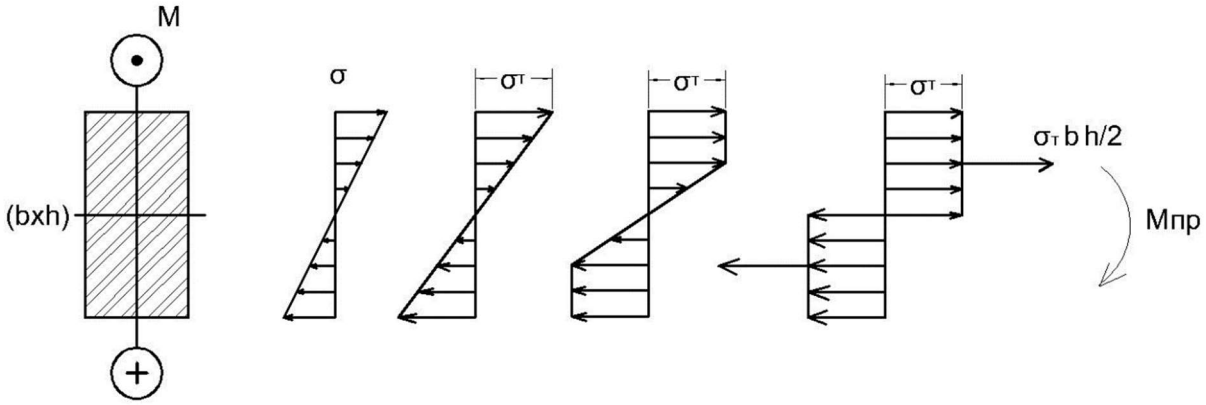


Рис.9.4

Соответствующий момент изгиба называется предельными моментом и обозначается как $M_{пр}$. Для прямоугольного сечения (bxh) имеем

$$M_{пр} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}$$

где σ_T – предел текучести

Нагрузки, при которых исчерпаны возможности балок сопротивляться изгибу называются предельными нагрузками и обозначаются как $F_{пр}$.

Для примера определим предельную нагрузку для балки, показанной на рис 9.5, а.

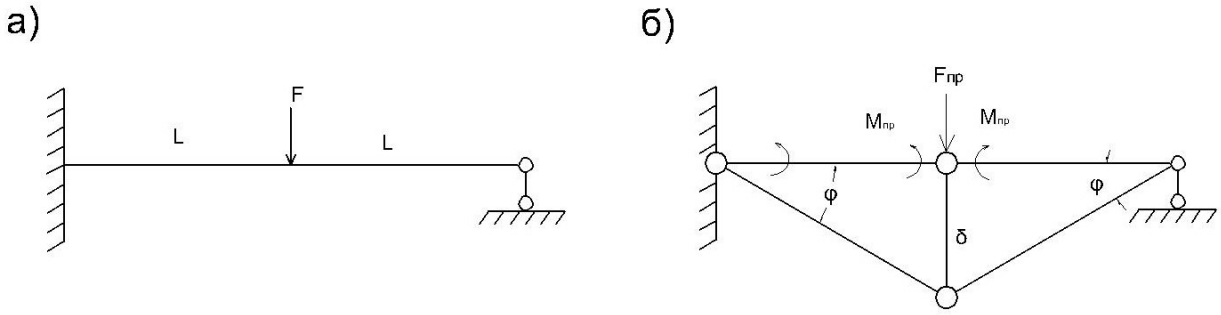


Рис.9.5

Полное разрушение балки произойдет при появлении двух пластических шарниров с тремя предельными изгибающим моментами $M_{пр}$, показанных на рис.9.5, б.

В соответствии с принципом возможных перемещений Лагранжа в состоянии предельного равновесия будем иметь равенства:

$F_{пр}\delta = F_{пр}.l.\phi = 3M_{пр}\phi$

Отсюда поучаем:

$$F_{пр} = \frac{3Mпр}{l}$$

Рассмотрим теперь прямой чистый изгиб с моментом M кривого бруса с прямоугольным поперечным сечением, элемент которого с малым углом $d\varphi$ показан на рис. 9.6, а, в.

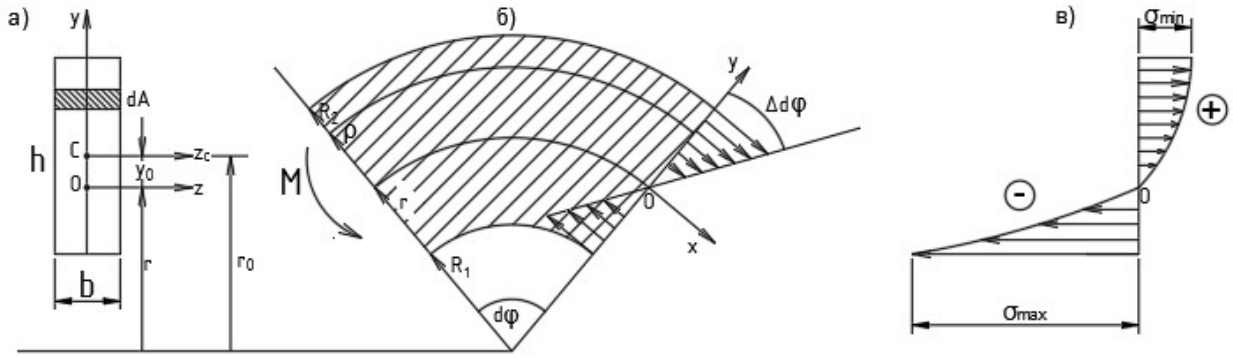


Рис. 9.6

Здесь R_1, R_2 - внутренний и наружный радиус бруса, r - радиус нейтрального слоя, z_C - главная центральная ось инерции, z - ось, относительно которой происходит поворот сечения, O - сечение бруса, б) – картина деформаций элемента объема, в) эпюра напряжений.

В соответствии с законом Гука напряжения в точке с координатой y будут определяться по формуле

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y\Delta d\varphi}{(y+r)d\varphi} \tag{9.11}$$

Радиус нейтрального слоя r определяется из условия равенства нулю суммы всех сил в направлении оси x:

$$\sum X = E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\int_A \frac{ydA}{y+r} = 0 \tag{9.12}$$

Из равенства нулю интеграла в уравнении (9.12) находим, что

$$r = \frac{A}{\int_{R_1}^{R_2}\frac{dA}{\rho}} \tag{9.13}$$

где $\rho = y + r$.

Для прямоугольного сечения $(b \times h)$ получаем

$$r = h\ln\frac{R_1}{R_2} \tag{9.14}$$

Расстояние y_0 между осями z и z_C определяется как $y_0 = r_0 - r$. Из условия равенства нулю суммы моментов относительно оси z получаем что:

$$M = ES\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{9.15}$$

где с учетом соотношения (9.12) находим

$$S = \int_A \frac{y^2 dA}{y+\rho} = \int_A y dA \tag{9.16}$$

где S - статический момент площади сечения относительно оси z. Подставив выражение (9.15) в (9.11) получаем формулу для расчета напряжений:

$$\sigma = \frac{M}{S} \cdot \frac{y}{y+r} \tag{9.17}$$

Эпюра напряжений (9.16) показана на рис. 9.6.в).

Лекция 10. Поперечный изгиб балок

Поперечным изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента возникает еще и поперечная сила. Так балка, показанная на рис. 9.1, находится в состоянии поперечного изгиба на участках АВ и СД и чистого изгиба на участке ВС.

Наличие поперечных сил Q в сечениях балки обуславливает появление в них касательных напряжений τ и некоторое перераспределение нормальных напряжений σ по сравнению с чистым изгибом. Специальными исследованиями показано, что если длина балки намного превышает ее высоту, то нормальные напряжения при поперечном изгибе можно с большой точностью определять по формулам чистого изгиба. В этом случае остается определить только величину и характер распределения касательных напряжений по сечению балки. Эту задачу впервые решил русский инженер Д. И. Журавский и 1855 году.

Вначале рассмотрим балки с симметричным профилем сечения (рис 10.1а).

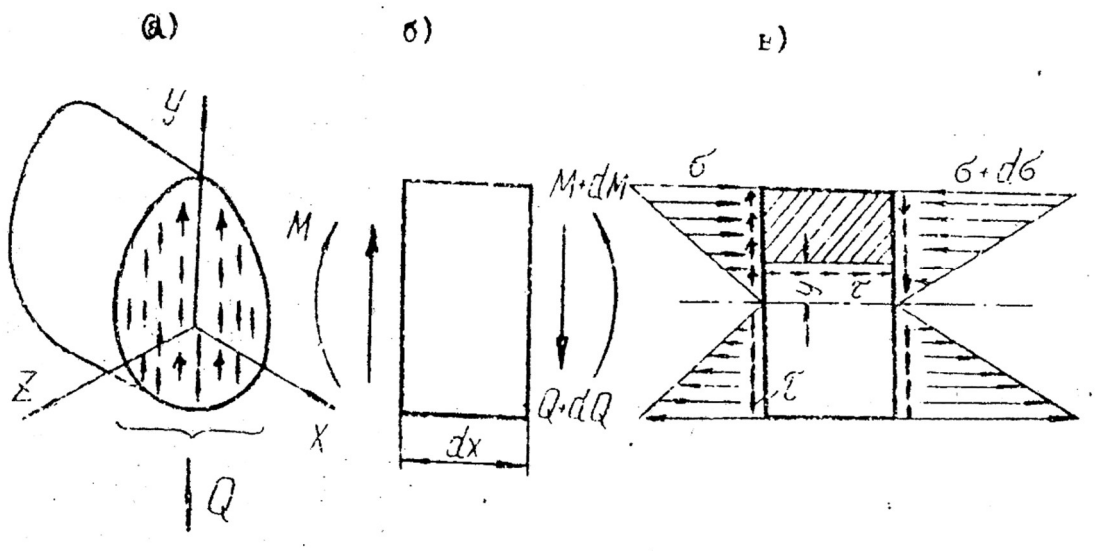


Рис. 10.1

Выделим часть балки длиной dx и заменим действие отброшенных частей внутренними силами и моментами так, как это показано на рис. 10.1б. Изгибающие моменты обуславливают наличие нормальных напряжений σ и σ + dσ, а поперечные силы - касательных напряжений τ (рис. 10.1в). По закону парности касательных напряжений в продольных сечениях балки также возникают касательные напряжения τ. На рис. 10.1в и на рис. 8.2а эти напряжения показаны для продольного сечения, находящегося от оси балки на расстоянии У

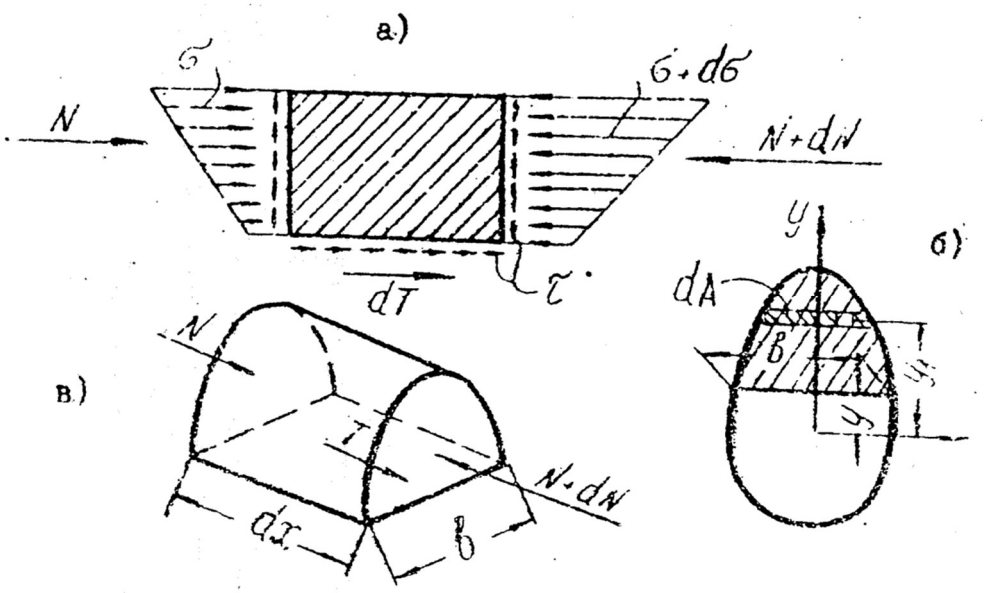


Рис. 10.2

Рассмотрим равновесие заштрихованного на рис. 10.1в и рис. 10.2а участка балки. Этот участок отдельно показан на рис. 10.2в. На рис. 10.2б показан общий вид сечении и его верхняя часть (заштрихованная), соответствующая рассматриваемому участку балки. Напряжениям σ, σ + dσ и τ соответствуют следующие силы, направленные вдоль оси балки:

$$N = \int_{(A)} \sigma \, dA = \int_{(A)} \frac{My_1}{J_z} \, dA = \frac{M}{J_z} \int_{(A)} y_1 \, dA = \frac{M}{J_z} S_z^* ,$$

$$dN = \frac{dM}{J_z} S_z^*; dT = \tau b dx$$

где A и Sz - площадь заштрихованной на рис. 10.2б части сечения и ее статический момент относительно оси *Z*, b - ширина балки, соответствующая рассматриваемой части сечения.

Из условия равновесия рассматриваемой части балки следует равенство:

$$\tau b dx = \frac{dM}{J_z} S_z^*$$

Так как dM/dx = Q, то отсюда получаем формулу Д. И. Журавского для определения касательных напряжений:

$$\tau = \frac{QS_z^*}{bJ_z} \quad (10.1)$$

Определение касательных напряжений для балок с несимметричным профилем сечения рассмотрим на примере консольной балки коробчатого сечения (рис. 10.3а).

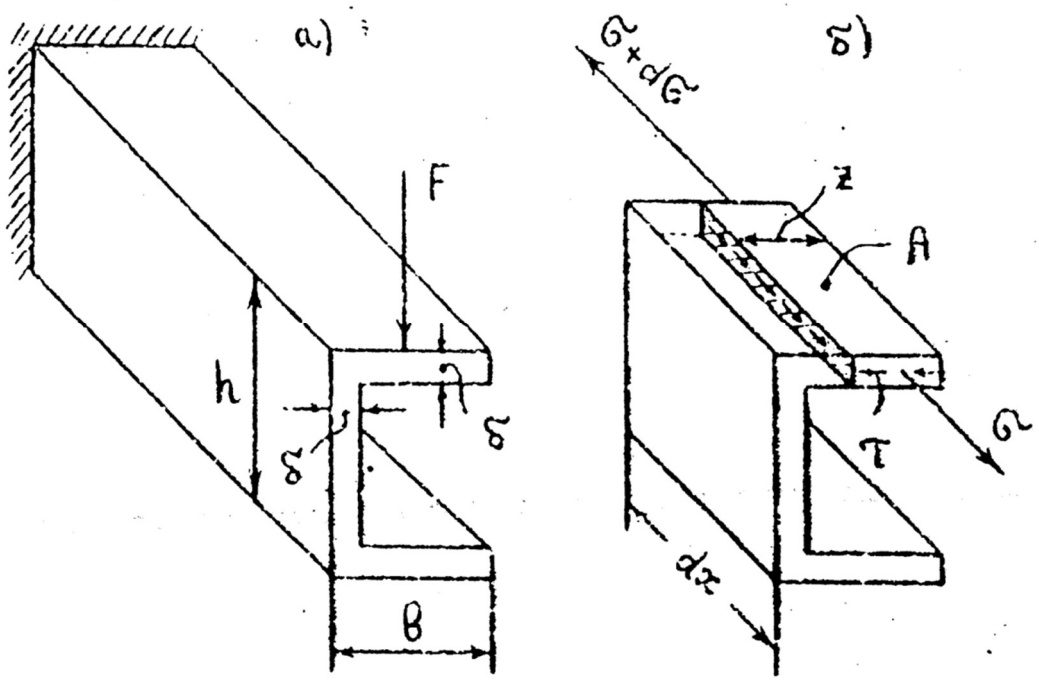


Рис. 10.3

Выделим на участке балки длиной dx продольный элемент А шириной z (рис. 10.3б). Аналогично предыдущему устанавливаем, что в продольных и поперечных сечениях балки возникают касательные напряжении τ, которые можно определить по формуле. (10.1). Для этого в форму (10.1) нужно подставить значения поперечной силы Q = F, момента инерции $\boldsymbol{J_z}$ и соответствующее значение статического момента площади $\boldsymbol{S_z^*}$.

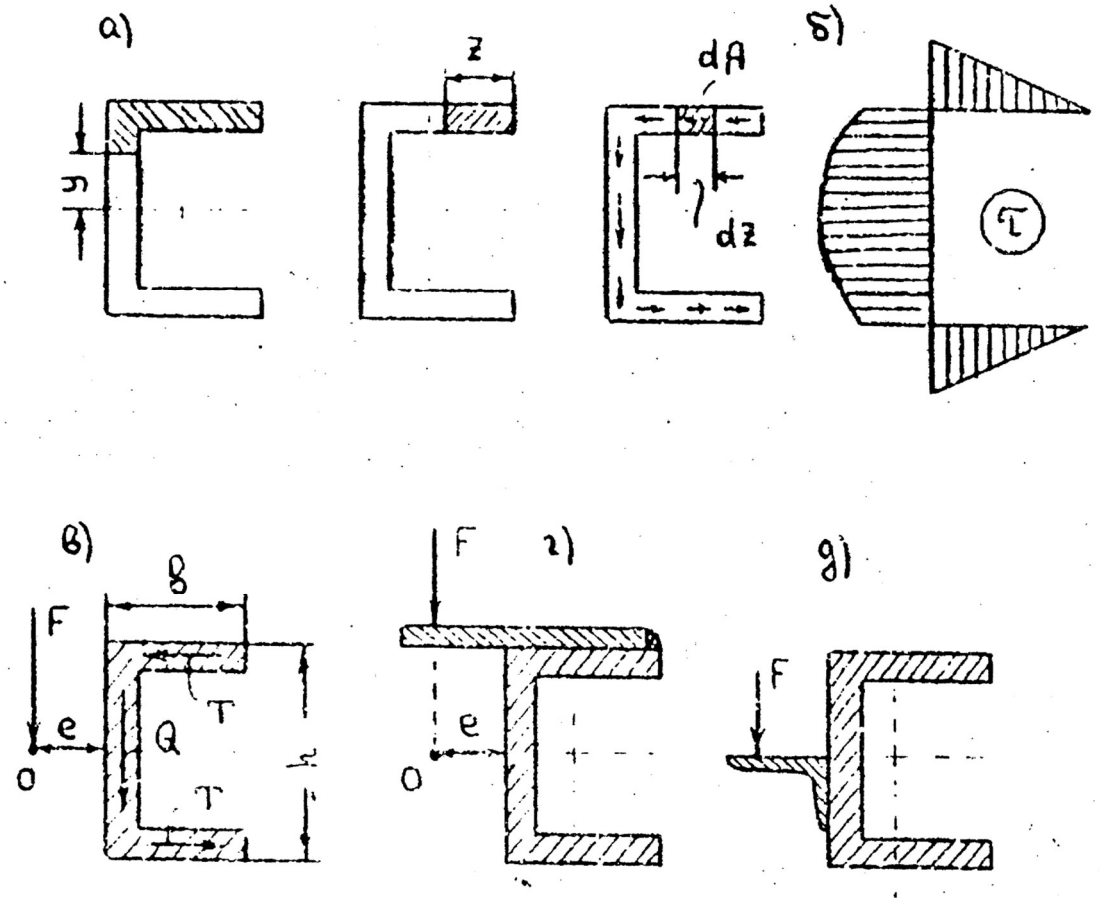


Рис. 10.4

Момент инерции:

$$J_z = \frac{\delta h^2}{12}(h + 6b)$$

Статический момент для части сечения, определяемого координатой Z (рис. 10.1а)

$$S_z^* = \frac{1}{2}\,\delta hz, (0 \le z \le b)$$

Соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{6Fz}{\delta h(h + 6b)}$$

Статический момент для части сечения, определяемого координатой У (рис. 10.1а)

$$S_z = \frac{1}{2}\,\delta\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2\right), (0 \le y \le \frac{h}{2})$$

Соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{6F\left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\delta h^2(h + 6b)}$$

Максимальное касательное напряжение получаем при У = 0:

$$\tau_{max} = \frac{3F(h + 4b)}{2\delta h(h + 6b)}$$

Касательных напряжений представлена на рис. 8.4б.

Вычислим теперь равнодействующие внутренних усилий на полках (T) и на стенке (Q) (рис. 10.4в).

$$T = \int \tau\, dA = -\frac{6F}{h(h + 6b)}\int_0^b z\, dz = \frac{3Fb^2}{h(h + 6b)}; Q = \int_0^{h/2} \tau\, dA = F$$

Внутренние усилия T и Q дают момент, равный нулю относительно точки O, удаленной от полки на некоторое расстояние e. Это расстояние определяется из уравнения равновесия Th = Fe.

Отсюда получаем

$$e = \frac{Th}{F} = \frac{3b^2}{h + 6b}$$

Если линия действия внешней силы F не проходит через точку O, то сила F создает крутящий момент. Стержень закручивается, и в сечении возникают дополнительные касательные напряжения. Кручения не будет, если линия действия силы F проходит через течку O. Эта точка называется центром изгиба. Два варианта конструктивных решений, обеспечивающих изгиб без кручения показаны на рис. 10.4г, д.

Лекция 11. Определение перемещений при изгибе по методу Мора и Верещагина.

Рассмотрим метод определения перемещений при изгибе, применимый как к прямолинейным, так и к криволинейным балкам. Пусть, например, требуется определить перемещение точки А в криволинейной балке, показанной на рисунке 11.1 в направлении оси Y

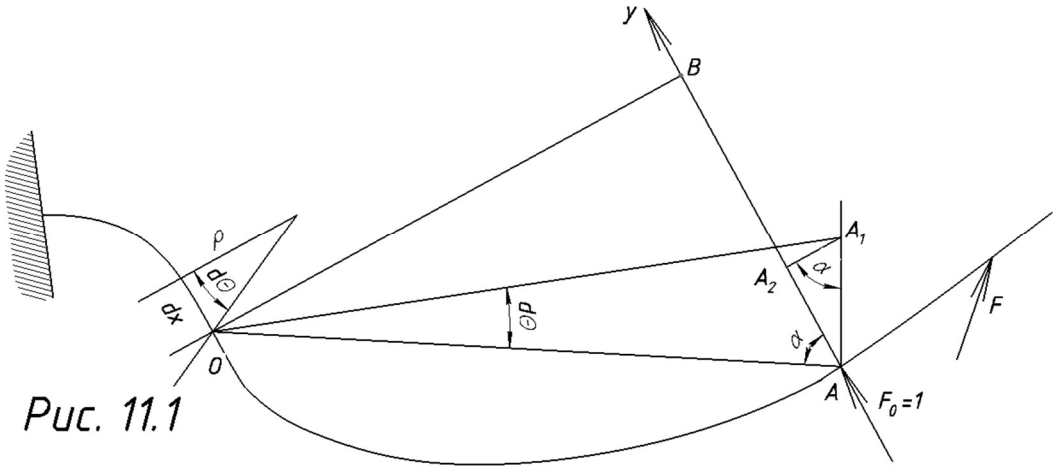


Рис. 11.1

чений р

и на ось Y перемещение.

$$d\delta = AA_2 = AA_1 * \sin\alpha = OA * d\theta * sin\alpha = OB * d\theta;$$

Величина отрезка ОВ численно равна моменту единичной безразмерной силы F_0=1, приложенной в точке А в направлении Y. Этот момент обозначен через М. Тогда:

_____

Суммируя полученные приращения _____ по всей длине балки, получим следующую форму ___, для определения перемещений при изгибе:

_____

эту формулу можно использовать и для определения углов поворота сечения балки при изгибе. _____ сила F_0 = 1 занимается на единичные безразмерный момент M_0 = 1.

На конце балки прикладываем единичную силу F_0=1, и вычисляем изгибающие моменты от сил F и F_0 в сечении балки с координатой x. Подставляем эти моменты в формулу (11.1), получаем:

$$\delta = \frac{F}{EJ} * \int_0^l x^2 dx = \frac{F*l^3}{3EJ}$$

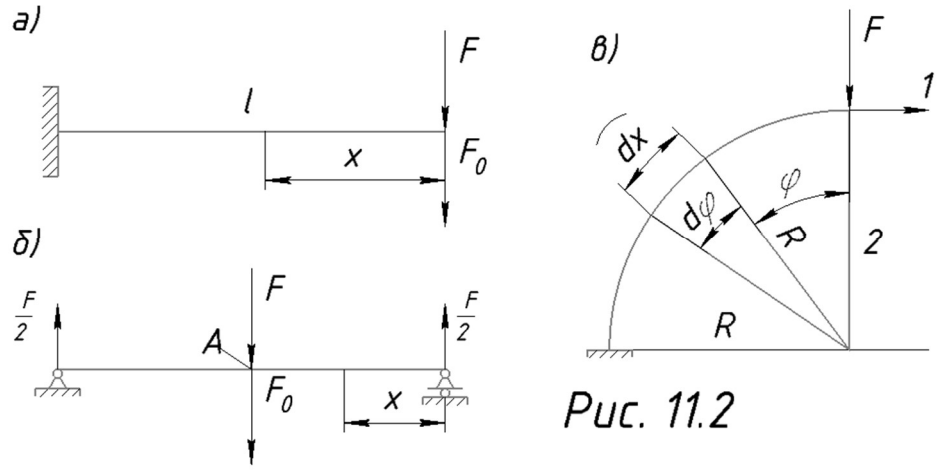


Рис. 11.2

$$\delta = \frac{F * l^3}{42\,EJ};$$

Пусть для криволинейной балки, показанной на рис. 11.2(в) , требуется вычислить перемещения её конца в направлениях 1 и 2. На конце баки в заданных направлениях прикладываем единичные силы и вычисляем изгибающие моменты в сечении, определяемом угловой координатой ф. Для первого случая получаем:

$$M = FR * sin\varphi; \qquad M_0 = R(1 - \cos\varphi);$$

Для второго случая:

$$M = FR * sin\varphi; \qquad M_0 = R\sin\varphi;$$

Соответствующие перемещения будут:

$$\delta_1 = \frac{FR^3}{EJ} * \int_0^{\pi/2} sin\varphi * (1 - cos\varphi)d\varphi = \frac{FR^3}{2EJ};$$

$$\delta_2 = \frac{\pi FR^3}{4EJ};$$

Заметим теперь, что для прямолинейных балок эпюры изгибающих моментов М и M_0 можно разбить на участки, в которых эпюра М будет ограничена плавной кривой, а эпюра M_0 – прямой линией (рис. 11.3). При постоянной жесткости сечений балки это обстоятельство значительно упрощает вычисление интеграла. (11.1)

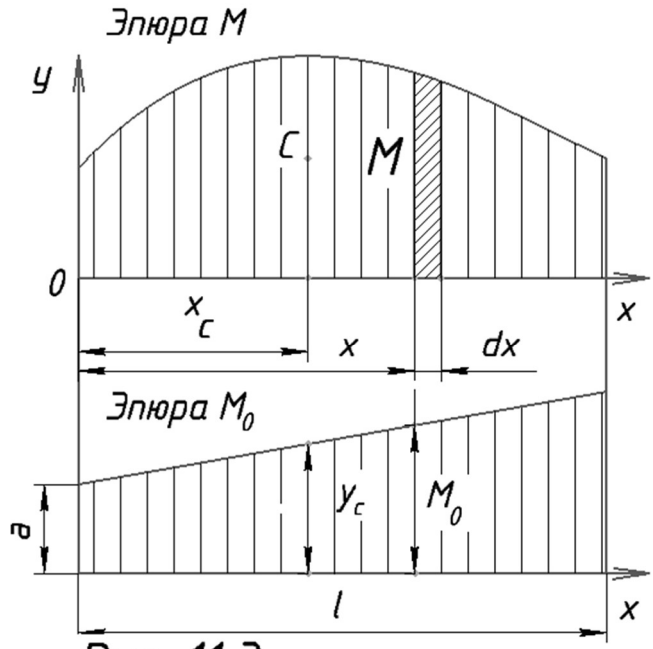


Рис. 11.3

е балки (рис.11.3).

ветствующая моменту М ордината на эпюре M_0 $M_0 = a + x * tg\alpha$, где а- наименьшее значение М, α – угол наклона эпюры М к оси х.

Введенные соотношения позволяют записать формулу (11.1) в следующем виде:

$$EJ\delta = \int (a + x * tg\alpha)\, dA = a * A + S_y * tg\alpha = A * (a + x_c * tg\alpha) = A * y_c,$$

где А- площадь эпюры М, $S_y = \int xdA$ – статический момент площади эпюры М относительно оси Y, x_c – координата центра тяжести эпюры М, $y_c = a + x_c * tg\alpha$ – значение момента на эпюре М, соответствующее центру тяжести эпюры М.

Соотношение (11.6) называется формулой Верещагина.

Лекция 12. Расчеты на прочность и жесткость при сложном нагружении

Расчеты на прочность и жёсткость при сложном нагружении

Нагружение стержней называется сложным, если в них одновременно возникают несколько внутренних силовых факторов.

12.1. Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид нагружения, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает с одной из главных плоскостей инерции.

Рассмотрим такой изгиб на примере консольной балки, нагруженной на конце моментом M (Рис. 12.1). Разложим этот момент на соответствующие M_x и M_y и вычислим напряжения в точке с координатами (x, y):

$$\sigma(x, y) = M\left(\frac{y}{J_x}\cos\varphi + \frac{x}{J_y}\sin\varphi\right)$$

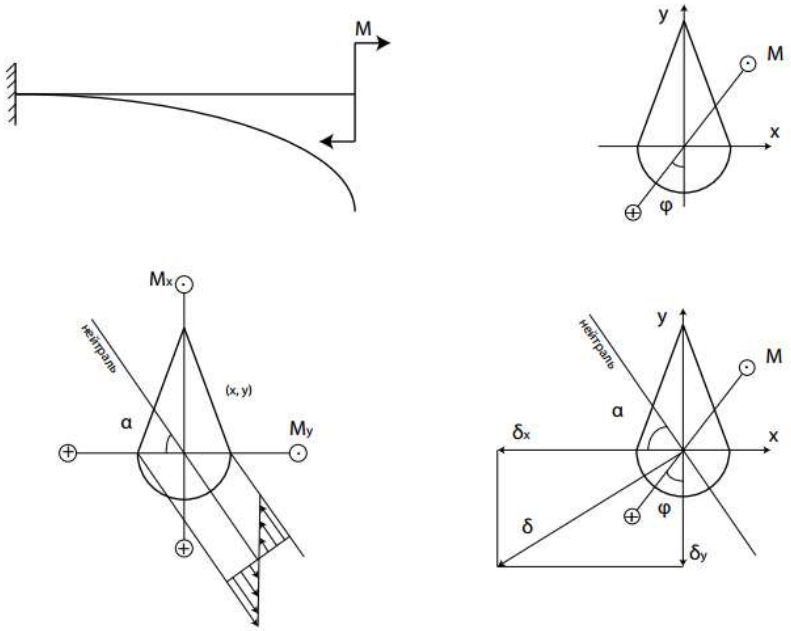


Рис. 12.1

Линия, на которой напряжения равны нулю, называется нейтральной линией или нейтралью. Ее уравнение получаем из соотношения (12.1) при $\sigma = 0$:

$$\left(\frac{\cos\varphi}{J_x}\right)y + \left(\frac{\sin\varphi}{J_y}\right)x = 0$$

Из выражения (12.2) следует, что нейтраль представляет собой прямую линию, проходящую через центр тяжести сечения и наклоненную к оси x на угол α, определяемы из уравнения:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x} = \frac{J_x}{J_y}\operatorname{tg}\varphi$$

Полное перемещение δ конца балки равно векторной сумме перемещений δ_x и δ_y, возникающих от действия моментов M_x и M_y:

$$\delta_x = \frac{M_y l^2}{2EJ_y}$$

$$\delta_y = \frac{M_x l^2}{2EJ_x}$$

Угол α_0 между осью y и перемещением δ будет определяться из уравнения:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\delta_x}{\delta_y} = \frac{J_x}{J_y}\operatorname{tg}\varphi$$

Сравнивая выражения (12.3) и (12.4), заключаем, что $\alpha = \alpha_0$. Отсюда следует, что перемещения при косом изгибе происходит по линии, перпендикулярной нейтрали.

Контрольная задача

Консольный стержень с треугольным сечением, показанный на рис. 12.2а, нагружен вертикальной силой F. При этом перемещение δ центра тяжести сечения будет отклонено вправо.

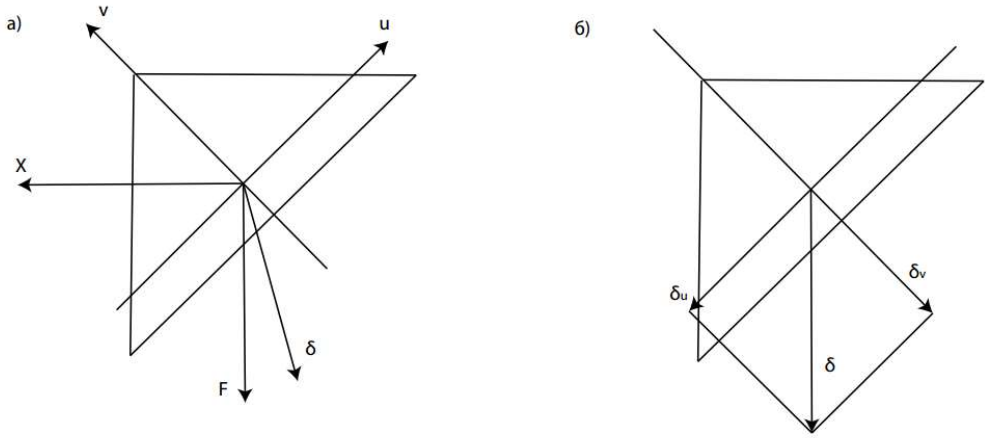


Рис. 12.2

+

Требуется найти горизонтальную силу X, при которой такого отклонения не будет, т.е. будем иметь $\delta_u = \delta_v$ (рис. 12.2б). Поскольку осевые моменты инерции треугольника относительно его главных осей инерции u, v отличаются в три раза, то имеем равенство:

$$3(F - X) = 1(F + X)$$

Отсюда находим:

$$X = \frac{1}{2}F$$

12.2. Изгиб с растяжением и сжатием

Одновременное воздействие на стержень изгиба и растяжения (или сжатия) рассмотрим на примере внецентренно растянутого стержня (рис. 12.3). Систему координат выберем таким образом, чтобы оси y и z были главными центральными осями инерции сечения.

Обозначим координаты точки приложения силы F через y_0 и z_0. Тогда относительно главных осей инерции y и z возникают изгибающие моменты $M_y = Fz_0$ и $M_z = Fy_0$, а вдоль оси X - растягивающая сила $N = F$.

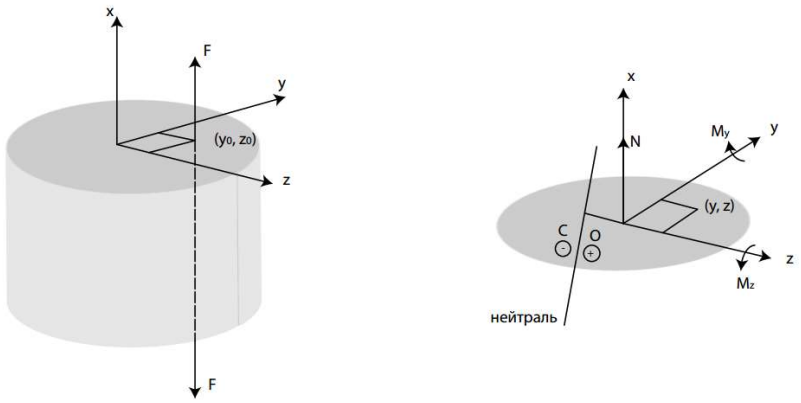


Рис. 12.3

Напряжения в точке с координатами $\{y, z\}$ будут равны сумме напряжений, возникающих в этой точке от каждого из трех силовых факторов:

$$\delta = \frac{F}{A} + \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y},$$

где A - площадь сечения, J_y и J_z - главные моменты инерции.

Напряжения в сечении стержня могут быть как положительными, так и отрицательными. Линия, на которой напряжения равны нулю, называется нейтральной линией, или нейтралью. Уравнение этой линии находим из выражения (12.5), полагая в нем $\sigma = 0$.

$$\frac{y_0}{J_z} y + \frac{z_0}{J_y} z + \frac{1}{A} = 0$$

Из уравнения (12.6) следует, что нейтральная линия представляет собой прямую, не проходящую через центр тяжести сечения.

Найдем расстояние межу нейтральной линией и началом координат. Для этого воспользуемся следующими соотношениями, известными из аналитической геометрии.

Если уравнение прямой в системе координат YOZ задано в виде:

$$ay + bz + c = 0,$$

то эта прямая проходит от начала координат на расстоянии (рис. 12.3)

$$OC = \frac{C}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Для нашего случая расстояние между нейтралью и началом координат равно отрезку

$$OC = \frac{1}{A\sqrt{\left(\frac{y_0}{J_z}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{J_y}\right)^2}}$$

Если внешняя сила приложена в центре тяжести сечения, т.е. если $z_0 = y_0 = 0$, то происходит чистое растяжение, а нейтраль удалена в бесконечность ($OC = \infty$). Если же сила расположена в бесконечности, т.е. если $z_0 = y_0 = \infty$,

то происходит чистый изгиб стержня, и нейтраль проходит через центр тяжести сечения ($OC = 0$).

Таким образом, нейтраль может пересекать сечение и быть вне его. Существует область около центра тяжести сечения обладающая тем свойством, что если в ней прикладывать силы, то напряжения во всем сечении будут оставаться одного знака. Если сила приложена на границе этой области, то нейтраль касается сечения.

Область, обладающая этим свойством, называется ядром сечения.

Определим ядро сечения для круга и прямоугольника. Пусть внешняя сила приложена в точке круга с координатами $z_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ и нейтраль при этом касается сечения (рис. 12.4а). Подставляя в формулу (12.7) величины $OC = R$, $A = \pi R^2$, $J = \frac{\pi R^4}{4}$, устанавливаем, что $r = \frac{R}{4}$.

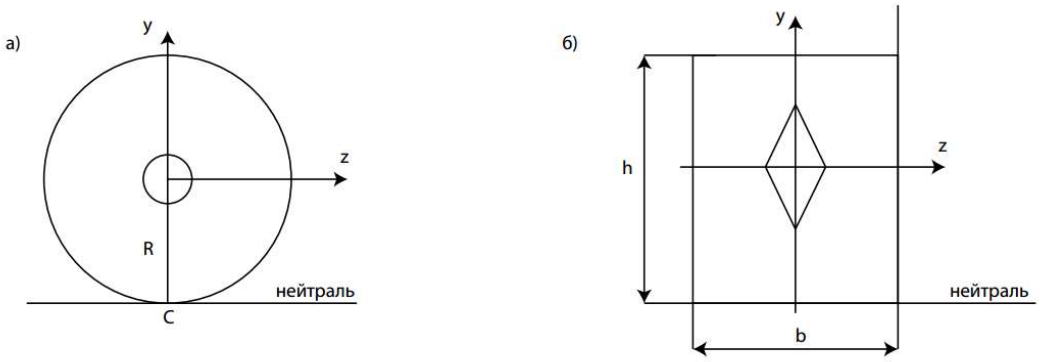


Рис. 12.4

Таким образом, ядро сечения для круга есть круг с радиусом, равным одной четверти радиуса сечения.

Пусть в прямоугольнике внешняя сила приложена в точке с координатами $z_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, а нейтраль при этом проходит через его основание (рис. 12.4б).

Подставляя в соотношение (12.7) величины: $OC = \frac{h}{2}$, $A = bh$, $J = \frac{bh^3}{12}$, устанавливаем, что $y_0 = \frac{h}{6}$.

Если внешняя сила приложена на оси z, то нейтраль проходит через сторону CD тогда, когда $z_0 = \frac{b}{6}$.

Таким образом, ядро сечения для прямоугольника есть ромб с полуосями $\frac{h}{6}$ и $\frac{b}{6}$.

Контрольная задача

Определить перемещения $y = y(x)$ для внецентренно нагруженного стержня, показанного на рис. 12.5.

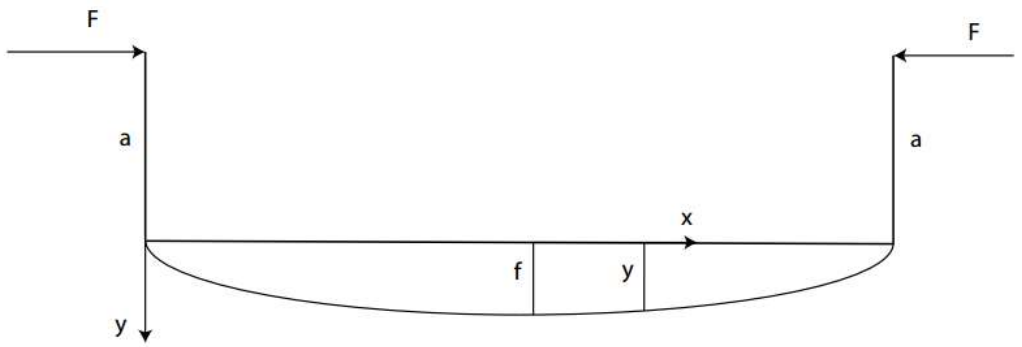


Рис. 12.5

Дифференциальное уравнение упругой линии балки получаем в виде:

$$EJ\ddot{y} = -F(a + y)$$

Примем, что $y \approx f \sin\frac{\pi x}{l}$; $\ddot{y} = -f\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$,

Где f – максимальный прогиб балки.

Обозначим $F_0 = EJ\frac{\pi^2}{l^2}$ и запишем уравнение (12.8) при $x = \frac{l}{2}$ и $y = f$:

$$-F_0 f = -F(a + f)$$

Отсюда находим $f = \frac{Fa}{F_0 - F}$

При $F \to F_0$ $f \to \infty$.

Лекция 13. Энергетические теоремы о перемещениях

Рассмотрим элемент конструкции, нагруженный силами F_i $(i = 1, 2, ..., n)$, моментами M_j $(j = 1, 2, ..., m)$ и внутренним (или наружным) давлением q, показанный на рис 13.1

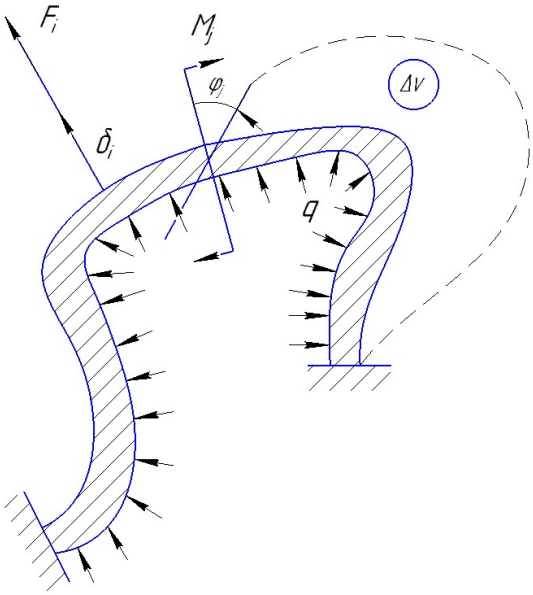


Рис.13.1

В сечениях элемента конструкции возникают шесть силовых факторов : нормальная сила N, изгибающие моменты M_y и M_z, момент кручения $M_{кр}$ и поперечные силы Q_y и Q_z .

Полная потенциальная энергия системы без учёта малозначимых при определении перемещений сил Q_y и Q_z будет определяться по формуле:

$$П = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + \int_0^l \frac{M_{кр}^2 dx}{2GJ_{кр}} \qquad (13.1)$$

где l – длина элемента конструкции.

Обозначим через δ_i - перемещение в точке приложения силы F_i по направлению её действия, φ_j - угол поворота сечения j в направлении действия момента M_j, ΔV - изменение объёма под действием давления q.

Имеем : $F_i = c_i \delta_i$, $M_j = c_j \varphi_j$, $q = c_V \Delta V$, где c_i, c_j, c_V - соответствующие жёсткости.

С учётом этих соотношений, работу A внешних сил можно представить в следующих трёх видах, представляющих теорему *Клапейрона:*

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} M_j \varphi_j + \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \delta_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} c_j \delta_j^2 + \frac{1}{2}(\Delta V)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2}{c_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \frac{M_j^2}{c_j} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c_V}$$

Полагая $A = П$ и опустив нижние индексы, вычислим производные от $П$ по F, M и q. Получим формулы *Кастилиано* для определения перемещений:

$$\frac{\partial П}{\partial F} = \delta; \qquad \frac{\partial П}{\partial M} = \varphi; \qquad \frac{\partial П}{\partial q} = \Delta V$$

Вычислив производные от $П$ по δ, φ и ΔV, получим формулы *Лагранжа* для определения внешних воздействий :

$$\frac{\partial П}{\partial \delta} = F, \qquad \frac{\partial П}{\partial \varphi} = M, \qquad \frac{\partial П}{\partial (\Delta V)} = q$$

Рассмотрим теперь теорему *Бетти* о «взаимности работ» на примере элемента конструкции, нагруженного силами $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ в точках 1 и 2 (рис. 13.2).

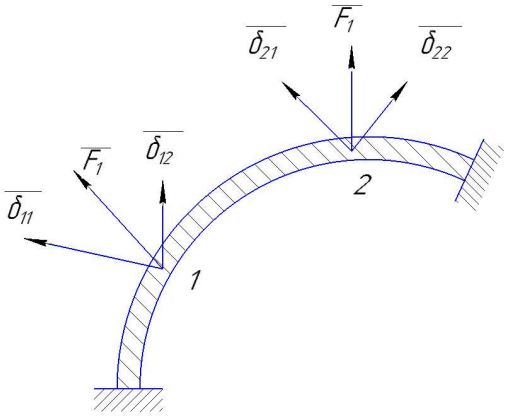


Рис.13.3

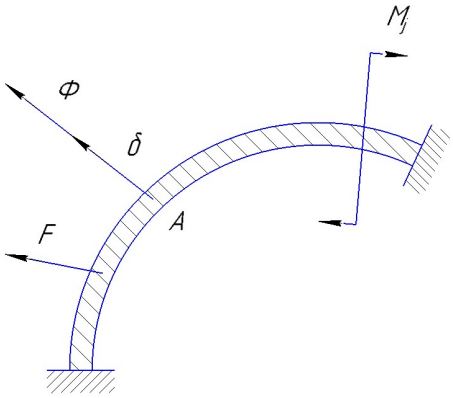


Рис. 13.2

Перемещение в направлении i $(i = 1,2)$ от единичной безразмерной силы $\overrightarrow{F_0} = 1$, действующей в направлении j $(j = 1,2)$, обозначим как $\overrightarrow{\delta_{ij}}$.

Вначале приложим силу $\overrightarrow{F_1}$, а затем силу $\overrightarrow{F_2}$ и вычислим работу A_1 этих сил на соответствующих перемещениях:

$$A_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\delta_{11}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{\delta_{22}} + \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\delta_{12}}$$

где точка означает скалярное произведение векторов.

Изменим порядок приложения сил. Теперь вначале приложим силу $\overrightarrow{F_2}$, а затем силу $\overrightarrow{F_1}$ и вычислим работу A_2 этих сил на соответствующих перемещениях

$$A_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{\delta_{22}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\delta_{11}} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{\delta_{21}}$$

Из условия $A_1 = A_2$ получаем равенство :

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\delta_{12}} = \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{\delta_{21}} \tag{13.2}$$

выражающее теорему *Бетти* о взаимности работ.

В скалярном виде имеем:

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21} \tag{13.3}$$

где δ_{12} - перемещение в направлении силы F_1 от действия силы F_2,
δ_{21} - перемещение в направлении силы F_2 от действия силы F_1.

Отсюда, при $F_1 = F_2$ получаем теорему *Максвелла* о «взаимности перемещений», выраженную соотношениями:

$$\delta_{12} = \delta_{21} \text{ или } \delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{13.4}$$

Вместо пары сил F_1 и F_2 приложим силу F и момент M. Теорема о взаимности работ будет выражаться соотношением (13.3)

$$F\delta_M = M\varphi_F \tag{13.5}$$

где δ_M - перемещение в направлении силы F от действия момента M,
δ_F - перемещение в направлении силы M от действия момента F.

Для пары воздействий F и q имеем равенство:

$$F\delta_q = q(\Delta V)_F \tag{13.6}$$

где δ_q - перемещение в направлении силы F от давления q, $(\Delta V)_F$ - изменение объёма под воздействием силы F.

Для определения перемещений в точках, где нет внешних воздействий теорему *Кастилиано* применяют для фиктивно приложенной силы Φ, при условии , что $\Phi = 0$ (теорема *Максвелла*), т.е. используют формулу (13.3)

(13.7)

Силу Φ представляют в виде $\Phi = F_0\Phi$, где $F_0 = 1$ - безразмерная единичная сила.

Внутренние силовые факторы от силы $F_0 = 1$ обозначают с индексами 1 снизу. При учёте только изгибающего и крутящего моментов имеем:

$$M = M_F + M_1\Phi;\ M_{кр} = M_{крF} + M_{кр1}\Phi \tag{13.8}$$

где M_F и $M_{кр}$ - изгибающий момент и момент кручения от <u>всех</u> внешних сил.

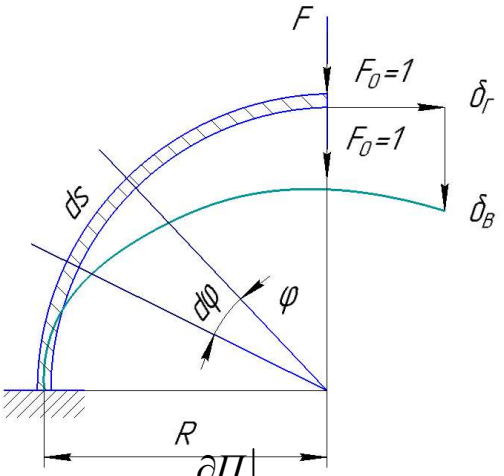
Подставив (13.8) в (13.7), получим формулу *Максвелла* для определения перемещений:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_F M_1}{EJ}dx + \int_0^l \frac{M_{крF} M_{кр1}}{GJ_K}dx + \ldots \tag{13.9}$$

где точки справа указывают возможность аналогичного учёта всех шести внутренних силовых факторов.

Контрольные задачи

Задача 1. Для криволинейного стержня с жёсткостью EJ, показанного на рис 13.4 требуется определить перемещение в т.А при действии силы F



$$\delta = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi}\Big|_{\Phi=0}$$

Рис 13.4

Искомое перемещение будет состоять из перемещения вправо $\delta_Г$ и перемещения вниз. В сечении с угловой координатой φ имеем изгибающий момент $M_F = FR\sin\varphi$. Для определения δ_B приложим вниз силу $F_0 = 1$ и определим $M_1 = R\sin\varphi$. Для определения $\delta_Г$ приложим вправо силу $F_0 = 1$ и определим $M_2 = R(1-\cos\varphi)$.

Получаем :

$$\delta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F M_1}{EJ}d\varphi = \frac{\pi}{4}\frac{FR^3}{EJ}$$

$$\delta_{\Gamma} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F M_2}{EJ} d\varphi = \frac{1}{2}\frac{FR^3}{EJ}$$

Задача 2. Для разрезанного снизу кольца, с жёсткостью сечений на изгиб EJ и кручение GJ_K, показанного на рис. 13.5, определить раскрытие нижнего зазора «из плоскости» под действием двух сил F, приложенных нормально к плоскости кольца.

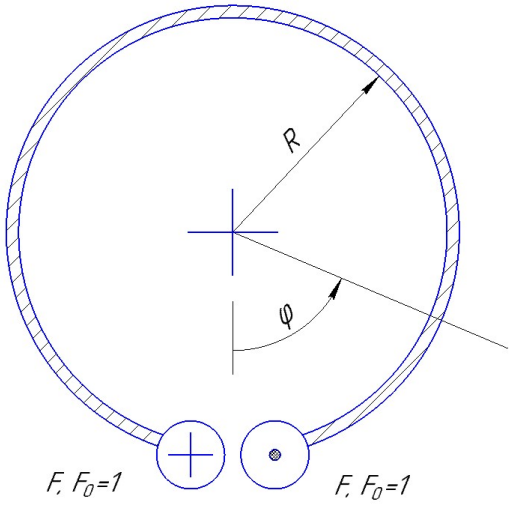


Рис.13.5

В сечении с угловой координатой φ возникает изгибающий момент $M_F = FR\sin\varphi$ и крутящий момент $M_{кр} = FR(1-\cos\varphi)$. Соответствующие моменты от единичных сил $F_0 = 1$ будут $M_1 = R\sin\varphi$ и $M_2 = R(1-\cos\varphi)$.

Искомое раскрытие зазора будет вычисляться по формуле

$$\delta = \frac{FR^3}{EJ}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi + \frac{FR^3}{GJ_K}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \pi\frac{FR^3}{EJ} + 3\pi\frac{FR^3}{GJ_K}$$

Лекция 14. Расчёты на прочность при сложном напряженном состоянии

14.1 Теория напряжений

Рассмотрим в деформируемом теле бесконечно малый объём материала в виде куба и отметим на его гранях все возможные девять напряжений(рис 14.1). Они будут представлены следующей матрицей значений (тензором напряжений).

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (14.1)$$

Из условий равновесия следует, что, если известны эти девять напряжений для какого-либо расположения элементарного куба, то могут быть определены соответствующие девять напряжений и для любого другого расположения этого куба (рис.14.1, б).

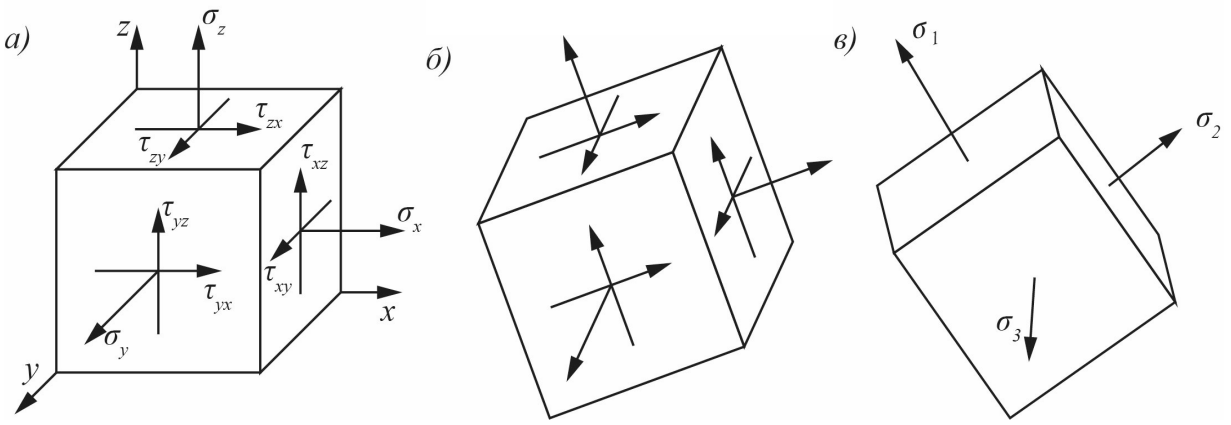


Рис 14.1

Таким образом, тензор напряжений (14.1) полностью характеризует напряженное состояние точке. Можно ещё показать, что существует такое расположение куба, при котором на его гранях действуют только нормальные напряжения (рис. 14.1, в). Эти напряжения называются главными напряжениями, а площадки, в которых они действуют, - главными площадками. Главные напряжения обозначаются через σ_1, σ_2, σ_3, а индексы для них назначаются таким образом, чтобы напряжение σ_1 было наибольшим, а напряжение σ_3 – наименьшим. Три главных напряжения также полностью характеризуют напряженное состояние в точке.

При этом тензор напряжений (14.1) принимает вид

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

Рассмотрим теперь плоское напряженное состояние, и вместо элементарного куба будем рассматривать бесконечно малый квадрат, на сторонах которого заданы три напряжения: σ_x, σ_y и τ (рис 14.2а). Определим напряжения σ_α, σ_β, τ_α, τ_β на сторонах квадрата, повёрнутого против часовой стрелки относительно заданного на произвольный угол α (рис. 14.2б).

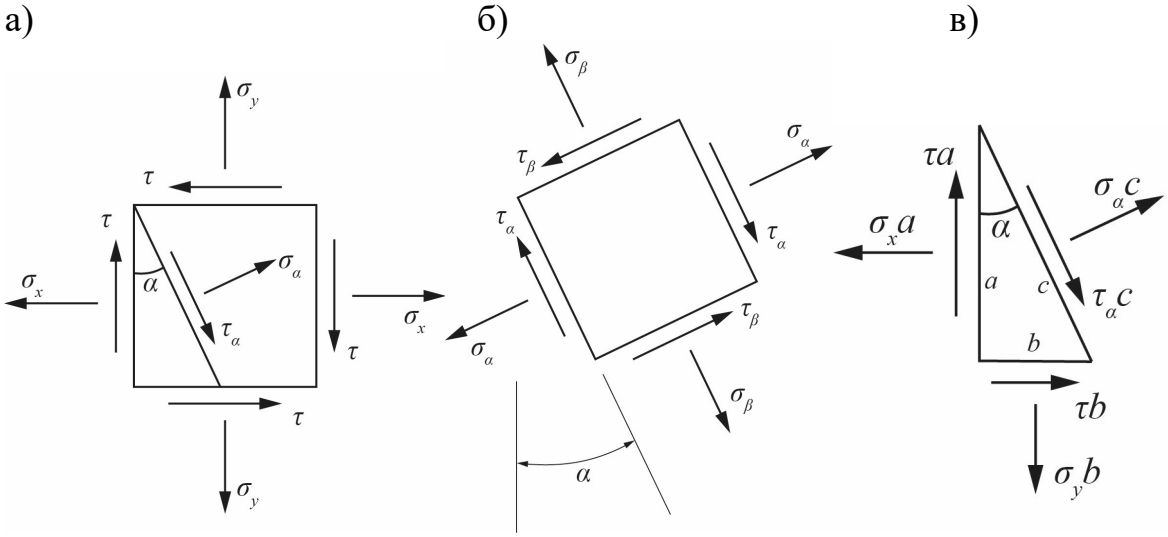


Рис. 14.2

Для этого рассмотрим треугольную призму с толщиной 1, показанную на рис 14.2в. На её сторонах отметим силы, обусловленные действующими

напряжениями, и составим уравнения равновесия в проекциях всех сил на направления σ_α и τ_α:

$$\sigma_\alpha \, c + \tau a \sin(\alpha) + \tau b \cos(\alpha) - \sigma_y \, b sin(\alpha) - \sigma_x \, a cos(\alpha) = 0$$

$$\tau_\alpha \, c + \tau b \sin(\alpha) + \sigma_y \, b cos(\alpha) - \sigma_x \, a sin(\alpha) - \tau a \cos(\alpha) = 0$$

Отсюда получаем, что

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha) - \tau \sin(2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha) - -\tau \sin(2\alpha) \quad (14.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin(2\alpha) + \tau \cos(2\alpha) \quad (14.4)$$

Для определения σ_β и τ_β в выражениях (14.3) и (14.4) вместо угла α следует подставить угол $\beta = \alpha + 90°$. Тогда получим следующие формулы:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2(\alpha) + \sigma_y + \tau \sin(2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha) - +\tau \sin(2\alpha) \quad (14.5)$$

$$\tau_\beta = \tau_\alpha \quad (14.6)$$

Формула (14.6) выражает теорему о парности касательных напряжений: в двух взаимно перпендикулярных площадках возникают одинаковые по величине касательные напряжения.

Из соотношений (14.3) и (14.5) следует, что сумма нормальных напряжений на двух взаимноперпендикулярных площадках всегда остаётся постоянной и, если на какой-либо площадке напряжение достигает максимального значения, то на площадке, перпендикулярной к ней, напряжение будет минимальным:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{max} + \sigma_{min} = const \quad (14.7)$$

Нормальные напряжения принимают экстремальные значения при условии:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\frac{d\sigma_\beta}{d\alpha} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin(2\alpha) - 2\tau \cos(2\alpha) = -2\tau_\alpha = 0 \quad (14.8)$$

Из выражений (14.8) и (14.4) следует, что нормальные напряжения достигают экстремальных значений в тех площадках, в которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки будут главными площадками, а экстремальные напряжения в этих площадках σ_{max} , σ_{min} главными напряжениями. Эти напряжения обозначаются также через σ_1 и σ_2, или σ_1 и σ_3, или σ_2 и σ_3 в соответствии с принятым выше правилом для расстановки индексов.

Расположение главных площадок определяется углом α, вычисляемым из уравнения (14.8). Это уравнение имеет решение:

$$tg(2\alpha) = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (14.9)$$

Значения главных напряжений вычисляются по формулам (14.3) и (14.5) при подстановке них значения угла α из соотношения (14.9). После преобразования получим:

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (14.10)$$

14.2 Обобщённый закон Гука

Выше было показано, что напряженное состояние в точке можно задать тремя напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3. Этим напряжениям соответствуют три главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3. Вычислим эти деформации (рис.14.3).

Если действует только напряжение σ_1, то по закону Гука деформация в направлении напряжения σ_1 будет равна $\frac{\sigma_1}{E}$

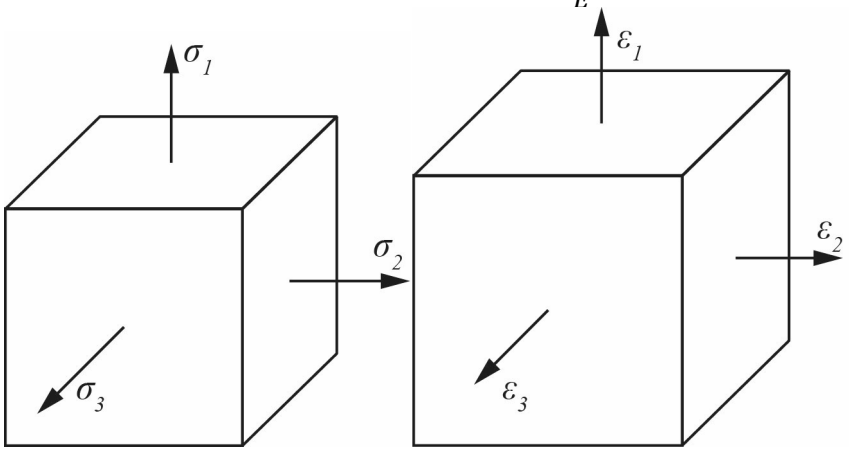


Рис. 14.3

Если действует только напряжения σ_2 или σ_3, то деформация в направлении напряжения σ_1 согласно закону Пуассона будет равна $\frac{-\mu\sigma_2}{E}$ или $\frac{-\mu\sigma_3}{E}$. Используя принцип независимости действия сил, получаем следующее выражение для определения деформации в направлении напряжения σ_1:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \qquad (14.11)$$

Аналогично определяются деформации в направлении напряжений σ_2 и σ_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) \qquad (14.12)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)) \qquad (14.13)$$

Соотношения (14.11)-(14.13) выражают обобщённый закон Гука.

14.3 Теории прочности

Определим теперь условия, при которых в материале могут возникнуть пластические деформации и начаться процессы разрушения.

Поскольку напряжение σ_1 является наибольшим, то условие появления пластических деформаций и условие прочности можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_т, \qquad (14.14)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \leq [\sigma], \qquad (14.15)$$

где [σ] – допускаемое напряжение при растяжении.

Соотношение (14.15) выражает первую теорию прочности – теорию наибольших нормальных напряжений. По этой теории наличие напряжений σ_2 и σ_3 не оказывает влияния на прочность материала.

По второй теории – теории наибольших деформаций считается, что условие прочности можно записать в виде:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \qquad (14.16)$$

где наибольшая деформация ε_{max} сравнивается с допустимой деформацией $[\varepsilon]$ при растяжении.

Подставив в (14.16) соотношение (14.11), получим следующее условие прочности

$$\sigma_э^{||} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \qquad (14.17)$$

где $\sigma_э^{||}$ - эквивалентное (или расчётное) напряжение по второй теории прочности.

По третьей теории прочности (теория наибольших касательных напряжений) считается, что пластические деформации могут наступить при превышении наибольшими касательными напряжениями уровня касательных напряжений, возникающих в растянутом стержне при появлении в нём пластических деформаций, т.е. условие прочности можно записать в виде

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Для определения наибольших касательных напряжений рассмотрим три наклонные площадки, отмеченные на рис.14.4 штриховкой. В соответствии с (14.4) напряжения в этих площадках определяются по формулам:

$$\tau_\alpha^{(1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin(2\alpha)\,; \tau_\alpha^{(2)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\sin(2\alpha)\,; \tau_\alpha^{(3)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin(2\alpha)\,; (14.18)$$

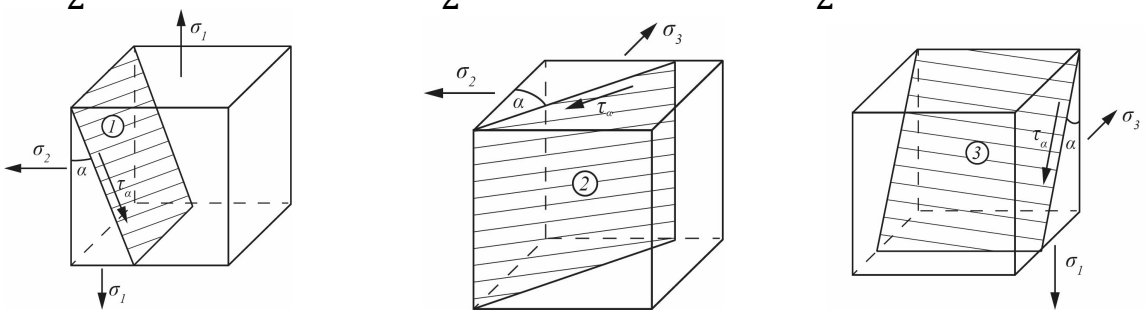


Рис 14.4

Наибольшие касательные напряжения возникают в третьей площадке при α=45°. Эти напряжения должны быть меньше наибольших допустимых касательных напряжений при растяжении. Это условие приводит к соотношению, выражающему третью теорию прочности:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

или

$$\sigma_э^{|||} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \qquad (14.19)$$

где $\sigma_э^{|||}$ - эквивалентное (расчётное) напряжение по третьей теории прочности.

Заметим, что при растяжении в направлении σ_1 с напряжением $[\sigma]$ касательные напряжения в площадках 1 и 3 равны $\frac{[\sigma]}{2}$, а во второй площадке – нулю. Тогда эквивалентность объёмного напряженного состояния и напряженного состояния при растяжении можно выразить соотношением:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2\left(\frac{[\sigma]}{2}\right)^2, \quad (14.20)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 определяются по формулам (14.18) при α=45°.

После преобразований условие (14.20) можно представить в виде четвертой теории прочности:

$$\sigma_э^{|V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma], \quad (14.21)$$

где $\sigma_э^{|V}$ – эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности.

Для материалов, у которых допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, условие прочности можно выразить следующим образом. Построим в системе координат $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ линию, соединяющую точки с координатами $\{\sigma_1, = [\sigma]_p,\ \sigma_3 = 0\}$ и $\{\sigma_3 = 0,\ \sigma_3 = -[\sigma]_{сж}\}$, где $[\sigma]_p$, $[\sigma]_{сж}$- допускаемые напряжения при растяжении и сжатии, соответственно (рис.14.5).

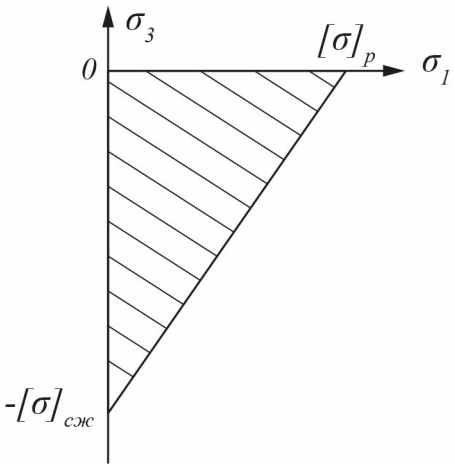


рис.14.5

Считается, что если точки с координатами $\{\sigma_1,\ \sigma_3\}$, будут расположены в заштрихованной на рис.14.5 области, то разрушения не произойдёт. Это условие описывается неравенством:

$$\frac{\sigma_1}{[\sigma]_p} - \frac{\sigma_3}{[\sigma]_{сж}} \leq 1,$$

или

$$\sigma_э = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p \quad (14.22)$$

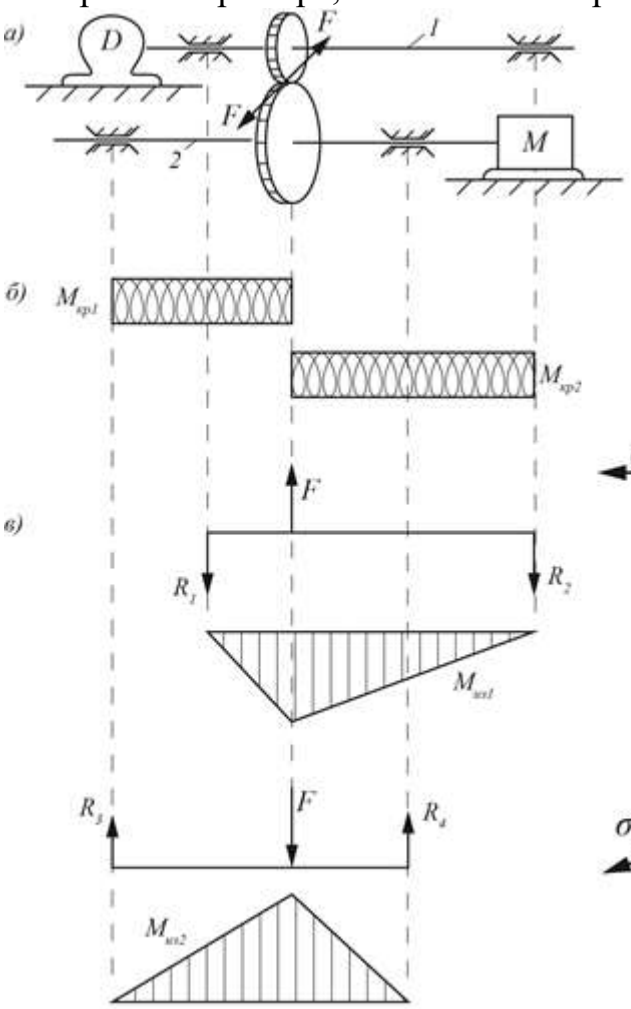
где

$$k = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$$

Теория прочности, выраженная соотношением (14.22), предложена О.Мором.

14.4 Расчёты на прочность при изгибе с кручением

Особенности расчёта валов, работающих на изгиб с кручением, рассмотрим на примере, показанном на рис.14.6.а. Здесь вращение на исполни-



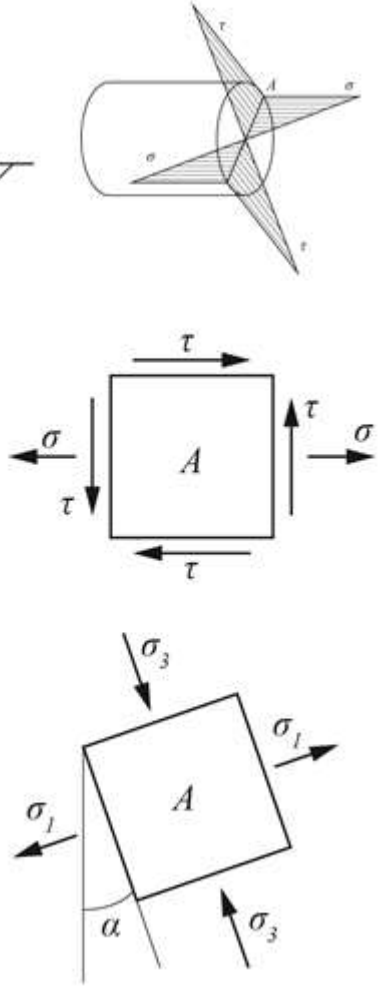


Рис. 14.6 Рис. 14.7

тельный механизм “М” от двигателя “Д” передаётся с помощью двух шестерён, расположенных на валах 1 и 2. Требуется произвести расчёт на прочность этих валов. Эпюры крутящих моментов для них показаны на рис. 14.6б. На рис 14.6,в показаны схемы нагружения и эпюры изгибающих моментов. Наиболее нагруженными оказываются сечения, где расположены шестерни. При этом от воздействия изгибающего момента возникают нормальные напряжения, а от воздействия крутящего момента – касательные напряжения. Эпюры этих напряжений показаны на рис.14.7,а. В наиболее опасной точке А возникают напряжения:

$$\sigma = \frac{M}{W};\ \tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{M_{\text{кр}}}{2W}$$

где W=0.1d^3 – осевой момент сопротивления, $W_p = 0.2d^3$ – полярный момент сопротивления сечения, d – диаметр сечения.

Напряженное состояние в точке А показано на рис.14.7,б. Главные напряжения показаны на рис.14.7,в. В соответствии с формулой (14.10), получаем следующее выражение:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

В соответствии с третьей теорией условие прочности получаем в виде:

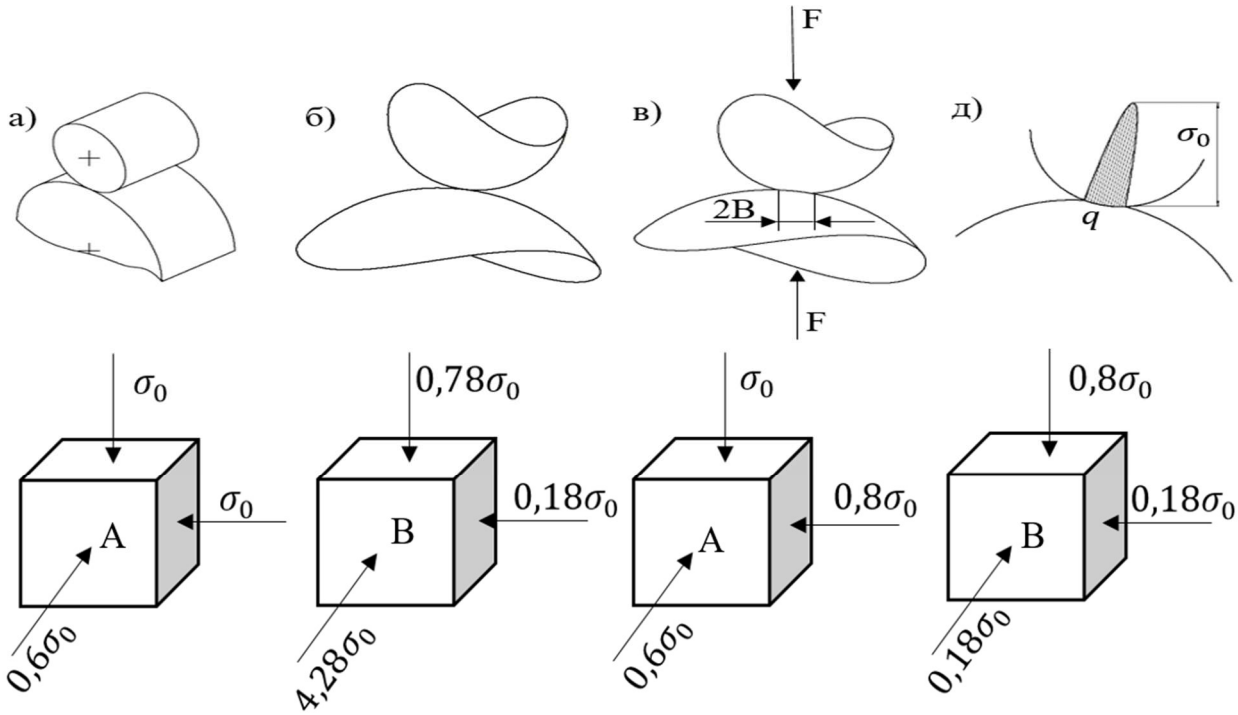
$$\sigma_э^{|||} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma],$$

где $M_э^{|||} = \sqrt{\mathrm{M}_{из} + \mathrm{M}_{кр}}$ – эквивалентный момент по третьей теории прочности.

Отсюда находим необходимый диаметр вала:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_э^{|||}}{0.1[\sigma]}}$$

В местах контакта деталей (зубьев шестерен, элементов шариковых и роликовых подшипников и т.п.) возникают напряжения, приводящие к смятию и выкрашиванию рабочих поверхностей. Рассмотрим два типа контакта: контакт цилиндрических поверхностей вдоль образующих (рис. 14.8а) и контакт шаров в точке (рис. 14.8б). Напряженно-деформированное состояние в зоне контакта характеризуется площадью контакта, контактным давлением и наибольшим эквивалентным напряжением.



Для контакта цилиндров Для контакта шаров

Рис. 14.8

При контакте цилиндров полуширина площадки контакта вычисляется по формуле:

$$l = 1{,}5\sqrt{\frac{F}{lE}\,\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

где F – приложенное сжимающее усилие, l – длина площадки контакта, R_1, R_2 – радиусы цилиндров.

Максимальное давление в зоне контакта

$$\sigma_{max} = 0{,}418\sqrt{\frac{FE}{l}\,\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}.$$

Наиболее опасное напряженное состояние возникает не на поверхности, а на некоторой глубине под площадкой контакта (см. точки А и В на рис. 14.8). В точке В эквивалентное напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_э^{III} = 0{,}6\,\sigma_{max}\,.$$

При контакте шаров радиус площадки контакта вычисляется по формуле

$$b = 1{,}1\sqrt[3]{\frac{F}{E}\,\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}.$$

Максимальное давление в зоне контакта

$$\sigma_{max} = 0{,}388\sqrt[3]{FE^2\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^2}\,.$$

Наиболее опасное напряженное состояние также возникает на некоторой глубине под площадкой контакта. В этой точке

$$\sigma_э^{III} = 0{,}62\,\sigma_{max}\,.$$

14.6 Расчет тонкостенных оболочек

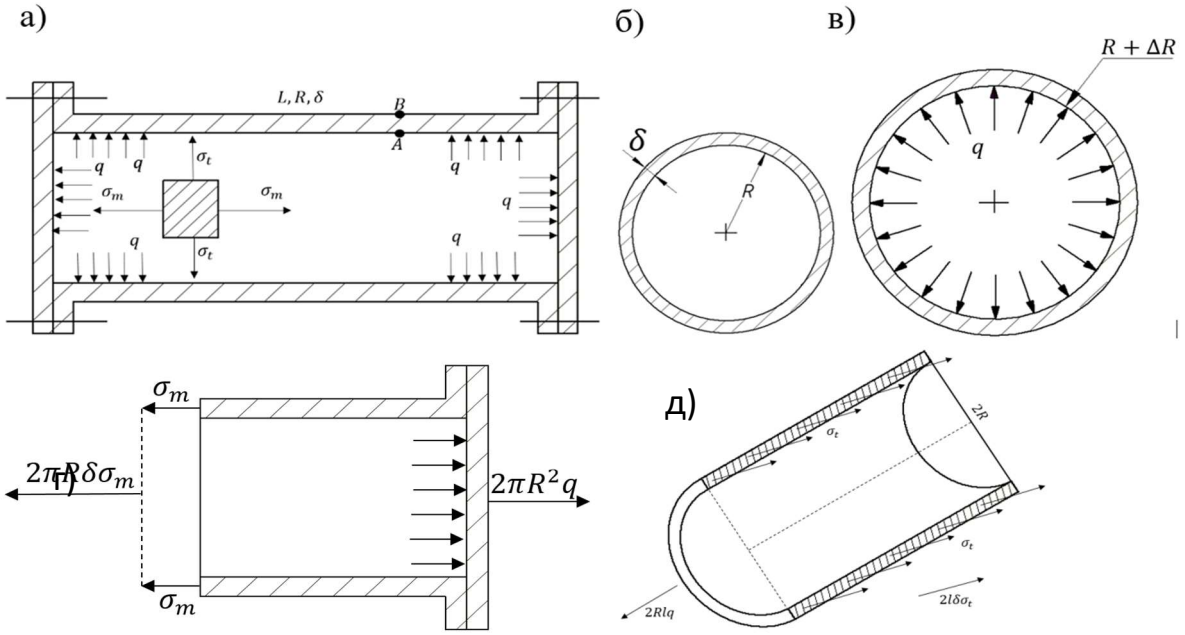


Рис. 14.9

Рассмотрим тонкостенную цилиндрическую оболочку, находящуюся под воздействием внутреннего давления q, показанную на рис. 14.9а.

В оболочке возникает меридиональное напряжение σ_m и тангенциальное напряжение σ_t. Напряжение σ_m определяется из условия равновесия отсеченной части оболочки, показанное на рис. 14.9г, а напряжение σ_t – из

условия равновесия части оболочки, показанной на рис. 14.9д. Из этих условий получаем формулы:

$$\sigma_m = \frac{qR}{2\delta};\ \sigma_t = \frac{qR}{\delta},$$

т.е. напряжение σ_t в два раза превышает напряжение σ_m и предопределяет возможное разрушение (появление трещин) вдоль оболочки.

Напряженное состояние на внутренней поверхности оболочки (в т.А) отличается от напряженного состояния на её наружной поверхности (в т. В). Для этих точек оно показано на рис. 14.10

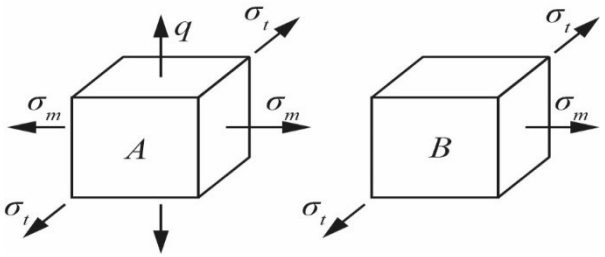


Рис. 14.10

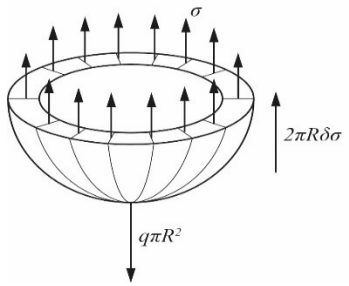


Рис. 14.11

Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_э^{III} = \sigma_t + q \le [\sigma].$$

Напряжения в сферической оболочке определяется из условия равновесия её части, показанной на рис. 14.11

Имеем $\sigma_t = \sigma_m = \sigma = \frac{qR}{2\delta}$.

14.7 Расчет толстостенных цилиндров

Рассмотрим толстостенный цилиндр, находящийся под воздействием наружного P_H и внутреннего $P_в$ давлений. Внутренний радиус цилиндра обозначим как $Г_в$, а наружного - $Г_H$ (рис. 14.12а)

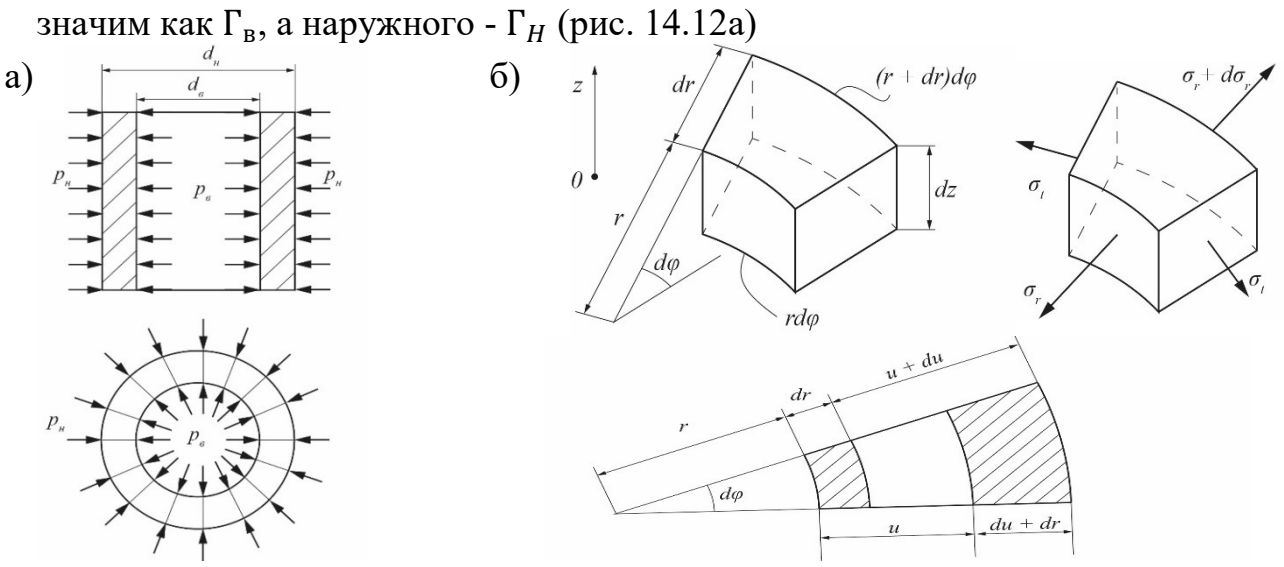


Рис. 14.12

В бесконечно малом объеме $(rd\varphi, (r + dr)d\varphi, dz)$ с радиальной координатой r возникают напряжения $\sigma_r, \sigma_r + d\sigma_r$ и σ_t (рис. 14.12б). Уравнение равновесия для бесконечно малого объема получаем в виде равенства суммы всех сил в направлении r.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi dz - \sigma_r r d\varphi dz - \sigma_t dr d\varphi = 0$$

или

$$r\frac{\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \ (14.22).$$

Радиальная ε_r и тангенциальная деформация ε_t рассматриваемого бесконечно малого объема будут вычисляться по формулам:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr};\ \varepsilon_t = \frac{u}{r},$$

где u – радиальное перемещение точки с координатой r.

Отсюда получаем уравнение совместности деформаций ε_r и ε_t.

$$\varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_t)}{dr} = r\frac{d\varepsilon_t}{dr} + \varepsilon_t \ (14.23)$$

В соответствие с обобщение закона Гука имеем:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) \qquad (14.24)$$

Подставляя (14.24) в (14.23), получаем уравнение совместности деформаций, выраженное в напряжениях

$$-r\frac{d\sigma_t}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \ (14.25)$$

Для определения напряжений σ_r и σ_t получили систему уравнений (14.22) и (14.25).

Вычтем из уравнения (14.22) уравнение (14.25), а затем сложим его с этим уравнение. Получим:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r + \sigma_t) = 0$$

$$r\frac{d}{dr}(\sigma_r - \sigma_t) + 2(\sigma_r - \sigma_t) = \frac{d}{dr}(r^2(\sigma_r - \sigma_t)) = 0$$

Отсюда имеем систему уравнений

$$\sigma_r + \sigma_t = c_1$$

$$\sigma_r - \sigma_t = c_2/r^2 \qquad (14.26)$$

где константы c_1и c_2 определяются из граничных условий: $r = r_в,\ \sigma = -P_в$; при $r = r_H,\ \sigma_r = -P_H$.

Решив систему уравнений (14.26), получим формулы для расчета искомых напряжений:

$$\sigma_{r,t} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2r^2},$$

где

$$\frac{c_1}{2} = \frac{P_В r_В^2 - P_H r_H^2}{r_Н^2 - r_В^2}$$

$$\frac{c_2}{2} = \frac{P_В - P_H}{r_Н^2 - r_В^2} r_Н^2 r_В^2.$$

Таким образом, задача о расчете напряжений для толстостенных цилиндров решена.

14.6 Расчет пластин

Основные три расчетные схемы круглых пластин с радиусом R и толщиной h показаны на рис 14.13. а, б. Данные пластины различаются условиями закрепления по контуру и нагрузками F[H] и P[Па]. Здесь w=w(r) – прогиб пластины в точках с координатой $0 \le r \le R,\ \theta = -\frac{dw}{dr}$ – угол наклона нормали в этих точках, Q – распределенная сила сдвига, $M_r,\ M_t$ – распределенные изгибающие моменты в радиальном и тангенциальном направлениях, покаранных на рис. 14.14.

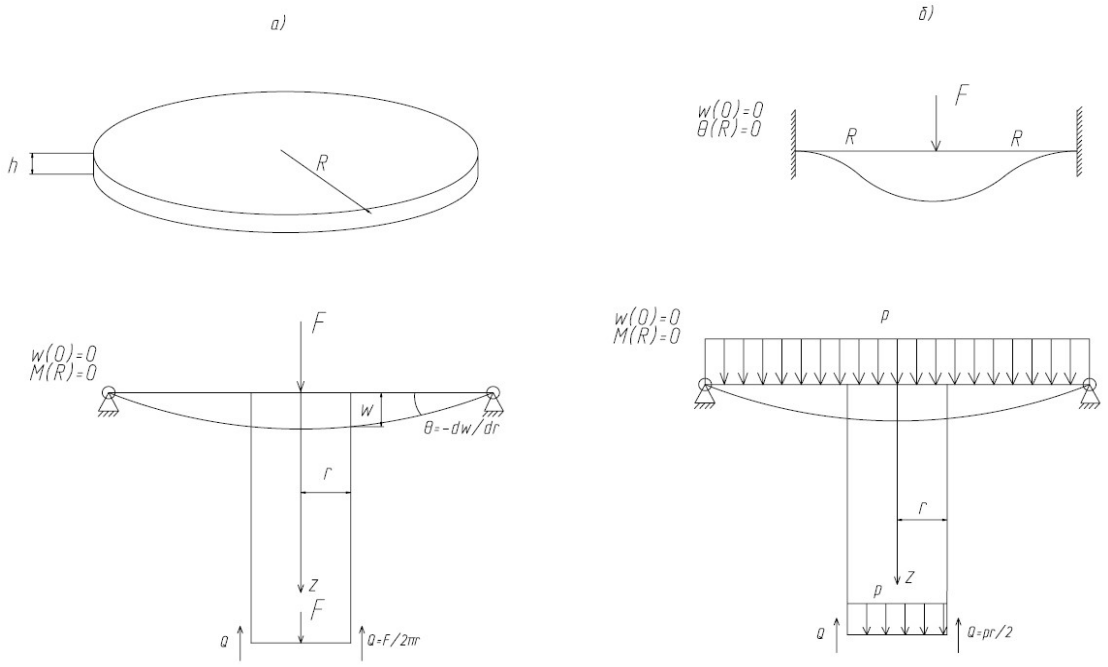


Рис.14.13. Основные расчетные схемы закрепления для круглых пластин

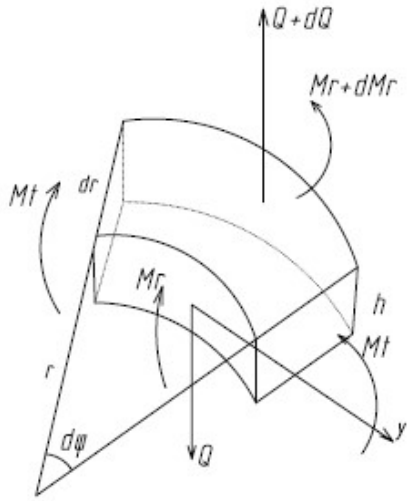


Рис. 14.14. Внутренние силовые факторы на бесконечно малом элементе

Из условия равновесия бесконечно малого элемента, показанного на рис. 14.14, в виде равенств нулю суммы моментов относительно оси Y следует уравнение

$$r\frac{dM_r}{dr} + M_r - M_t = -Qr \qquad (14.27)$$

Радиальные σ_r и тангенциальные σ_t напряжения и соответствующие им деформации ε_r и ε_t показаны на рис. 14.15, а некоторый деформируемый слой пластины изображен на рис. 14.16.

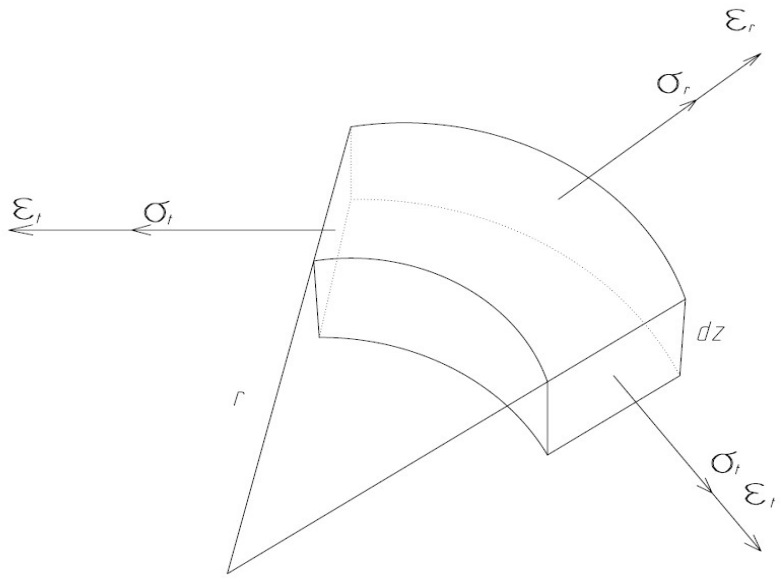


Рис.14.15. Радиальные и тангенциальные деформации и напряжения

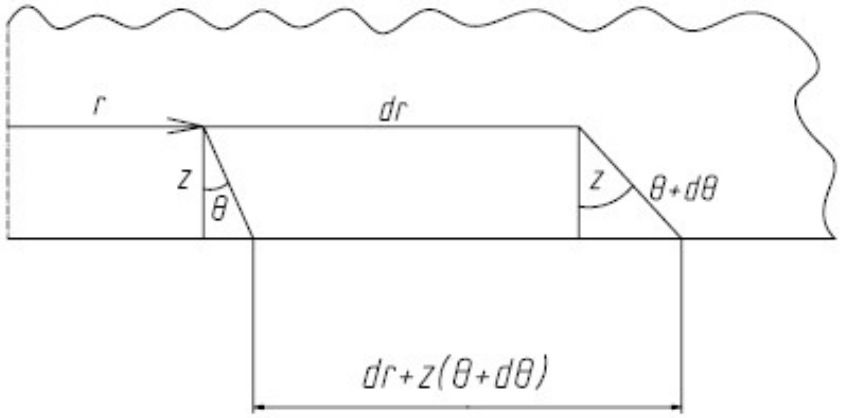


Рис.14.16. Деформируемый слой пластины

Из геометрических соотношений и обобщенного закона Гука следуют следующие равенства

$$\varepsilon_r = z\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t)$$

$$\varepsilon_t = z\frac{\theta}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) \qquad (14.28)$$

Из решения системы уравнений (14.28) получаются следующие равенства

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d\theta}{dr} + \mu\frac{\theta}{r}\right) \qquad (14.29)$$

$$\sigma_t = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\theta}{r} + \mu\frac{d\theta}{dr}\right) \qquad (14.30)$$

Для определения распределенных изгибающих моментов получаем формулы

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z\, dz = D\left(\frac{d\theta}{dr} + \mu\frac{\theta}{r}\right) \qquad (14.31)$$

$$M_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t z\, dz = D\left(\frac{\theta}{r} + \mu\frac{d\theta}{dr}\right) \qquad (14.32)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – «цилиндрическая жесткость пластины».

Подставив выражения (14.31), (14.32) в формулы (14.29), (14.30), находим

$$\sigma_{r,t} = \frac{12M_{r,t}}{h^3} z \qquad (14.33)$$

Максимальные напряжения получаются при значении $z = \frac{h}{2}$:

$$\sigma_{r,t}^{max} = \frac{6}{h^2} M_{r,t} \qquad (14.34)$$

Подставив выражение (14.31) и (14.32) в уравнение (14.27), получаем

$$r\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r} = -\frac{Qr}{D} \qquad (14.35)$$

или

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\vartheta r)\right) = -QD \qquad (14.36)$$

Из выражения (14.36) следует, что

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\vartheta r) = -\frac{1}{D}\int Q\, dr = C = Const \qquad (14.37)$$

Лекция 15. Расчет статически неопределимых систем изгиба

Система называется статически неопределимой , если из уравнений равновесия статики нельзя определить все реакции связей или все внутренние силовые факторы.

Так , для один раз статически неопределимой балки , показанной на рис. 15.1, а , нельзя из уравнений её равновесия определить все три реакции связей : X_1, X_2, X_3, а для трижды статически неопределимой рамы , показанной на рис. 15.2, а, нельзя определить все три силовых фактора в сечениях стержней X_1,X_2,X_3 , тогда как две реакции связей R_1 и R_2 легко определяются из двух уравнений равновесия рамы.

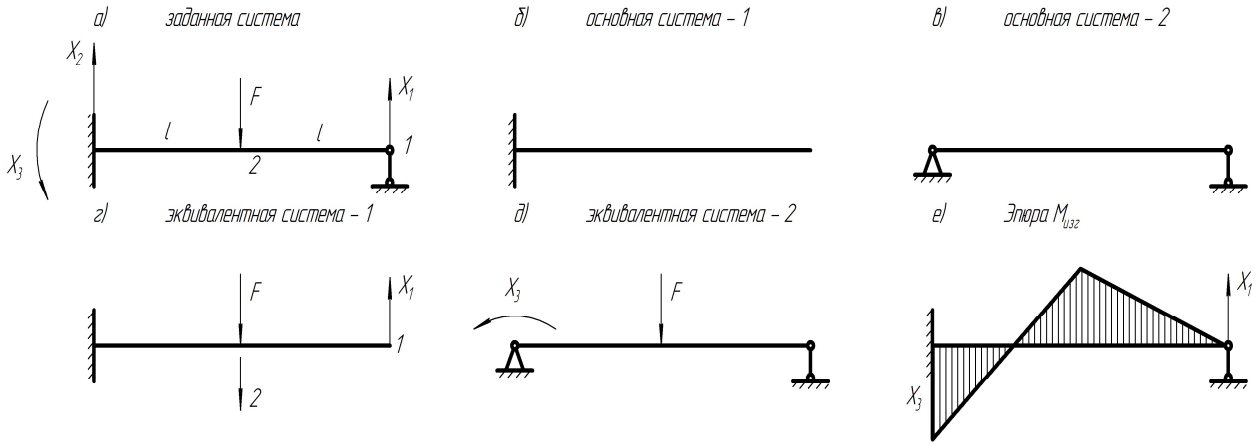


Рис. 15.1

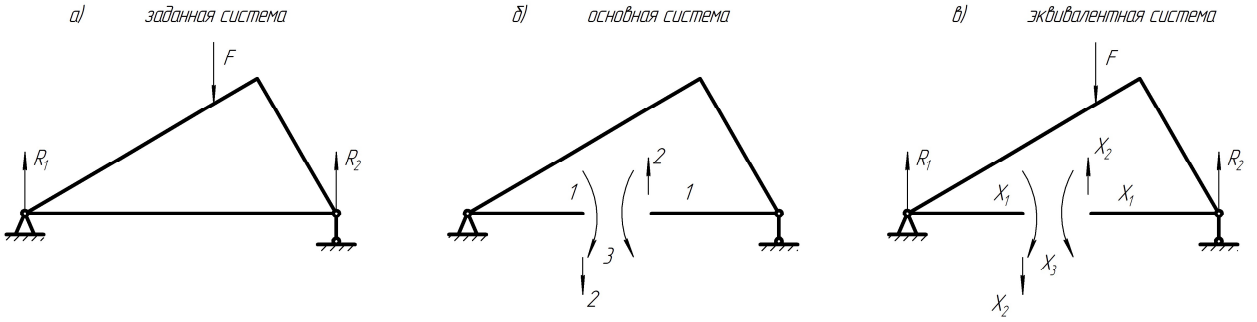


Рис. 15.2

Для расчета статически неопределимых систем вначале выбирают для них основные статически определимые системы, которые получают из заданных систем путем отбрасывания в них «лишних» связей и всех внешних сил. Так, для рассматриваемой балки две такие основные системы показаны на рис. 15.1 , б, в, а для рамы – одна такая система показана на рис. 15.2, б.

К основным система прикладывают отброшенные внешние силы , неизвестные реакции связей и внутренние силовые факторы с тем , чтобы сделать из них системы , эквивалентные заданным. Для балки такие эквивалентные системы показаны на рис. 15.1, г, д, а для рамы – одна такая система показана на рис.15.2, в.

Для балки условие эквивалентности систем состоит либо в том, что перемещение на опоре 1 равно нулю, либо в том, что угол поворота в левой заделке равен нулю. Эти условия выражаются уравнениями:

$$\begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \delta_{12}F = 0 \\ &\delta_{33}X_3 + \delta_{32}F = 0 \end{aligned} \qquad (15.1)$$

Где δ_{ij} - перемещение в направлении I от единичной силы или момента, приложенных в направлении j.

После вычисления из уравнений (15.1) силы X_1 и момента X_3 строим эпюру изгибающих моментов, которая ориентировочно показана на рис. 15.1, е.

Для рамы условие эквивалентности систем, показанных на рис. 15.2, будет состоять в том, что все три перемещения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ в направлениях 1,2 и 3 (рис. 15.2,б) будут равны нулю, т.е. из уравнений :

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_1 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

Или в матричном виде

$[\delta]\cdot\vec{\mathrm{X}} = -\vec{\delta}_F$ (15.2)

Где

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = [\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3]^T; \quad \vec{\delta}_F = [\delta_{1F}, \delta_{2F}, \delta_{3F}]^T;$$

После определения всех коэффициентов податливостей из решения уравнений (15.2) находим искомые силовые факторы в виде

$\vec{X} = -[\delta]^{-1}\cdot\vec{\delta}_F$

При этом эквивалентная система , показанная на рис. 15.2 в, будет статически определимой системой с уже известными воздействиями X_1, X_2, X_3, F, которая решается известными методами.

Контрольная задача

Для рамы, показанной на рис. 15.3 , а требуется построить эпюры изгибающих моментов в её элементах.

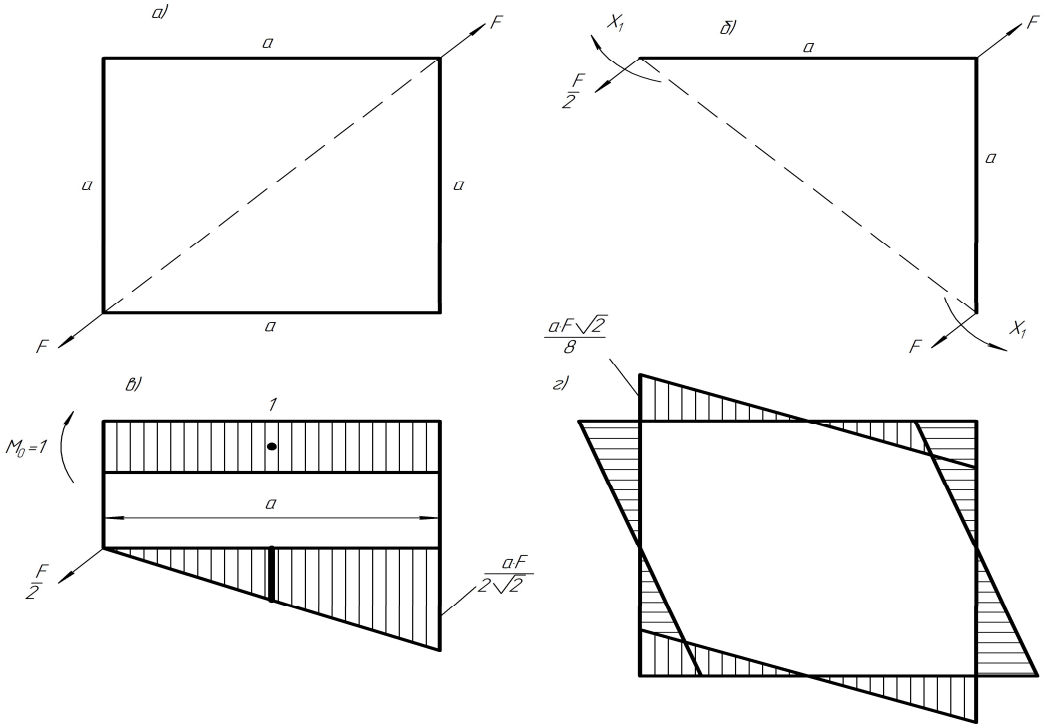


Рис. 15.3

Отсеченная по диагонали часть рамы, показанная на рис. 15.3,б, находится в равновесии под действием силы F, двух сил $\frac{F}{2}$ и неизвестного изгибающего момента X_1 в сечении, которое не поворачивается. Из этого условия получаем уравнение для определения момента X_1:

$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0,$

Где

δ_{11} - угол поворота в направлении X_1 при $X_1 = 1$,

δ_{1F} - угол поворота в направлении X_1 от воздействия силы F.

Лекция 16. Расчет пружин

Стержень, изогнутый по винтовой линии, называется пружиной. По характеру нагружения пружины подразделяются на пружины растяжения, сжатия, изгиба и кручения. Сечение проволоки, из которой изготавливаются пружины, может быть круглым, овальным, кольцевым и т. д. Форма пружины — цилиндрической, конической, параболической и т. п.

Рассмотрим вначале пружины растяжения (рис. 16.1) и вычислим внутренние силовые факторы в её сечениях (рис. 16.2). Разложив вектор-момент и вектор-силу в сечении витков пружины на составляющие, получим:

$$\begin{gathered} M_{кр} = M\cos\alpha = FR\cos\alpha;\, M_{из} = FR\sin\alpha; \\ Q = F\cos\alpha;\, N = F\sin\alpha, \end{gathered} \quad (16.1)$$

где R — радиус пружины, соответствующий рассматриваемому сечению.

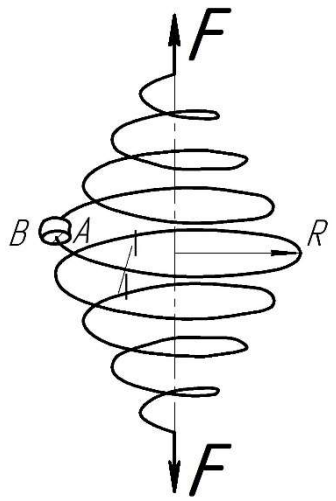


Рис. 16.1

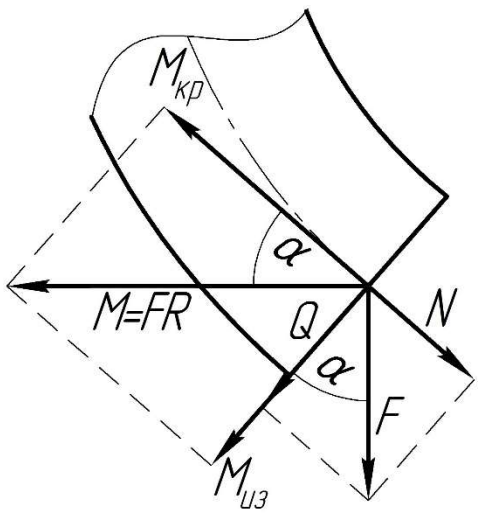


Рис. 16.2

Из приведённых соотношений следует, что при малом угле α подъёма винтовой линии пружины изгибом и растяжением можно пренебречь. Характер распределения напряжений от сдвига и кручения показан на рис. 16.3. Максимальные напряжения возникают во внутренней точке A:

$$\tau_A = \tau_{Mкр} + \tau_Q = \frac{M_{кр}}{W_p}\left(1 + \frac{r}{2R}\right)$$

Определим теперь удлинение и жёсткость пружины (рис. 16.4). За счёт кручения бесконечно малого участка витка пружины ds длина пружины увеличивается на величину

$$d\delta = Rd\varphi = \frac{M_{кр}R}{GJ_p}ds.$$

Полное удлинение пружины будет

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{кр}R}{GJ_p}ds,$$

где l — длина проволоки, из которой изготовлена пружина.

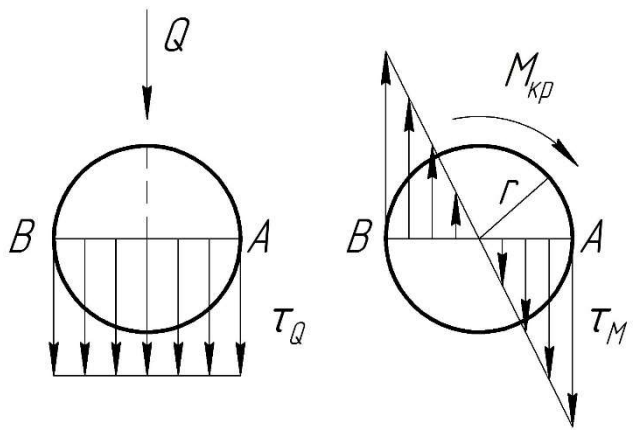


Рис. 16.3

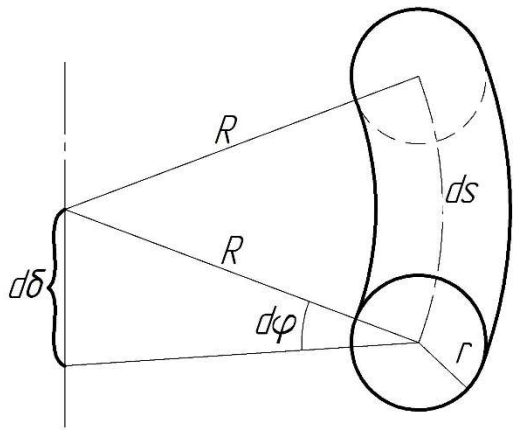


Рис. 16.4

Для цилиндрической пружины с круглым поперечным сечением витка имеем

$$\delta = \frac{4FR^3n}{Gr^4},$$

где n — число витков пружины, r — радиус сечения.

Потенциальная энергия в элементе длиной ds будет

$$d\Pi = \frac{1}{2}M_{кр}d\varphi = \frac{M_{кр}^2ds}{2GJ_{кр}}.$$

Полная потенциальная энергия в пружине будет равна

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_{кр}^2ds}{2GJ_{кр}}.$$

Для цилиндрической пружины

$$\Pi = \frac{2F^2R^3n}{Gr^4}.$$

Растяжение пружины сопровождается её закручиванием. Угол закручивания можно вычислить по методу Максвелла — Мора, описанному

в лекции 13. В соответствии с этим методом приложим к пружине единичный безразмерный вектор-момент $M_0 = 1$ и вычислим в сечениях витка пружины соответствующий изгибающий момент и момент кручения (рис. 16.5).

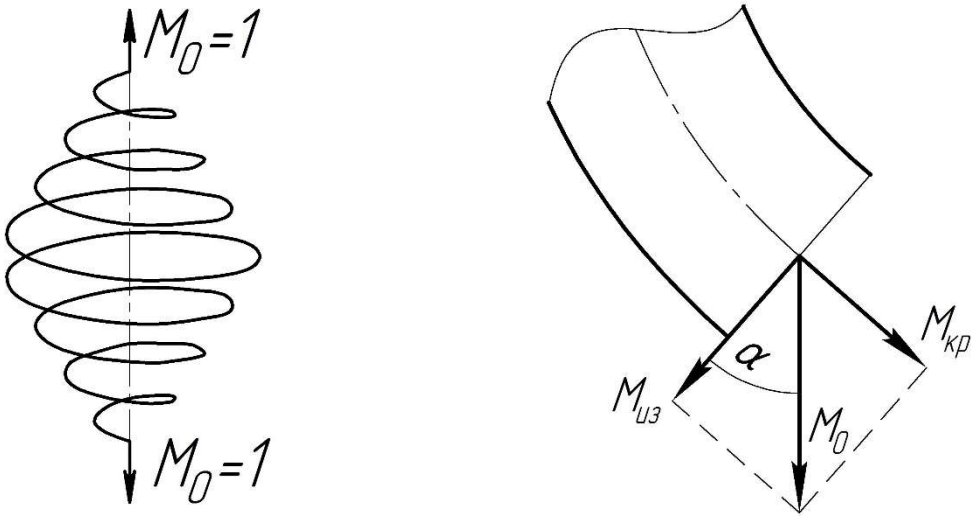


Рис. 16.5

Имеем: $M_{из,1} = 1 \cdot \cos\alpha$; $M_{кр,1} = 1 \cdot \sin\alpha$.

С учётом (16.1) получаем формулу для определения угла закручивания цилиндрической витой пружины

$$\varphi = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_{из} \cdot M_{из,1} ds + \frac{1}{GJ_p}\int_0^l M_{кр} \cdot M_{кр,1} ds = \frac{l}{2} FRl \sin 2\alpha \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p}\right).$$

Рассмотрим теперь пружину кручения, находящуюся под воздействием момента кручения $\vec{M}$ и единичного безразмерного момента $M_0 = 1$ и вычислим в её сечениях соответствующие изгибающие моменты и моменты кручения (рис. 16.6, а).

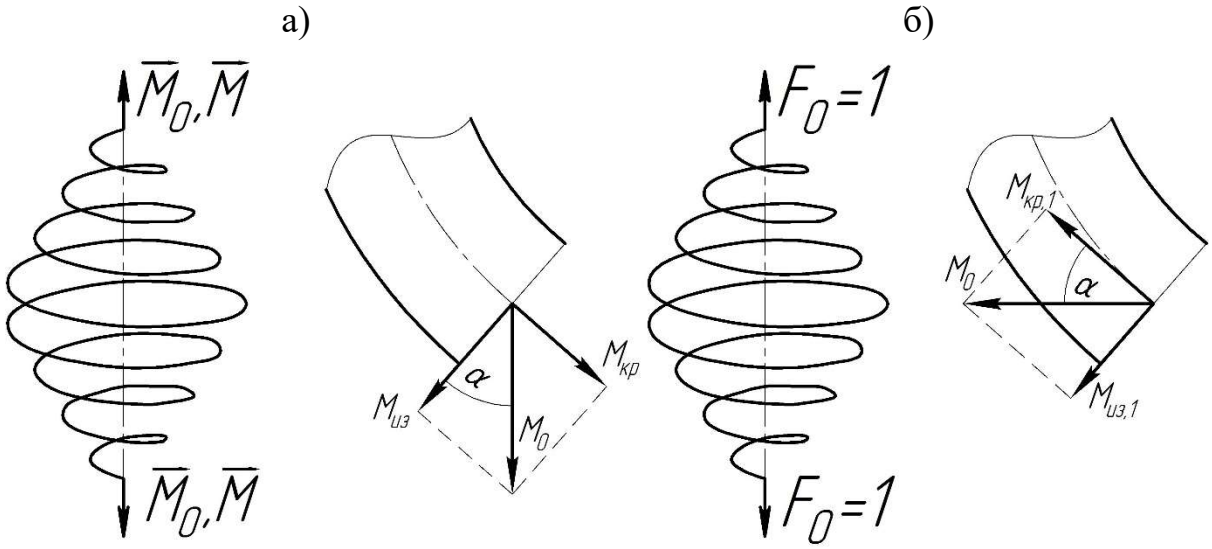


Рис. 16.6

Имеем: $M_{из} = M \cdot \cos\alpha$; $M_{кр} = M \cdot \sin\alpha$; $M_{из,1} = 1 \cdot \cos\alpha$; $M_{кр,1} = 1 \cdot \sin\alpha$.

Для определения угла закручивания пружины получаем формулу

$$\varphi = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_{из} \cdot M_{из,1} ds + \frac{1}{GJ_p}\int_0^l M_{кр} \cdot M_{кр,1} ds = \frac{Ml}{EJ} \cdot \cos^2\alpha + \frac{Ml}{GJ_p} \cdot \sin^2\alpha.$$

Кручение пружины сопровождается изменением её длины. Для определения этого изменения приложим к ней единичную безразмерную силу $F_0 = 1$ и вычислим соответствующий изгибающий и крутящий моменты (рис. 16.6, б).

Имеем: $M_{из,1} = R \cdot \sin\alpha$; $M_{кр,1} = R \cdot \cos\alpha$.

Для определения удлинения пружины кручения получаем формулу

$$\delta = \frac{1}{2} MRl \sin 2\alpha \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p}\right)$$

Рассмотрим теперь пружину изгиба, находящуюся под воздействием момента $\vec{M}$ и вычислим в сечениях её витков изгибающий и крутящий моменты (рис. 16.7).

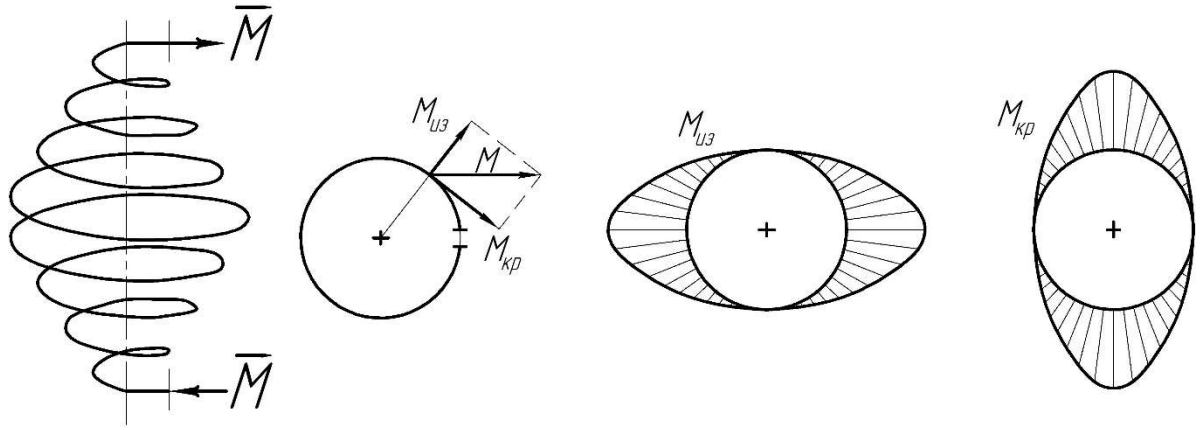


Рис. 16.7

Имеем: $M_{из} = M \cdot \cos\varphi$; $M_{кр} = M \cdot \sin\varphi$.

Эпюры этих моментов показаны на рис. 16.7. Дальнейшие вычисления теперь можно сделать по аналогии рассмотренных вышел расчётов пружин растяжения и кручения.

Лекция 17. Расчеты на устойчивость

Устойчивость - способность конструкций сохранять при нагружении первоначальную форму равновесия. Нагрузки, при которых появляются новые формы равновесия, называются критическими и обозначаются как $F_{\text{кр}}$. Определение этих нагрузок является основной задачей расчета конструкций на устойчивость.

Для примера рассмотрим жесткий стержень, упруго закрепленный в заделке и нагруженный силой F (рис.17.1,а).

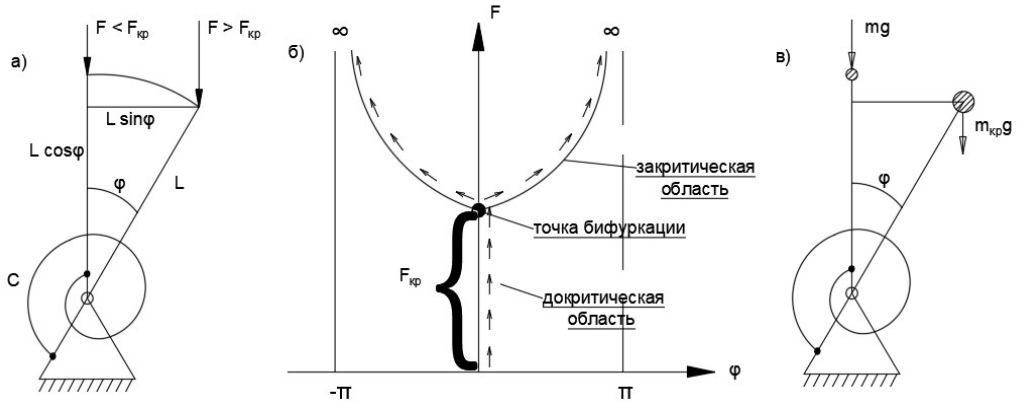


Рис.17.1 К понятию об устойчивости конструкций

При малых нагрузках стержень сохраняет первоначальную вертикальную форму равновесия, а при критической нагрузке $F_{\text{кр}}$ он поворачивается и появляется новая наклонная форма равновесия. Для определения этой нагрузки можно использовать различные методы.

1. Метод уравнений равновесия.

Условие равновесия стержня в момент потери устойчивости можно записать как

$$F_{\text{кр}} \cdot l \cdot \sin\varphi \approx F_{\text{кр}} \cdot l \cdot \varphi = c\varphi$$

где c - жёсткость пружины.

При малом $\varphi \neq 0$ (т.е. при потере устойчивости) получаем

$$F_{\text{кр}} = \frac{c}{l}$$

При $F > F_{\text{кр}}$ имеем

$$F = F_{\text{кр}} \frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

График этой функции представлен на рис. 17, б. При $F < F_{\text{кр}}$ имеет докритическое нагружение стержня, при $F > F_{\text{кр}}$ - закритическое его нагружение, при котором угол наклона стержня возрастает. Точка перехода в новое положение равновесия называется точкой бифуркации.

2. Энергетический метод

При повороте стержня сила $F_{\text{кр}}$ совершает работу, равную энергии деформации пружины. Отсюда получаем равенства:

$$F_{\text{кр}} \cdot l \cdot (1 - \cos\varphi) \approx F_{\text{кр}} \cdot l \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} c\varphi^2$$

Отсюда следует, что

$$F_{\text{кр}} = \frac{c}{l}$$

3. Динамический метод

Свободные колебания расположенной сверху массы m описывается уравнением (рис. 17.1, в)

$$J\ddot{\varphi} = M = mg \cdot l \cdot \varphi - c \cdot \varphi$$

Или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$$

где квадрат частоты свободных колебаний

$$\omega_0^2 = \frac{1}{J}(mg \cdot l - c)$$

J - момент инерции массы М относительно т. О.

Из условия ω_0, т.е. из условия потери устойчивости, находим критическую массу $m_{\text{кр}}$ и соответствующую ей силу

$$F_{\text{кр}} = m_{\text{кр}}\, g = \frac{c}{l}$$

Все три метода расчета привели к одинаковым результатам по определению критических сил.

4. Устойчивость гибких стержней

Рассмотрим теперь гибкий упругий стержень длиной l и жёсткостью EJ, нагруженный силой F и показанный на рис. 17.2, а.

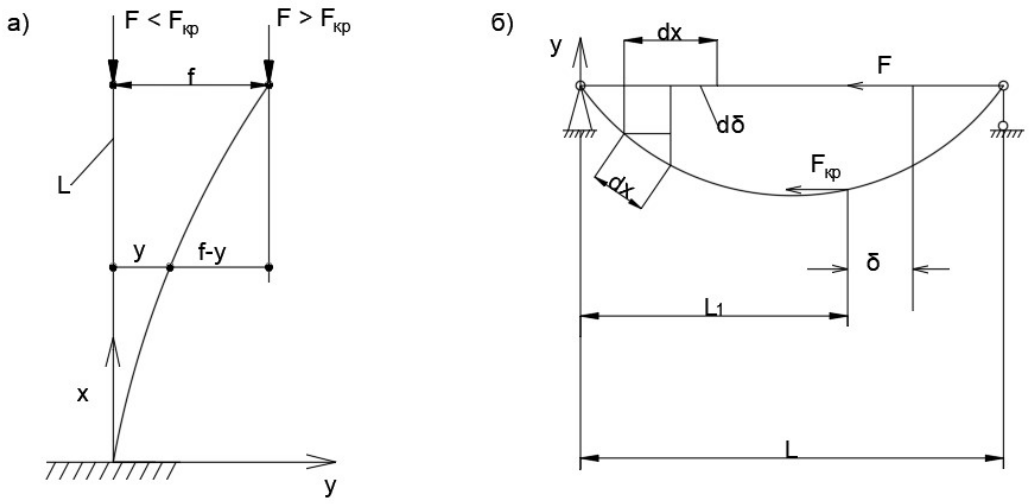


Рис.17.2. К расчету упругих стержней на устойчивость

При $F > F_{\text{кр}}$ стержень перейдет к новой форме равновесия -изгибу.
Для момента потери устойчивости дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$EJy'' = M = F_{\text{кр}}(f - y)$$

или

$$y'' + K^2 y = K^2 f, \qquad (17.1)$$

где

$$K^2 = \frac{F_{\text{кр}}}{EJ}$$

Решение уравнения (17.1) имеет вид

$$y(x) = Asinkx + Bcoskx + f$$

Из граничных условий: $y(0) = 0, y''(0) = 0$, находим: $A = 0, B = -f$

$$y(x) = f(1 - cos\ kx)$$

Из граничного условия $y(l) = f$ находим:

$$cos\ kl = 0, kl = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$$

где $n = 1,2,3,\ldots$

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

при $n = 1$

Для определения критических сил в сложных случаях нагружения стержня используется энергетический метод расчета.

Решим этим методом задачу, представленную на рис. 17.2, б. Смещение силы $F_{кр}$ при потере устойчивости обозначим как. Работа этой силы будет равна потенциальной энергии изгиба стержня. Отсюда имеем равенства:

$$F_{кр}\delta = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} \qquad (17.2)$$

где $M = EJy''$; $d\delta = dx(1 - cos\, y') = dx(1 - (1 - \frac{y^2}{2})) = \frac{1}{2}(y')^2 dx$,

$$\delta = \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2 dx$$

Подставив выражения для M и δ в формулу (17.2), найден

$$F_{кр} = \frac{\int_0^l EJ(y'')^2 dx}{\int_0^{l_1}(y')^2 dx} \qquad (17.3)$$

Если ориентировочно принять $y \approx sin\frac{\pi}{l}x$, то при $l_1 = l_2$ получим

$$F_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$$

Основная трудность в практическом использовании формулы (17.3) состоит в определении функции $y = f(x)$,которая в расчетах ориентировочно принимается в виде полинома

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

в котором $a_n = 1$, а остальные n констант определяются из n граничных условий.

Применительно к конструкции, показанной на рисунке 17.3, граничные условия указаны над ее опорами.

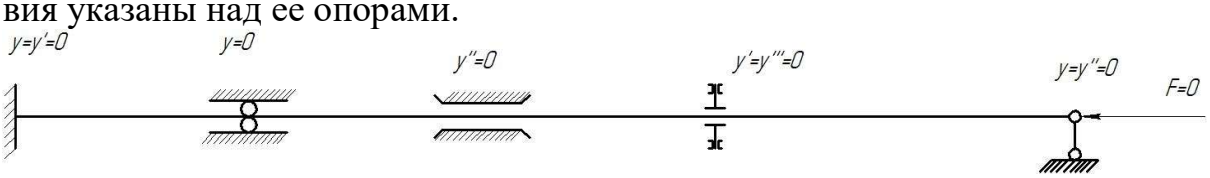


Рис. 17.3. К определению граничных условий

Устойчивость плоской формы изгиба.

Задачу об оценке устойчивости плоской формы изгиба рассмотрим на примере балки, показанной на рис. 17.4 Возможное новое положение балки после потери е. устойчивости показано на этом рисунке пунктиром. Вначале вычислим для нового расположения балки силовые факторы в её сечениях. Пусть при потере устойчивости система координат {XYZ}, жестко связанная с сечением, переходит в систему {X_1 Y_1 Z_1}. При этом оси {Z, Y} поворачиваются на угол ϕ, а оси {X, Y} на угол θ≈y'. Совместим оси {Y_1, Z_1} и {Y,

Z} в одной точке и разложим заданный изгибающий момент M на составляющие относительно осей Y_1 и Z_1 (рис. 17.5):

$M_{z_1} = MSin\varphi \approx M\varphi$ $\qquad$ $M_{y_1} = MCos\varphi \approx M$

Совместим теперь оси {X, Y} и {X_1, Y_1} в одной точке и вновь разложим заданный изгибающий момент M на составляющие (рис. 17.6):

$M_{x_1} = MSin\theta \approx M\theta \approx My' = M_{\text{кр}}$ $\qquad$ $M_{y_1} = MCos\theta \approx M$

Запишем дифференциальные уравнения изгиба и кручения:

$EIy'' = -M\varphi$ $\qquad$ $GI_k\varphi' = My'$

Дифференцируя первое уравнение по X

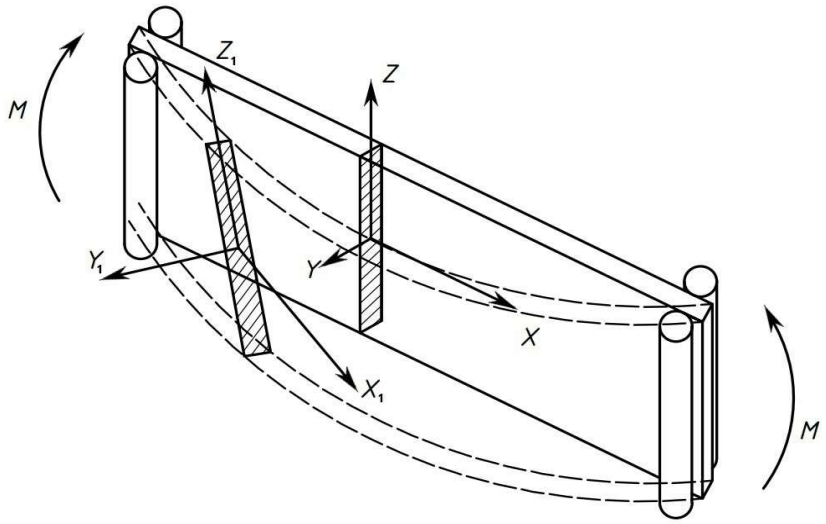


рис. 17.4

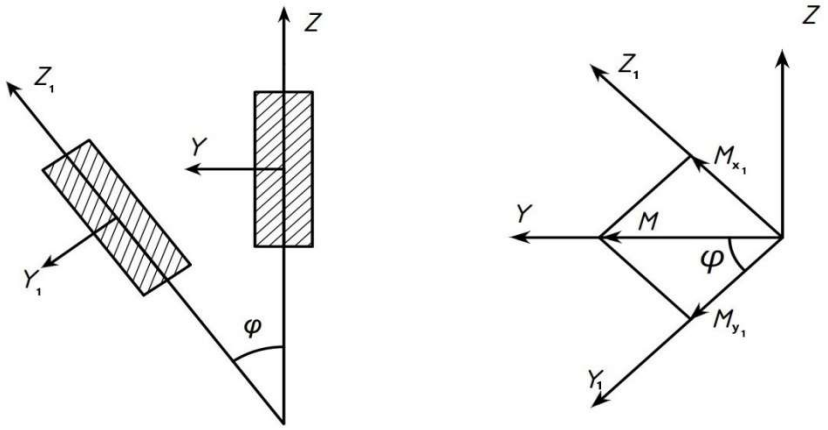


рис. 17.5

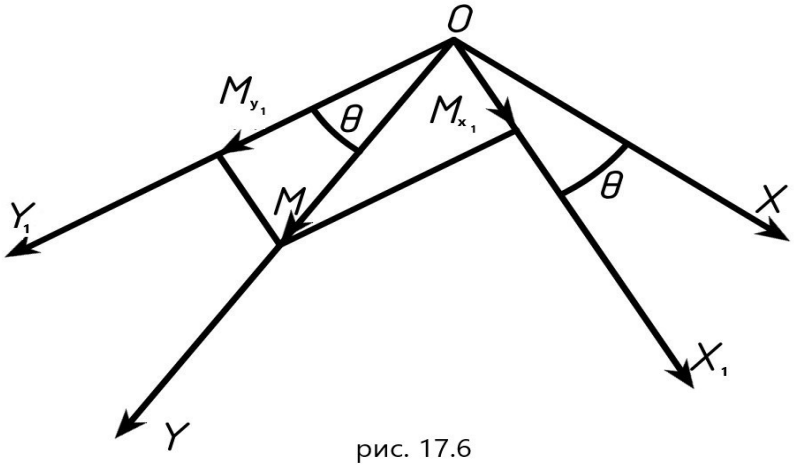


рис. 17.6

С помощью второго уравнения, получаем:

$y'''+k^2y'=0$ (17.4), где $к^2 = \frac{M^2}{GI_kEI}$ (17.5)

Общее решение уравнения (17.4) имеет вид:

Y=ASin(kx)+BCos(kx)+C.

Постоянные A, B и C определяются из следующих граничных условий:

При X=0: У=0, ф=0 (y''=0)

При X=L: У=0, ф=0 (y''=0)

Выполняя первые два условия, получаем B=C=0,

У=ASin(kx)

Из второго граничного условия получаем, что потеря устойчивости возможна при выполнении условия:

Kl=πn, где n=1,2,3…

Отсюда, используя выражение (17.5), получаем значения изгибающих моментов, при которых возможны новые формы равновесия:

$$M = \frac{\pi n}{l}\sqrt{GI_kEI}$$

При n=1 и $J=J_{min}$ получаем значение критического момента, при котором происходит потеря устойчивости:

$$M_{кр} = \frac{\pi}{l}\sqrt{GI_kEI_{min}}$$

<u>Контрольные задачи</u>

<u>Задача</u> 1. Для высотного сооружения требуется найти критическую распределенную нагрузку $q_{кр}$, обусловленного её собственным весом (17.7).

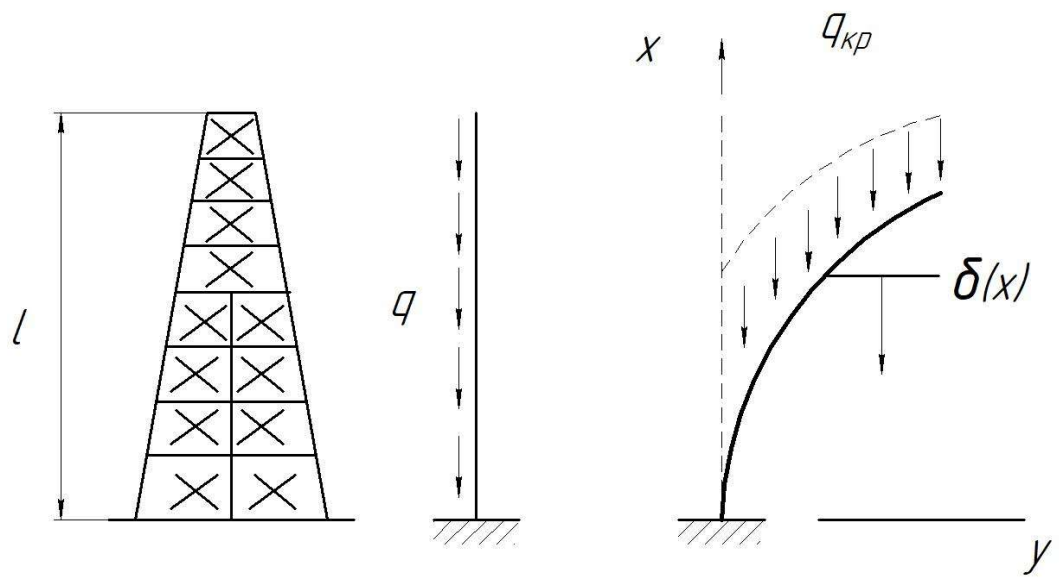


Рис.17.7

Решение. Форму изгиба при потере устойчивости примем в виде

$$y(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

Потенциальная энергия будет

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EJ(y'')^2 dx = \frac{1}{2}EJl\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4$$

Перемещение в т. с координатой x будет

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2 dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2l}\left(x - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\right)$$

а работа сил $q_{\text{кр}}$ будет

$$A = \int_0^l q_{\text{кр}}\delta(x)dx = \frac{1}{4}q_{\text{кр}}\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\left(\frac{l^2}{2} - \frac{2l^2}{\pi^2}\right)$$

Из условия $A = \Pi$ находим

$$q_{\text{кр}} = \frac{EJ}{2l^3}\frac{\pi^4}{\pi^2 - 4}$$

Задача 2. Упругий стержень находится между полюсами магнита (рис. 17.8). Распределенная сила притяжения к ним $q = ky$, где коэффициент, зависящий от напряженности магнитного поля. При каком k стержень изогнется, т.е. потеряет устойчивость?

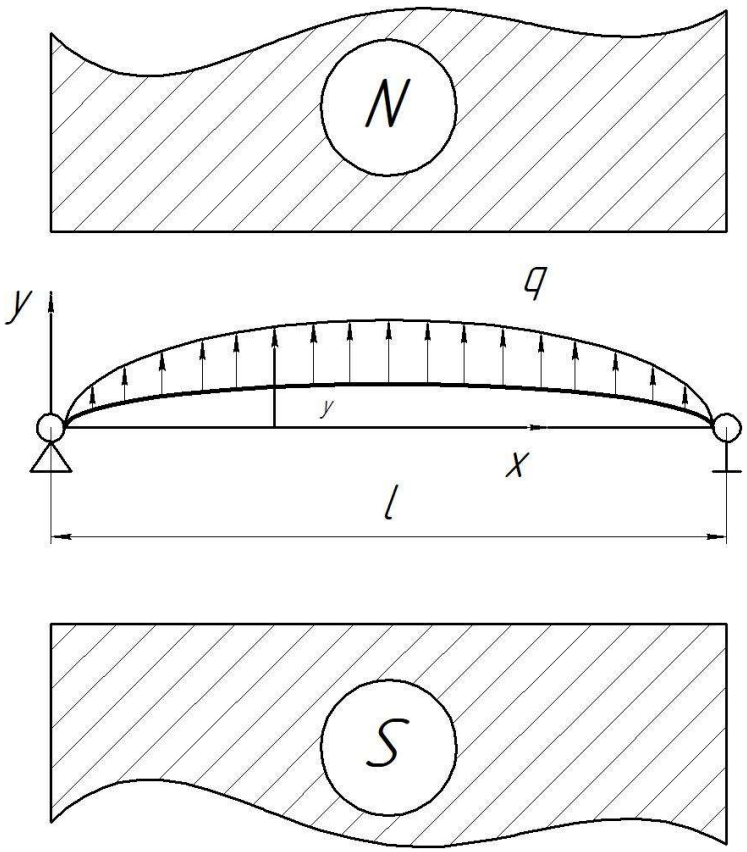


Рис. 17.8

Решение:
Дифференциальное уравнение изгиба стержня имеет вид

$$EJy^{IV} = ky$$

Или

$$y^{IV} - \alpha^4 y = 0$$

Можно принять

$$y = sin\alpha x$$

При $x = 0$ и $x = l$ имеем $y = 0$. Отсюда следует, что $\alpha = \frac{\pi}{l}$ и $k_{\text{кр}} = EJ\frac{\pi^4}{l^4}$

Задача 3. Определить критическую скорость протекания жидкости по трубопроводу, показанном на рис. 17.9.

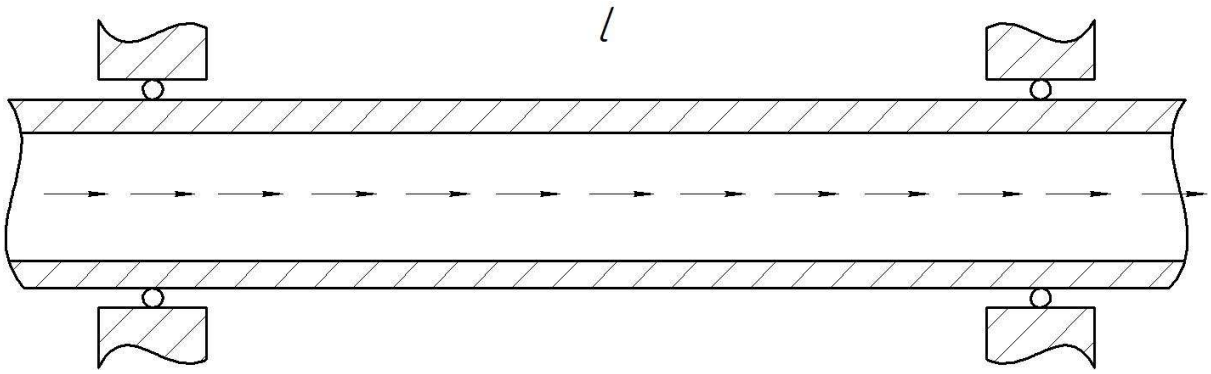


Рис. 17.9

Решение: При изгибе трубки в момент потери устойчивости возникает центробежная распределенная сила инерции

$$q = \mu \frac{v^2}{\rho} = \mu v^2 y''$$

где μ - распределенная масса трубы, v - скорость движения жидкости, ρ - радиус кривизны трубки в момент потери устойчивости, $y(x)$ - прогиб трубы. Дифференциальное уравнения изгиба имеет вид

$$EJy^{IV} + \mu v^2 y'' = 0$$

или

$$z'' + 2z = 0$$

где

$$z = y'' = sin\alpha x$$

Из граничных условий: при x=0 y=0, при $x = l$ y=0, получаем

$V_{ÊÐ} = lEJ$

Лекция 18. Расчеты на сопротивление усталости

1. Характеристики сопротивления усталости и их определение

Усталость материала – явление, состоящее в его постепенном разрушении при циклических воздействиях. Сопротивление усталости – способность металла не разрушаться при таких воздействиях в течение определенного времени.

Характеристики сопротивления усталости выявляются на образцах металла при их циклическом нагружении с различной интенсивностью. Испытания проводятся до появления трещин или полного разрушения. Интенсивность нагружения характеризуется напряжениями циклов: максимальным $\sigma_{\max}$, минимальным $\sigma_{\min}$, амплитудным σ_a и средним σ_m. Коэффициент асимметрии цикла нагружения R определяется как

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

При симметричных циклах нагружения $R = -1$. При отнулевых положительных (пульсирующих) циклах $R = 0$ (рис.18.1)

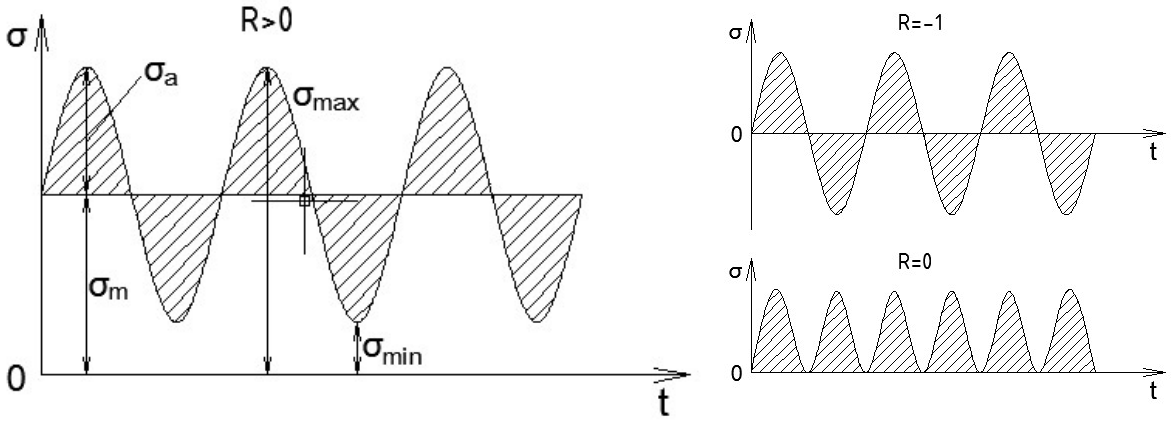


Рис.18.1. Процессы нагружения с различной асимметрией циклов.

Результаты испытаний при заданном значении R представляются в виде зависимостей кривых усталости $\sigma = f(N)$, где $\sigma = \sigma_{\max}$ или $\sigma = \sigma_a$, N - число циклов до появления усталостной трещины, либо до полного разрушения (рис.18.2.).

Чем выше уровень напряжений, тем меньше число циклов до разрушения. Испытания прекращаются при напряжении σ_R, соответствующих некоторому базовому числу циклов нагружения N_0 из диапазона значений от 2 до 10 млн. циклов.

Напряжение σ_R называется пределом выносливости при коэффициенте асимметрии циклов R. При симметричных циклах нагружения предел выносливости обозначается через σ_{-1}, при пульсирующих через σ_0. Для описания кривых усталости используется уравнение

$$N = \begin{cases} N_0 \left(\dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma} \right)^m, \sigma \geq \sigma_{-1} \\ \infty, \sigma < \sigma_{-1} \end{cases} \tag{18.1}$$

где N_0 - число циклов до разрушения, принятое при определении σ_{-1}, m - параметр.

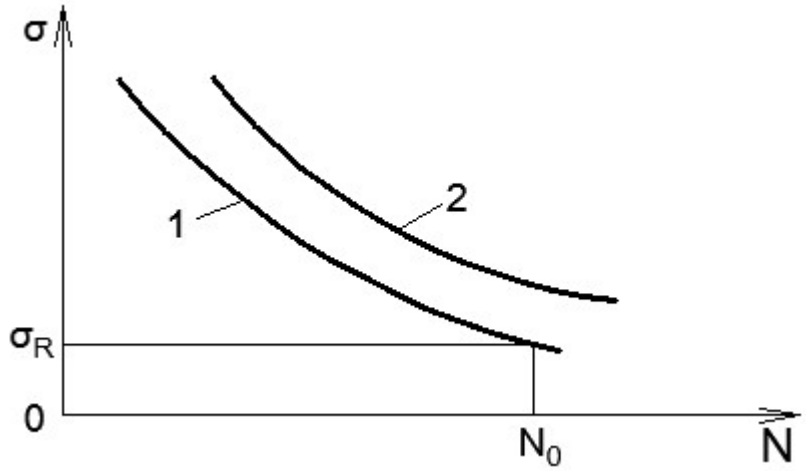


Рис.18.2. Кривые усталости, определенные по моментам появления трещин (1) и полного разрушения (2).

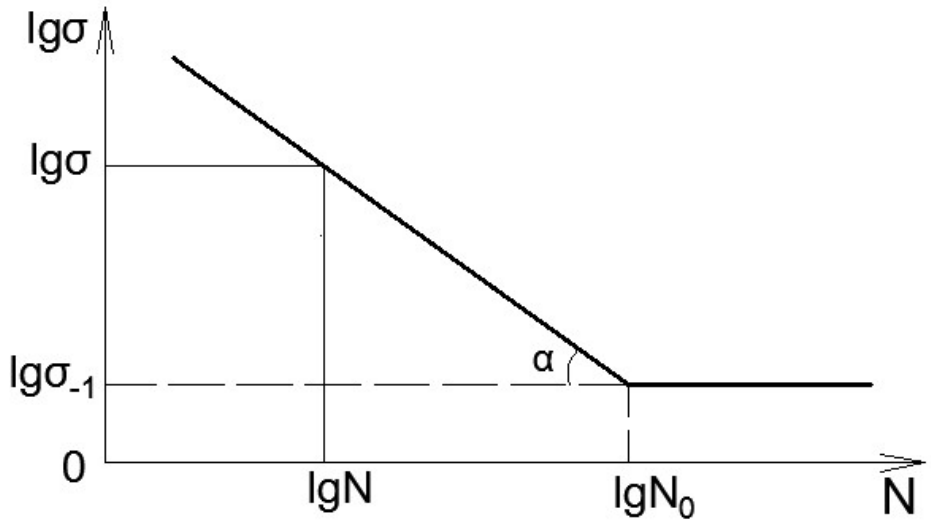


Рис.18.3. Кривые усталости в двойных логарифмических координатах

В двойных логарифмических координатах $\{\lg\sigma, \lg N\}$ уравнение (18.1) при $\sigma \geq \sigma_{-1}$ описывает прямую линию, наклоненную к оси N под углом α, определяемым из соотношения:

$$ctg\alpha = m = \frac{\lg N_0 - \lg N}{\lg\sigma - \lg\sigma_{-1}} \tag{18.2}$$

Экспериментальное определение кривых усталости в полном объеме при несимметричных циклах нагружения и определение соответствующих пределов выносливости σ_R представляет собой сложную и чрезвычайно трудоемкую задачу. По-

этому обычно ограничиваются испытанием только при симметричных циклах нагружения с определением предела выносливости σ_{-1}, а пересчет кривых усталости на несимметричные циклы нагружения и построение соответствующих схематизированных поверхностей усталости, т.е. графиков функций $N = N(\sigma_a, \sigma_m)$, производится с использованием имеющихся данных о пределе прочности σ_B при растяжении и пределах текучести при растяжении $\sigma_{T,P}$ и сжатии $\sigma_{T,СЖ}$. При этом используется следующая закономерность: при увеличении среднего уровня действующих растягивающих напряжений для сохранения того же числа циклов до разрушения, необходимо уменьшать значения амплитуд напряжений. При сжимающих напряжениях σ_m вначале допустимый уровень амплитуд напряжений несколько повышается, а затем вновь понижается.

По имеющимся данных вначале строится схематизированная диаграмма предельно допустимых амплитуд, которая в системе координат $\{\sigma_a, \sigma_m\}$ ограничивается прямыми, проходящими через точки с координатами (рис.5.)

$$\{(\sigma_a = \sigma_{-1}, \sigma_m = 0)(\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_B)\},$$
$$\{(\sigma_a = \sigma_T, \sigma_m = 0)(\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_T)\},$$
$$\{(\sigma_a = \sigma_{T,СЖ}, \sigma_m = 0)(\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_{T,СЖ})\}.$$

Первая прямая является границей, определяемой по появлению усталостных трещин, а две другие – границами, определяемыми появлением пластических деформаций и поэтому являющимися условными.

Если точка с координатами $\{\sigma_a, \sigma_m\}$, характеризующая интенсивность процесса нагружения, находится внутри области, ограниченной указанными тремя прямыми, то усталостного разрушения не произойдет. Если эта точка находится в заштрихованной на рис. 18.4.а) области,то

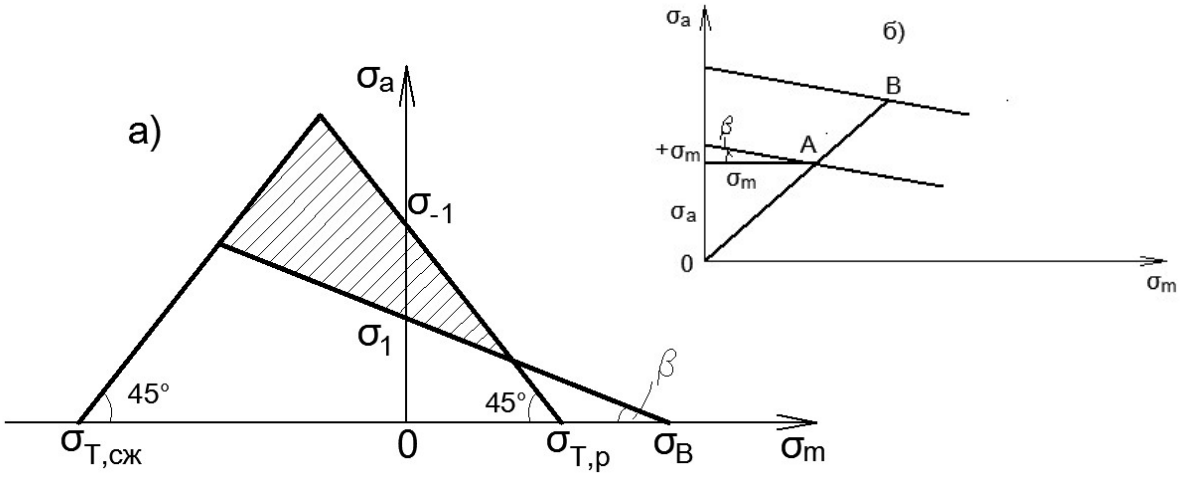


Рис.18.4. Схематизированная диаграмма предельных амплитуд

будет происходить процесс постепенного накопления усталостных повреждений, заканчивающийся появлением макротрещины или полным разрушением конструк-

ции. Если эта точка находится вне указанных двух областей, то произойдет либо немедленное статическое разрушение, либо разрушение произойдет при небольшом числе циклов нагружения, характерном для циклического упругопластического деформирования.

Построенная диаграмма предельных амплитуд позволяет определить запас сопротивления усталости и построить схематизированную поверхность усталости. Так, если цикл нагружения характеризуется некоторой точкой А (рис.18.4) то на продолжении линии ОА отмечается предельная для данного сочетания напряжений $\{\sigma_a, \sigma_m\}$ точка В и коэффициент запаса сопротивления при $\sigma_{\max} < \sigma_{Tp}$ определяется как (см. рис.18.4.б))

$$n = \frac{OB}{OA} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi\sigma_m}, \qquad (18.2)$$

где $\psi = \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = tg\beta$

Так как при симметричных циклах нагружения уравнение кривой усталости (18.1.) можно представить в виде:

$N = N_0 n^m$, где коэффициент запаса сопротивления усталости при симметричных циклах нагружения $n = \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}$,

то в соответствии с (18.2.) для циклов, которые характеризуются точками из заштрихованной на рис.18.4. области, ориентировочное уравнение поверхности усталости можно записать в виде:

$$N = N(\sigma_a, \sigma_m) = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \sigma_m} \right)^m$$

2.Расчеты на сопротивления усталости при кручении и при изгибе с кручением

Расчеты на сопротивление усталости с кручением производятся аналогично описанным выше расчетам на циклическое растяжение и изгиб. При этом предел выносливости при симметричных циклах нагружения обозначается через τ_{-1}, а запас прочности определяется как $n_\tau = \dfrac{\tau_{-1}}{\tau}$, где $\tau_{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{-1}$, τ - заданный уровень амплитуд касательных напряжений.

При определении запаса прочности при циклическом изгибе с кручением исходят из четвертой теории прочности, при которой эквивалентное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_Э = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Запас прочности при нормальных напряжениях был определен как $n_\sigma = \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma}$. Поэтому запас прочности при изгибе с кручением можно определить как $n = \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma_Э}$. Отсюда следуют формулы:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_T^2}$$

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}$$

Число циклов до разрушения будет определяться по формуле:

$$N = N_0 n^m = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} \right)^m$$

(18.4)

3.Расчеты на усталость при нерегулярных процессах нагружения

Рассмотрим процесс нагружения состоящий из различных по интенсивности циклов нагружения (рис. 18.7.).

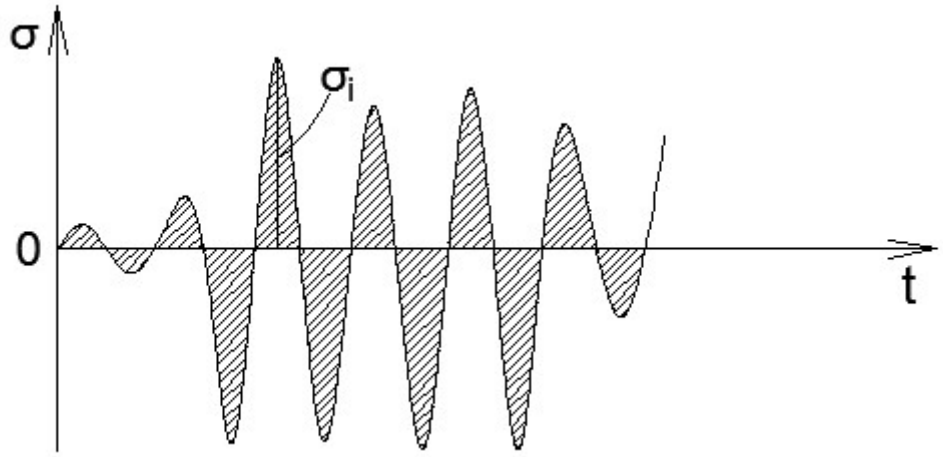


Рис.18.7.

Пусть α_i - относительное содержание циклов с амплитудами σ_i, а N_i - искомое число циклов до разрушения. Тогда число циклов с напряжениями σ_i будет определяться как $n_i = \alpha_i N_*$, где $\sum \alpha_i = 1$.

Усталостное повреждение за один цикл нагружения с напряжением σ определяется как:

$\nu = \dfrac{1}{N}$, где

$N = N(\sigma)$ определяется по уравнению кривой усталости (18.1)

Тогда условие того, что сумма усталостных напряжений достигнет единицы, т.е. 100% будет записываться как

$$\sum \frac{n_i}{n_i} = 1,$$

А искомое число циклов до разрушения будет определяться по формуле

$$N_* = \frac{N_0 \sigma_{-1}^m}{\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \sigma_i^m} \qquad (18.5)$$

где k - число различных уровней амплитуд напряжений

4.Контрольная задача

Пусть требуется оценить усталостную долговечность балки с сосредоточенной массой $m = 10кг$, на которую действует гармоническая сила $F = F_0 \cos \omega t$ с частотой ω ($F_0 = 1кН$, рис.18.8а). Сечение балки – прямоугольник $(6x3)см^2$ с $J = 13{,}5см^4$, $W = 9см^3$, $E = 2 \cdot 10^5 Па$. Уравнение кривой усталости имеет вид: $N = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma} \right)^m$, где $N_0 = 2 \cdot 10^6$ циклов, $\sigma_{-1} = 100МПа$, $m = 4$.

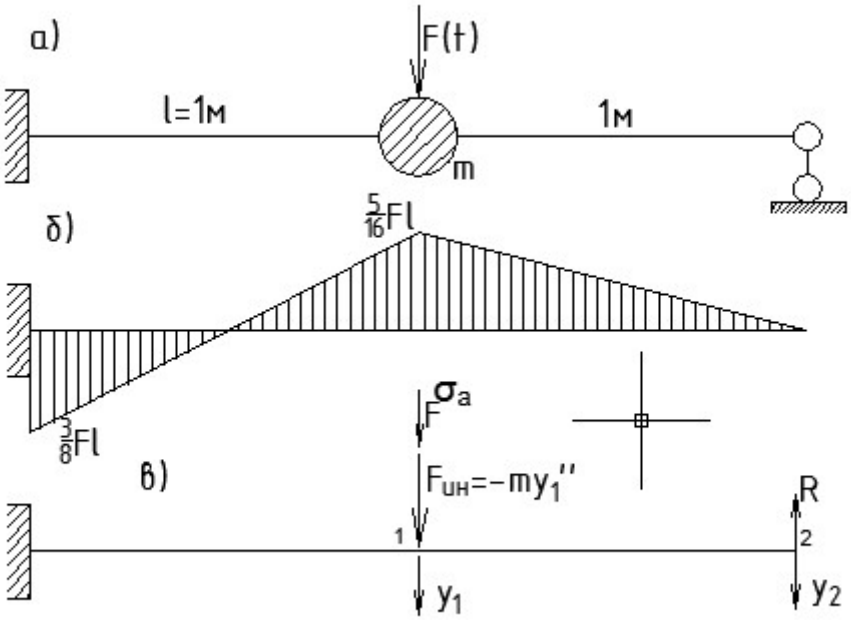


Рис.18.8.

Относительное содержание циклов в процессе нагружения $\sigma(t)$ с частотой $\omega_1 = 0{,}4\omega_0 : \alpha_1 = 0{,}7$, с частотой $\omega_2 = 0{,}6\omega_0 : \alpha_1 = 0{,}2$, с частотой $\omega_3 = 0{,}8\omega_0 : \alpha_3 = 0{,}1$, где ω_0 - частота собственных колебаний системы.

Эпюра изгибающих моментов при статическом нагружении балки показана на рис.18.8.б). Наибольшее статическое напряжение в заделке $\sigma_{CT} = 41{,}7 МПа$. При этом $EJ\delta_{11} = \frac{1}{3} м^3$, $EJ\delta_{22} = \frac{8}{3} м^3$, $EJ\delta_{12} = \frac{5}{6} м^3$.

Расчетная схема для динамического расчета показана на рис.18.8в). В соответствии с методом сил имеем следующие соотношения для определения перемещений y_1 и y_2 в точках 1 и 2:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}\left(F - m y_1''\right) - \delta_{12} R \\ y_2 = \delta_{21}\left(F - m y_1''\right) - \delta_{22} R \end{cases}$$

где R - реакция на правой опоре

Из второго уравнения следует что

$$R = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}\left(F - m y_1''\right)$$

Первое уравнение принимает вид

$y_1'' + \omega_0^2 y_1 = f(t)$, где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m\left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}}\right)} \quad ; \qquad f(t) = \frac{F}{m\left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}}\right)}$$

Отсюда получаем $\omega_0 = 53{,}5 рад/сек$, а коэффициент динамичности

$$K_д = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)};$$

С учетом коэффициента динамичности и концентрации напряжений получаем для первого режима $\sigma_1 = 50 МПа$, для второго режима $\sigma_2 = 75 МПа$, для третьего $\sigma_3 = 115 МПа$.

По формуле 18.5 находим число циклов нагружения до разрушения

$$N_* = \frac{N_0 \sigma_{-1}^m}{\alpha_1 \sigma_1^m + \alpha_2 \sigma_2^m + \alpha_3 \sigma_3^m} = 7{,}8 \cdot 10^6 циклов$$

Долговечность в часах работы:

$$T = \frac{2\pi N_*}{3600 \cdot \omega_0 \left(0{,}4\alpha_1 + 0{,}6\alpha_2 + 0{,}8\alpha_3\right)} = 500 час.$$

Лекция 19. Расчеты на ударные воздействия.

Упругая система называется линейной, если перемещения в ней пропорциональны приложенным силам, т.е. если выполняется равенство:

$$F=C\delta \qquad (19.1)$$

где F-сила, δ -перемещение, C-коэффициент жесткости.

Все рассмотренные ниже упругие системы (стержни, пружины и т.п.) являются примерами таких линейных систем. Они отличаются лишь значениями коэффициентов жесткости. В дальнейшем все упругие системы будут изображаться в виде пружин. Действительное конструктивное исполнение реальной упругой системы может быть при этом любым.

Рассмотрим удар по упругой системе абсолютно твердого тела весом G, движущегося под углом α с высоты h без трения по наклонной плоскости с начальной скоростью V_0 (рис. 19.1).

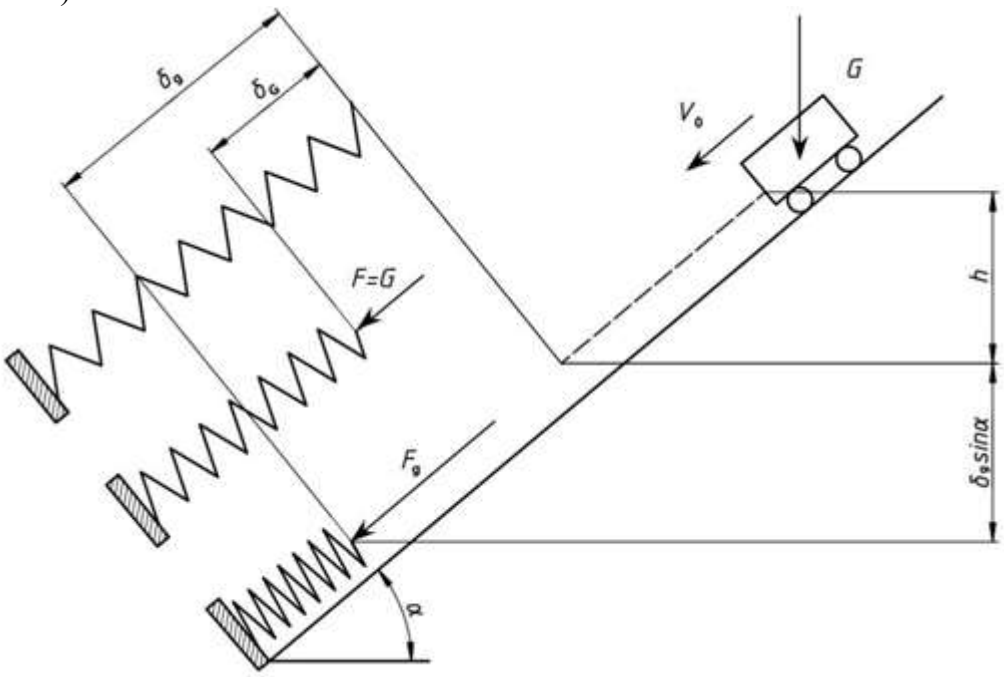


рис.19.1

Максимальное динамическое усилие и деформацию обозначим через F_g и δ_g. Деформацию пружины, соответствующую силе веса падающего груза при F=G, обозначим через δ_G.

Коэффициент динамичности определяются как:

$$K_g = \frac{F_g}{G} = \frac{\delta_g}{\delta_G} \qquad (19.2)$$

Будем считать, что энергия груза, состоит в начальный момент из кинетической и потенциальной энергии, во время удара полностью переходит в потенциальную энергию сжатия пружины. Отсюда следует равенство:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + G\left(h + \delta_g Sin\alpha\right) = \frac{1}{2}F_g\delta_g \qquad (19.3)$$

Используя соотношение (19.2), используем квадратное уравнение для определения коэффициента динамичности:

$$K_g^2 - 2K_g Sin\alpha - \left(\frac{2h}{\delta_G} + \frac{T}{\Pi}\right) = 0 \qquad (19.4)$$

Где $T=mV_0^2/2$-кинетическая энергия груза в начальный момент, $\Pi=G\delta_G/2$-потенциальная энергия пружины при нагрузке, равной весу движущегося груза.

Решив уравнение (19.4), получим формулу для определения коэффициента динамичности:

$$K_g = Sin\alpha \pm \sqrt{Sin^2\alpha + \frac{2h}{\delta_g} + \frac{T}{\Pi}} \qquad (19.5)$$

При α=0 и h=0 имеет место горизонтальный удар. В этом случае

$$K_g = \sqrt{T/_{\Pi}} \qquad (19.6)$$

При α=90° и V_0=0 (T=0) имеет место вертикальный удар. В этом случае

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} \quad , \qquad (19.7)$$

где знак минус опущен, а величина δ_G заменена на перемещение от статической нагрузки $\delta_{ст}$.

Учтем теперь массу упругой системы. Рассмотрим случай вертикального удара. Пусть масса упругой системы m_n сосредоточена в ее верхней части (рис. 21.2а), а остальная часть системы остается невесомой.

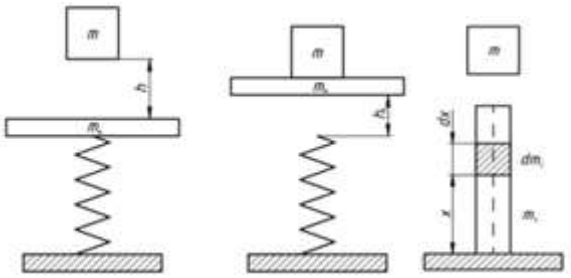


рис.19.2

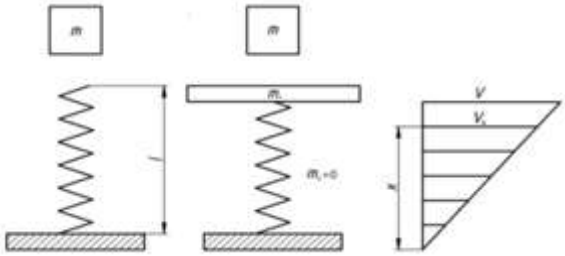


рис.19.3

Будем считать, что отскока при ударе не происходит и после удара обе массы m и m_n движутся совместно. Сведем решение поставленной задачи к рассмотренному выше случаю удара по невесомой упругой системе (рис.21.2б), т.е. будем считать, что оба груза подняты над невесомой упругой системой на некоторую высоту h_1, которую определим из условия что кинетическая энергия в момент удара двух грузов равна кинетической энергии груза с массой m при его падении с высоты h:

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}(m + m_n)V_1^2 \qquad (19.8)$$

Где V и V_1 – скорости соударения грузов с упругой системой для двух рассматриваемых случаев.

Так как V^2=2gh и V_1^2=2gh, то из соотношения (21.8) следует, что

$$h_1 = \frac{mh}{m+m_n} \qquad (19.9)$$

Подставим (19.9) в (19.7), получим:

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hm}{\delta_{ст}(m+m_n)}} \qquad (19.10)$$

Рассмотрим теперь случай, когда масса упругой системы m_0 распределена по длине стержня равномерно (рис.19.3а,б). Сведем решение этой задачи к предыдущей, когда вся масса системы сосредоточена в ее верхней части (рис.19.3в). Эту массу назовем приведенной массой и обозначим через m_n, определим ее значение из условия равенства кинетических энергий в системах «а» и «в». При этом будем считать распределение скоростей по длине стержня линейным (рис.21.3г): V_x=VX/l, где V-максимальное значение скорости.

Из указанных условий получаем равенства:

$$\frac{m_n V^2}{2} = \frac{1}{2}\int_{m_0} V_x^2 dm_0 = \frac{\rho A V^2}{2l^2}\int_0^l x^2 dx = \frac{1}{6}m_0 V^2$$

Где ρ - плотность материала, А - площадь сечения.

Отсюда получаем $m_n=m_0/3$. Для этого случая из соотношения (19.10) следует, что

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hm}{(m + \frac{1}{3}m_0)\delta_{ст}}}$$

Аналогично поступим при рассмотрении удара по балке, показанной на рис. 19.4.

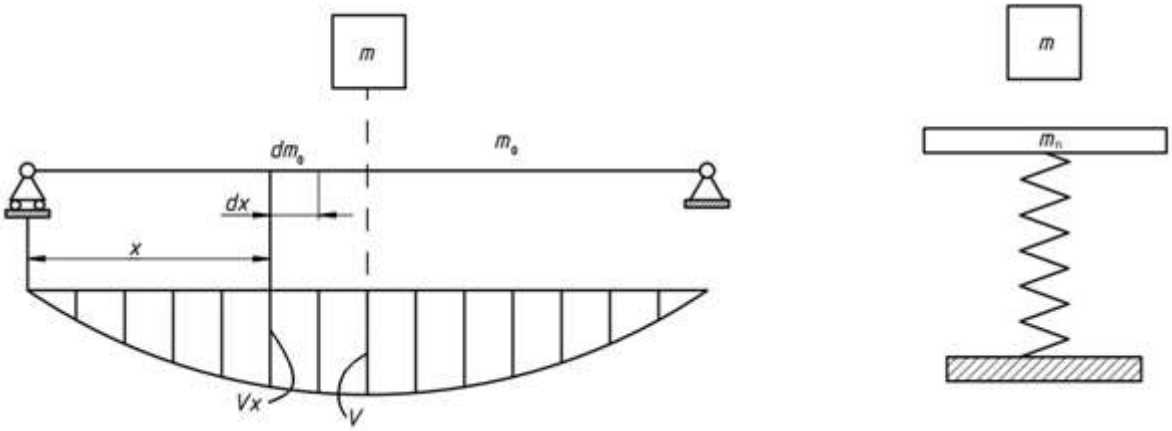


рис.19.4

Вновь приведенную массу определим из условий равенства кинетической энергии балки и приведённой массы. При этом будем считать, что скорость сечений балки при ударе распределена по закону синуса:

$$V_x = VSin\frac{\pi x}{l}$$

Где V-максимальное значение скорости.

Из указанных условий получаем равенства:

$$\frac{m_n V^2}{2} = \frac{1}{2}\int_{m_0} V_x^2 dm_0 = \frac{\rho A V^2}{2}\int_0^l Sin^2\frac{\pi x}{l}dx = \frac{1}{4}m_0 V^2$$

Отсюда получаем $m_n=0.5m_0$. При этом коэффициент динамичности:

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hm}{(m + 0.5m_0)\delta_{ст}}}$$

Аналогично можно учесть массу упругой системы при ударе и в других случаях.

Лекция 20. Продольно-поперечный изгиб балок.

Продольно-поперечным изгибом балок называется такой вид их нагружения, при котором поперечный изгиб сопровождается продольными силами сжатия. Пример такого нагружения балки показан на рис.20.1,а.

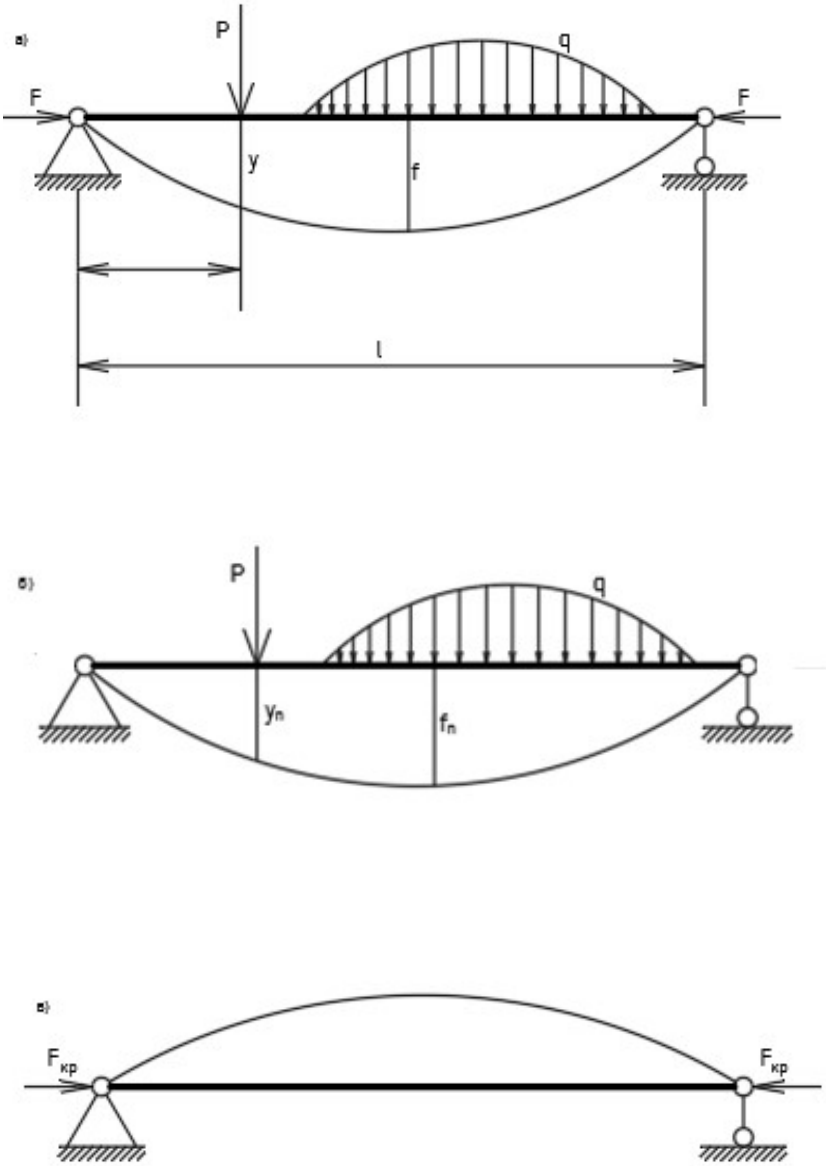


Рис.20.1

Задача состоит в определении прогиба балки $y = y(x)$. При этом прогиб балки при поперечном изгибе $y_{Ï} = y_{Ï}(x)$ считается известным (рис.20.1,б), а критическая сила сжатия балки определяется как (рис.20.1,в)

$$F_{êð} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \tag{20.1}$$

Приближенное решение дифференциального уравнения поперечного изгиба балки

$$EJy''_{Ï} = M_{Ï} \tag{20.2}$$

Представляется в виде

$$y_{Ï} \approx f_{Ï} \cdot \sin\frac{\pi x}{l} \tag{20.3}$$

где $f_{Ï}$ - известный максимальный прогиб балки при поперечном изгибе.

Из (20.1),(20.2) и (20.3) следует, что

$$M_{Ï} = -F_{Êð} f_{Ï} \sin\frac{\pi x}{l} \tag{20.4}$$

Приближенное решение дифференциального уравнения продольно - поперечного изгиба балки

$$EJy'' = M = M_{Ï} - Fy = -F_{Êð} f_{Ï} \sin\frac{\pi x}{l} - Fy \tag{20.5}$$

ищем в виде

$$y \approx f \cdot \sin\frac{\pi x}{l}$$

(20.6)

где f - максимальный искомый прогиб балки

Подставим (20.6) в (20.5) с учетом (20.1) , получаем равенство:

$$-F_{Êð} f \sin\frac{\pi x}{l} = -F_{Êð} f_{Ï} \sin\frac{\pi x}{l} - Ff \sin\frac{\pi x}{l}$$

Откуда находим

$$f = \frac{f_{Ï}}{1 - \dfrac{F}{F_{Êð}}} \tag{20.7}$$

При $F = 0$ имеем $f = f_{Ï}$, а при $F \to F_{Êð}$ $f \to \infty$. То есть дополнительная сила сжатия F существенно увеличивает прогиб балки и соответствующие ему напряжения с коэффициентом усиления П.С. Тимошенко

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{\hat{E}\eth}}}$$

<u>Контрольная задача</u>

Требуется определить дополнительный прогиб изначально слегка изогнутой балки, обусловленный продольными силами сжатия F .

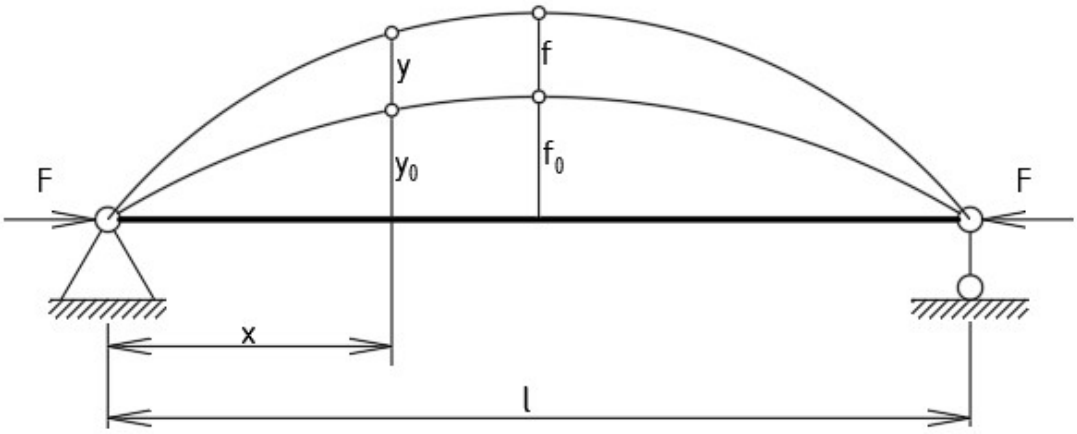


Рис.20.2

Начальный прогиб балки принимается в виде

$$y_0 \approx f_0 \cdot \sin\frac{\pi x}{l} \tag{20.8}$$

и считается известным.

При сжатии балки силами F прогиб увеличивается и представляется в виде

$$y \approx f \cdot \sin\frac{\pi x}{l} \tag{20.9}$$

где f - искомый максимальный дополнительный прогиб балки,

Дифференциальное уравнение дополнительного изгиба балки имеет вид

$$EJy''_{\hat{I}} = -F(y_0 + y) \tag{20.10}$$

Подставив (20.9) в (20.10) с учетом (20.1), получаем равенства:

$$-fF_{\hat{E}\eth} = -F(f_0 + f)$$

$$f = \frac{f_0}{\frac{F_{\hat{E}\eth}}{F} - 1}; \qquad f_0 + f = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_{\hat{E}\eth}}}$$

$$\frac{F}{f} = \frac{F_{\hat{E}\eth}}{f_0} - \frac{F}{f_0} \qquad (20.11)$$

При $F = 0$ имеем $f = 0$, а при $F \to F_{\hat{E}\eth}$ $f \to \infty$

<u>Замечание</u>

Прямое экспериментальное определение критических сил для сжатых стержней затруднительно, т.к. абсолютно ровных стержней не существует, и испытаниям всегда подвергаются слегка изогнутые стержни, для которых понятие о критических силах не имеет смысла. Результаты таких испытаний и следствия из них представлены на рис. 20.3.

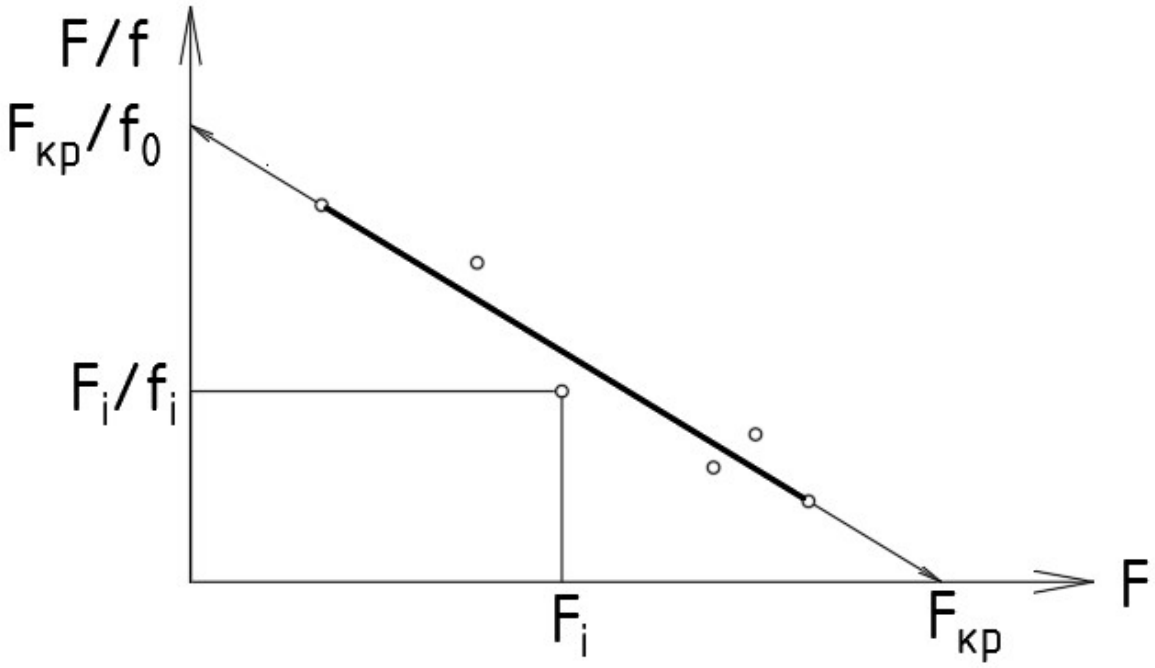


Рис.20.3

В эксперименте нагрузкам $F_i (i = 1,2,...)$ соответствуют прогибы $f_i (i = 1,2,...)$ и числа F_i / f_i. В системе координат $(F / f, F)$ получаем

набор точек, которые аппроксимируются прямой линией с продолжением до оси F в точку с координатой $F_{\hat{E}\eth}$ (т.е. так определяем величину $F_{\hat{E}\eth}$) и продолжением до оси F/f в точку с координатой $F_{\hat{E}\eth}/f_0$ (т.е. так определяем начальный прогиб f_0). Все это следует из формулы (20.11). При $F/f=0$ имеем $F=F_{\hat{E}\eth}$, а при $F=0$ имеем $f=0$ и $\lim\limits_{\substack{F\to 0\\ f\to 0}}\dfrac{F}{f}=\dfrac{F_{\hat{E}\eth}}{f_0}$.