

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

А.С. Гусев

**Курс лекций
по вероятностным методам
в механике**

Учебное пособие

Под редакцией Ю.Б. Цветкова



Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2020

УДК 531.8:519.2(075.8)
ББК 34.42
Г96

Издание доступно в электронном виде по адресу:
<https://bmstu.press/catalog/item/6732/>

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Прикладная механика»

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Гусев, А. С.

Г96 Курс лекций по вероятностным методам в механике : учебное пособие /
А. С. Гусев / под ред. Ю. Б. Цветкова— Москва : Издательство МГТУ
им. Н. Э. Баумана, 2020. — 99, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5371-9

Приведены некорректные обратные задачи статистической динамики, задачи по структурному анализу траекторий случайных процессов, задачи статистического диагностирования конструкций, а также методы расчета конструкций, находящиеся в условиях интенсивной коррозии и интенсивных нерегулярных воздействий. Для решения нелинейных задач рассмотрены методы марковских процессов, методы уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова, методы статистической линеаризации. Приведены задачи по оптимизации параметров машин и конструкций и их решения.

Для бакалавров и магистров, обучающихся по направлению 15.03.03 «Прикладная механика», и магистров, обучающихся по направлению 15.04.03 «Прикладная механика».

УДК 531.8:519.2(075.8)
ББК 34.42

ISBN 978-5-7038-5371-9

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020

Проблема неопределенности изящно (elegantly) решается с помощью понятий «случайная величина» и «случайный процесс». Однако это не конец истории, а ее начало, которая никогда не закончится.

Р. Беллман

Предисловие

Настоящее учебное пособие представляет собой краткий курс лекций, прочитанный автором студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана и МГТУ МАМИ, обучающимся по специальности «Динамика и прочность машин и конструкций» по направлению «Прикладная механика». Оно соответствует программам курсов «Статистическая динамика и надежность машин и конструкций», «Случайные процессы и их анализ» и «Вероятностные методы в механике машин и конструкций».

Цель учебного пособия — привить студентам навыки в постановке задач статистической динамики машин и конструкций и их решении с использованием современных вычислительных средств.

Задачи учебного пособия — научить студентов обосновывать расчетные схемы для различных механических систем и в статистическом аспекте проводить их динамический анализ с определением реакций на случайные воздействия, задаваемые их корреляционными функциями или энергетическими спектрами, оценивать надежность и ресурс конструкций при случайных процессах нагружения.

Предложенные к изучению различные методы решения задач статистической динамики в линейной и нелинейной постановке могут быть использованы для написания студентами самостоятельных научных работ и рефератов, в которых авторы могут сформулировать собственные воззрения на рассматриваемые проблемы.

Учебное пособие предназначено для бакалавров и магистров, прослушавших курсы лекций по «Теории колебаний», «Теории вероятностей и математической статистике» и «Случайным процессам и их анализу».

Книга посвящается светлой памяти академика РАН Владимира Васильевича Болотина.

Лекция 1

Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Вероятности событий A и B обозначим $P(A)$ и $P(B)$.

Вероятность того, что произойдет одно из этих двух событий, определяется по теореме о сложении вероятностей как

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность того, что произойдут оба этих события, определяется по теореме о произведении вероятностей как

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина x будет принимать значения в интервале Δx , обозначим $P(x \in \Delta x)$.

Плотность вероятности

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \in \Delta x)}{\Delta x}.$$

Интегральная функция распределения вероятностей для величины x

$$F(x) = P(x \in (-\infty, x)) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Характеристическая функция определяется преобразованием Фурье от плотности вероятности:

$$\chi(\omega) = \langle e^{i\omega x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx,$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор усреднения.

Стационарный случайный процесс $x(t)$ задается корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$$

или ее преобразованием по Фурье (спектральной плотностью)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Обратное преобразование Фурье от спектральной плотности определяет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Для белого шума интенсивностью k_0

$$K_x(\tau) = k_0 \delta(\tau);$$

$$S_x(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} = \text{const.}$$

Здесь дельта-функция Дирака

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \neq 0; \\ \infty & \text{при } \tau = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1.$$

Амплитудный спектр Фурье процесса $x(t)$ с синонимами «трансформанта Фурье», «интеграл Фурье» вычисляется по формуле

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Обратное преобразование от $\Phi_x(\omega)$ определяет процесс

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Для $x(t) = \delta(t)$

$$\Phi_\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} = \text{const};$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega.$$

Основная теорема теории случайных процессов состоит в «дельта-коррелированности амплитудных спектров», выраженной формулой Винера

$$\langle \Phi_x^*(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \rangle = S_x(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2),$$

где символом «*» (звездочкой) обозначен переход к комплексно-сопряженным функциям.

Лекция 2

Структурный анализ случайных процессов

При формулировке задач структурного анализа случайных процессов рассмотрим их некоторую реализацию $x(t)$ и отметим на ней характерные точки, соответствующие им значения процесса и интервалы времени между ними (рис. 2.1):

точки пересечения случайного процесса со средним (нулевым) уровнем, называемые нулями процесса;

точки, соответствующие экстремальным значениям процесса, которые называются экстремумами процесса;

точку A , соответствующую наибольшему для данной реализации максимуму процесса, называемую абсолютным максимумом процесса;

точку B , соответствующую перегибу траектории процесса, называемую точкой перегиба траектории;

точки пересечения случайного процесса с некоторым уровнем, определяющие число превышений (выбросов) за этот уровень;

интервалы времени τ_0 между двумя соседними нулями, от которых зависит частота процесса, рассчитанная по пересечениям нулевого уровня (частота по нулям);

интервалы времени τ_* , соответствующие двум соседним экстремумам и определяющие частоту процесса по экстремумам;

отрезки x_{\max} и x_{\min} между нулевой линией и соответствующим экстремумом, называемые экстремальными значениями процесса (максимумом и минимумом);

отрезок x_* между нулевой линией и наибольшим максимумом процесса, называемый значением абсолютного максимума;

приращение процесса x_p между двумя соседними экстремумами, называемое размахом процесса.

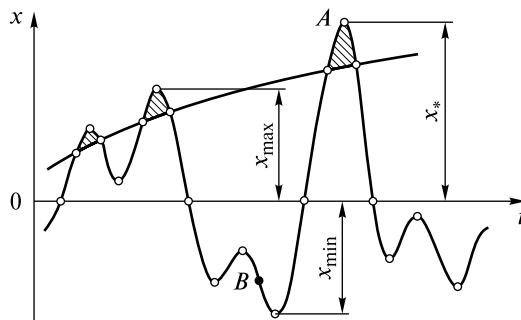


Рис. 2.1

Получение вероятностной информации о числе указанных выше точек за некоторый промежуток времени и о величинах указанных выше отрезков по заданным вероятностным характеристикам процессов (по корреляционным функциям или энергетическим спектрам) является задачей структурного анализа случайных процессов.

Отметим некоторые вероятностные характеристики параметров процессов, которые можно установить при проведении структурного анализа:

1) распределение вероятностей числа нулей, экстремумов и других особых точек траектории случайного процесса при заданной его длительности (частными характеристиками этих распределений являются среднее число нулей \bar{n}_0 , среднее число экстремумов \bar{n}_3 , среднее число точек перегиба траектории \bar{n}_n в единицу времени);

2) распределение вероятностей интервалов времени между соседними нулями, экстремумами и точками перегиба траектории (частными характеристиками этих распределений является среднее значение интервала времени между соседними нулями $\bar{\tau}_0$, экстремумами $\bar{\tau}_3$ и точками перегиба $\bar{\tau}_n$);

3) распределение вероятностей значений процесса, соответствующих его максимумам и минимумам, т. е. распределение вероятностей максимумов и минимумов;

4) распределение вероятностей приращений процесса между двумя его соседними экстремумами, т. е. распределение вероятностей размахов;

5) распределение вероятностей значений процесса, соответствующих его абсолютному максимуму, т. е. распределение вероятностей абсолютного максимума.

Нули, выбросы, перегибы траекторий и другие особые точки случайных процессов

Число пересечений нулевого уровня (число нулей) некоторой функции $x(t)$ в течение времени t

$$n_0(t) = \int_0^t |\dot{x}| \delta\{x(\tau)\} d\tau, \quad (2.1)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

Справедливость соотношения (2.1) следует из определения дельта-функции.

Поскольку при дифференцировании функции ее экстремумы переходят в нули, то из (2.1) число экстремумов функции $x(t)$ за время t можем найти по формуле

$$n_1(t) = \int_0^t |\ddot{x}| \delta\{x(\tau)\} d\tau. \quad (2.2)$$

Число точек перегиба траектории, в которых вторая производная равна нулю,

$$n_2(t) = \int_0^t |\ddot{x}| \delta\{\ddot{x}(\tau)\} d\tau. \quad (2.3)$$

Обобщив соотношения (2.1)–(2.3), получим следующее выражение для нахождения числа особых точек траектории функции $x(t)$, в которых ее k -я производная равна нулю:

$$n_k(t) = \int_0^t |x^{(k+1)}| \delta\{x^{(k)}(\tau)\} d\tau \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Если $x(t)$ – случайная функция, то для определения вероятностных характеристик числа особых точек следует ввести соответствующие функции распределения вероятностей случайных величин и рассмотреть соотношения (2.1)–(2.4) как функции случайных аргументов. Так, если через $f(x, \dot{x}, \tau)$ обозначить плотность совместного распределения вероятностей функции $x(t)$ и ее производной для некоторого момента τ , среднее число нулей этой функции за время t

$$\bar{n}_0(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}(\tau)| \delta\{x(\tau)\} f(x, \dot{x}, \tau) dx d\dot{x} d\tau = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}(\tau)| f(0, \dot{x}, \tau) d\dot{x} d\tau. \quad (2.5)$$

Определение числа превышений процессом $x(t)$ некоторого уровня x сводится к определению числа нулей разности $(x(t) - x)$. Если случайная функция $x(t)$ стационарна, из (2.5) получим следующее выражение для нахождения среднего числа превышений процессом $x(t)$ уровня x в единицу времени:

$$\bar{n}(x) = \int_0^{\infty} x f(x, \dot{x}) d\dot{x}. \quad (2.6)$$

При этом среднее число пересечений нулевого уровня (т. е. среднее число нулей) в единицу времени

$$\bar{n}_0 = 2\bar{n}(0).$$

По аналогии с (2.6) получим выражения для определения среднего числа экстремумов и точек перегиба траектории в единицу времени:

$$\bar{n}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| f_{\dot{x}\ddot{x}}(0, \dot{x}) d\dot{x}; \quad (2.7)$$

$$\bar{n}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}| f_{\ddot{x}\ddot{\ddot{x}}}(0, \ddot{x}) d\ddot{x}, \quad (2.8)$$

где $f_{\dot{x}\ddot{x}}(0, \ddot{x})$ — плотность совместного распределения вероятностей второй и третьей производных при $\dot{x} = 0$; $f_{\ddot{x}\ddot{\ddot{x}}}(0, \ddot{x})$ — плотность совместного распределения вероятностей первой и второй производных при $\dot{x} = 0$.

Подставив в (2.6)–(2.8) выражения для плотностей распределения вероятностей и вычислив интегралы, для гауссовских стационарных процессов получим

$$\bar{n}(x) = \frac{s_{\dot{x}}}{2\pi s_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right); \quad (2.9)$$

$$\bar{n}_0 = \frac{s_{\ddot{x}}}{2\pi s_x}, \quad \bar{n}_1 = \frac{s_{\ddot{x}}}{2\pi s_{\dot{x}}}, \quad \bar{n}_2 = \frac{s_{\ddot{x}}}{2\pi s_{\ddot{x}}}, \quad (2.10)$$

где $s_x, s_{\dot{x}}, s_{\ddot{x}}, s_{\ddot{x}}$ — средние квадратические отклонения процесса и его первых трех производных соответственно.

Обобщая полученные результаты, запишем следующее выражение для определения среднего числа точек траектории гауссовского стационарного процесса, в которых k -я производная равна нулю:

$$\bar{n}_k = \frac{s_{x^{(k+)}}}{2\pi s_{x^{(k)}}}, \quad (2.11)$$

где $s_{x^{(k)}}, s_{x^{(k+)}}$ — средние квадратические значения k -й и $(k+1)$ -й производных процесса $x(t)$.

Сложность структуры случайных процессов характеризуется системой параметров, представляющих собой отношения числа экстремумов к числу нулей, числа точек перегиба траектории к числу экстремумов и т. д.:

$$k_1 = \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_0}, \quad k_2 = \frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1}, \quad k_3 = \frac{\bar{n}_3}{\bar{n}_2}, \quad \dots \quad (2.12)$$

При этом выполняются соотношения

$$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \dots \quad (2.13)$$

Равенства в (2.13) достигаются только для процесса с простой структурой, для которого

$$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = 1.$$

Наибольшее значение имеет первый параметр сложности структуры k_1 , который в дальнейшем для краткости будем обозначать k .

В случае когда процесс $x(t)$ является нестационарным гауссовским процессом, из (2.5) получим следующую формулу для определения числа превышений уровня x за время t :

$$\begin{aligned} \bar{n}(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{s_{\dot{x}}(\tau)}{s_x(\tau)} \sqrt{1-r^2(\tau)} \exp \left[\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}(\tau)}{s_x(\tau)} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \times \left. \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2(1-r^2(\tau))} \left(\frac{\bar{x}(\tau)}{s_{\dot{x}}} + \frac{r(\tau)(x - \bar{x}(\tau))}{s_x(\tau)} \right) \right] + \right. \right. \\ & + \sqrt{\frac{2\pi}{1-r^2(\tau)}} \left(\frac{\bar{x}(\tau)}{s_{\dot{x}}} + \frac{r(\tau)(x - \bar{x}(\tau))}{s_x(\tau)} \right) \Phi \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2(\tau)}} \left(\frac{\bar{x}(\tau)}{s_{\dot{x}}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{r(\tau)(x - \bar{x}(\tau))}{s_x(\tau)} \right) \right] \right] \Bigg\} d\tau, \quad (2.14) \end{aligned}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$, $\bar{x}(\tau)$, $\bar{\dot{x}}(\tau)$, $s_x^2(\tau)$, $s_{\dot{x}}^2(\tau)$, $r = r_{xx}(\tau)$ — переменные во времени средние значения, дисперсии и коэффициент корреляции процессов и $x(t)$ и $\dot{x}(t)$.

При $\bar{x} = \bar{\dot{x}} = r = 0$

$$\bar{n}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{s_{\dot{x}}(\tau)}{s_x(\tau)} \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2(\tau)}\right) d\tau. \quad (2.15)$$

Для стационарного процесса $x(t)$ при $t=1$ возвращаемся к формуле (2.9).

Пример 2.1. Требуется провести анализ структуры случайного процесса $x(t)$, заданного корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2),$$

где α — параметр.

Тогда в соответствии с (2.4) корреляционные функции первой, второй и третьей производных процесса $x(t)$ будем определять как

$$K_{\dot{x}}(\tau) = -\ddot{K}_x(\tau); \quad K_{\ddot{x}}(\tau) = K_x^{IV}(\tau); \quad K_{\overset{\cdot\cdot}{x}}(\tau) = -K_x^{VI}(\tau). \quad (2.16)$$

Отсюда найдем дисперсии первых трех производных:

$$s_{\dot{x}}^2 = -\ddot{K}_x(0) = 2\alpha^2; \quad s_{\ddot{x}}^2 = K_x^{IV}(0) = 12\alpha^4; \quad s_{\overset{\cdot\cdot}{x}}^2 = -K_x^{VI}(0) = 120\alpha^4.$$

В соответствии с (2.10) определим среднее число нулей, экстремумов и точек перегиба в единицу времени:

$$\bar{n}_0 = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{2}; \quad \bar{n}_1 = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{6}; \quad \bar{n}_2 = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{10}.$$

В итоге получим следующие параметры сложности структуры процесса:

$$k_1 = \sqrt{3} \approx 1,73; \quad k_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1,29.$$

Пример 2.2. Требуется найти число нулей, экстремумов и точек перегиба траектории случайного процесса, описываемого корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = e^{-\alpha^2 \tau^2} \cos \beta \tau,$$

где α , β — параметры.

По аналогии с примером 2.1 после вычислений получим

$$\bar{n}_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}; \quad \bar{n}_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{12\alpha^4 + 12\alpha^2\beta^2 + \beta^4}{2\alpha^2 + \beta^2}};$$

$$\bar{n}_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{120\alpha^6 + 180\alpha^4\beta^2 + 30\alpha^2\beta^4 + \beta^6}{12\alpha^4 + 12\alpha^2\beta^2 + \beta^4}}.$$

Пример 2.3. Требуется оценить сложность структуры случайного процесса типа усеченного белого шума, определяемого спектральной плотностью $S(\omega) = 1$ в диапазоне частот от 0 до ω_1 .

В соответствии с (2.16) получим следующие выражения для дисперсий процесса и его первых трех производных:

$$s_x^2 = \omega_1; \quad s_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{3} \omega_1^3; \quad s_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{5} \omega_1^5; \quad s_{\overset{\cdot}{\ddot{x}}}^2 = \frac{1}{7} \omega_1^7.$$

Ожидаемое число нулей, экстремумов и точек перегиба найдем в виде

$$\bar{n}_0 = \frac{\omega_1}{\pi\sqrt{3}}; \quad \bar{n}_1 = \frac{\omega_1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{5}}; \quad \bar{n}_2 = \frac{\omega_1}{\pi} \sqrt{\frac{5}{7}};$$

При этом параметры сложности структуры не зависят от наибольшей частоты ω_1 и принимают следующие значения:

$$k_1 = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,34; \quad k_2 = \frac{5}{\sqrt{21}} \approx 1,09; \quad k_3 = \frac{7}{\sqrt{45}} \approx 1,04.$$

Для белого шума (т. е. при $\omega_1 \rightarrow \infty$) частоты процесса не определяются, поскольку такой процесс является недифференцируемым. Вместе с тем параметры сложности структуры в соответствии с (2.15) имеют вполне определенные значения. При этом сложность структуры белого шума относительно невелика. Так, по сравнению с процессом, рассмотренным в примере 2.1, все параметры сложности его структуры имеют меньшие значения.

Пример 2.4. Требуется определить ожидаемую частоту превышений процессом

$$x(t) = x_1(t) \sin \omega_0 t \tag{2.17}$$

уровня x , где $x_1(t)$ — гауссовский стационарный процесс с $\bar{x} = \bar{\dot{x}} = 0$ и дисперсиями $s_x^2, s_{\dot{x}}^2$; ω_0 — частота гармонической составляющей.

В соответствии с (2.17) дисперсии процессов $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и их взаимный коэффициент корреляции r_{xx} (что достаточно для определения соответствующей взаимной плотности распределения вероятностей) будем вычислять по формулам

$$s_x^2 = s_{x_1}^2 \sin^2 \omega_0 t; \quad s_{\dot{x}}^2 = s_{\dot{x}_1}^2 \sin^2 \omega_0 t + \omega_0^2 s_{x_1}^2 \cos^2 \omega_0 t;$$

$$r_{xx} = \frac{\omega_0 \cos \omega_0 t}{\sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \omega_1^2 \sin^2 \omega_0 t}}, \tag{2.18}$$

где $\omega_1 = \frac{s_{\dot{x}}}{s_x}$ — эффективная (средняя) частота процесса $x_1(t)$.

Поставленная задача может быть теперь точно решена с использованием соотношения (2.14). При этом, однако, приходим к сложным интегралам, поддающимся только численному анализу на ЭВМ. Для получения прибли-

женного эффективного решения поставленной задачи можно поступить следующим образом.

Введем в соотношения (2.18) случайную фазу φ , равномерно распределенную на интервале $0 \dots 2\pi$. Аргумент $\omega_0 t$ заменим на $(\omega_0 t + \varphi)$ и усредним по φ . Получим

$$s_x^2 = \frac{1}{2} S_{x_1}^2; \quad s_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{2} (s_x^2 + \omega_0^2 s_{x_1}^2); \quad r_{xx} = 0.$$

В соответствии с (2.9) искомую частоту превышений уровня x определим по формуле

$$\bar{n}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right). \quad (2.19)$$

Эффективная частота процесса

$$\bar{n}(0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}. \quad (2.20)$$

Таким образом, задачи об определении вероятностных характеристик особых точек траекторий случайных процессов решены.

Скорость и кинетическая энергия в момент начала выброса

Для определения скорости и кинетической энергии в момент начала выброса за уровень x найдем соответствующую плотность условного распределения вероятностей $f_n(\dot{x}/x)$ для первой производной случайного процесса $x(t)$.

Пусть $f(x, \dot{x})$ — плотность совместного распределения вероятностей процесса $x(t)$ и его первой производной. Тогда вероятность того, что в некотором интервале времени dt в точках траектории процесса $x(t)$ будут выполняться условия $x \in dx$, $\dot{x} \geq 0$, можем выразить следующим образом:

$$dt \int_0^{\infty} \dot{x} f(x, \dot{x}) d\dot{x}.$$

Поскольку вероятность одновременного выполнения двойного события ($x \in dx$, $\dot{x} \in d\dot{x}$) равна произведению вероятностей отдельных событий $x \in dx$ и $x \in d\dot{x}$, то имеем

$$\dot{x} f(x, \dot{x}) d\dot{x} dt = \left[dt \int_0^{\infty} \dot{x} f(x, \dot{x}) d\dot{x} \right] (f_n(\dot{x}/x) dx).$$

Отсюда следует, что искомая плотность распределения вероятностей

$$f_n(\dot{x}/x) = \frac{\dot{x} f(x, \dot{x})}{\int_0^{\infty} \dot{x} f(x, \dot{x}) d\dot{x}}. \quad (2.21)$$

В связи с тем, что для стационарных процессов $f(x, \dot{x}) = f(x)f(\dot{x})$, плотность распределения вероятностей скорости в момент начала выброса за уровень x не зависит от этого уровня, ее можем найти по формуле

$$f_n(\dot{x}) = \frac{x f(\dot{x})}{\int_0^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}) d\dot{x}}. \quad (2.22)$$

Подставив в (2.22) выражение для $f(\dot{x})$, из (2.21), получим

$$f_n(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{s_{\dot{x}}^2} \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2s_{\dot{x}}^2}\right). \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что рассеяние скорости в момент начала выброса описывается законом Рэлея.

Поставим в соответствие скорости \dot{x} некоторую массу m объекта и вычислим кинетическую энергию этой массы $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$. Поскольку величины T и \dot{x} связаны функциональной зависимостью, запишем

$$F(T) = F_n(\dot{x}) = 1 - \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2s_{\dot{x}}^2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{T}{ms_{\dot{x}}^2}\right), \quad (2.24)$$

где $F(T)$, $F_n(\dot{x})$ — интегральные функции распределений вероятностей величин T и \dot{x} .

Отсюда следует, что распределение вероятностей кинетической энергии описывается экспоненциальным законом со средним значением $\bar{T} = ms_{\dot{x}}^2$.

Максимумы случайных процессов

Рассмотрим вычисление плотности распределения вероятностей максимумов $f_M(x)$ случайного процесса $x(t)$. Совместную плотность распределения вероятностей $f(x, \dot{x}, \ddot{x})$ процесса и его первых двух производных будем считать известной. Тогда вероятность того, что в интервале времени dt в точках перегиба траектории процесса $x(t)$ выполняются условия $x \in dx$, $\dot{x} \in d\dot{x}$, $\ddot{x} \in d\ddot{x}$, составит

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx d\dot{x} d\ddot{x} = |\ddot{x}| f(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx d\dot{x} d\ddot{x} dt.$$

Вероятность обнаружить в интервале времени dt максимум x_m в интервале dx

$$P\{x_m \in (dx dt)\} = dx dt \int_{-\infty}^0 |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x},$$

а произвольный максимум

$$P\{x_m \in (dt)\} = dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} dx = dt \int_{-\infty}^0 |\ddot{x}| f(0, \ddot{x}) d\ddot{x},$$

где $f(0, \ddot{x})$ — плотность совместного распределения вероятностей первой и второй производных при $\dot{x} = 0$.

Поскольку вероятность обнаружить максимум в области $\{dt, dx\}$ равна произведению вероятностей обнаружить какой-либо максимум в интервале dt и того, что этот максимум будет в интервале dx , получим

$$dx dt \int_{-\infty}^0 |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} = \left\{ dt \int_{-\infty}^0 |\ddot{x}| f(0, \ddot{x}) d\ddot{x} \right\} \{f_M(x) dx\}.$$

Отсюда найдем искомую плотность распределения вероятностей максимумов:

$$f_M(x) = \frac{\int_{-\infty}^0 |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x}}{\int_{-\infty}^0 |\ddot{x}| f(0, \ddot{x}) d\ddot{x}}. \quad (2.25)$$

Подставив в (2.25) выражения для $f(x, 0, \ddot{x})$ и $f(0, \ddot{x})$, соответствующие гауссовским стационарным процессам и вычислив интегралы, получим

$$f_M(x) = \frac{1}{2ks} \left\{ \sqrt{\frac{2(k^2-1)}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2} \frac{k^2}{k^2-1}\right) + \frac{x}{s} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{s\sqrt{k^2-1}}\right) \right] \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right) \right\}, \quad (2.26)$$

где $k = \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_0} = \frac{s_x s_{\ddot{x}}}{s_{\dot{x}}^2}$ — первый параметр сложности структуры случайного процесса, представляющий собой отношение среднего числа экстремумов к среднему числу нулей; s^2 — дисперсия процесса $x(t)$; $\Phi(\cdot)$ — функция Лапласа, определяемая соотношением

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt.$$

В этом случае первые два момента распределения вероятностей (2.26) получим в следующем виде:

$$\ddot{x}_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_M(x) dx = \frac{s}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (2.27)$$

$$\langle x_{\max}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_M(x) dx = \frac{k^2+1}{k} s^2. \quad (2.28)$$

При $k=1$ (т. е. для процессов с одинаковыми числами нулей и экстремумов) выражение (2.26) принимает вид плотности распределения вероятностей Рэлея:

$$f_M(x) = \frac{x}{s^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right). \quad (2.29)$$

При $k=\infty$ имеем нормальное распределение вероятностей со средним значением, равным нулю, и дисперсией s^2 , т. е. в этом случае распределения вероятностей процесса и его максимумов совпадают. Эти результаты также можно получить непосредственно из соотношения (2.25), если учесть, что коэффициент корреляции $r_{x\ddot{x}}$ и параметр сложности структуры процессов k связаны соотношением $r_{x\ddot{x}} = -1/k$, а плотность совместного распределения вероятностей процесса и его второй производной

$$f(x, \ddot{x}) = f(x/\ddot{x}) f(\ddot{x}), \quad (2.30)$$

где $f(x/\ddot{x})$ — плотность условного распределения вероятностей величины x при заданном значении \ddot{x} ; $f(\ddot{x})$ — плотность распределения вероятностей второй производной.

В случае когда $k=\infty$, имеем $r_{x\ddot{x}} = 0$; при этом процессы $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ являются статистически независимыми. Тогда

$$f(x, \ddot{x}) = f(x)f(\ddot{x}). \quad (2.31)$$

Отсюда $f_M(x) = f(x)$. При $k=1$ имеем $r_{x\ddot{x}} = -1$ и процессы $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ становятся линейно зависимыми. Для этого случая соотношение (2.30) примет вид

$$f(x, \ddot{x}) = \delta\left(x + \frac{s_x}{s_{\ddot{x}}} \ddot{x}\right) f(\ddot{x}), \quad (2.32)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

Отсюда найдем искомую плотность распределения вероятностей максимумов.

Подставив (2.32) в (2.25), вновь получим формулу (2.29).

Из соотношения (2.26) следует, что при больших значениях x

$$f_M(x) = \frac{x}{ks^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right). \quad (2.33)$$

Этот же результат можно получить по известному среднему числу превышений $\bar{n}(x)$ процессом $x(t)$ уровня x . Действительно, ожидаемое число больших максимумов в интервале dx

$$d\bar{n}_M = |\bar{n}(x) - \bar{n}(x + dx)| = n_M f_M(x) dx,$$

где \bar{n}_M — среднее число максимумов в единицу времени.

Отсюда следует, что

$$f_M(x) = \frac{1}{\bar{n}_M} \left| \frac{d\bar{n}(x)}{dx} \right|. \quad (2.34)$$

Подставив в (2.34) выражение для $\bar{n}(x)$, из (2.9) вновь получим формулу (2.34). Определенный интерес представляет информация о положительных максимумах x_+ случайного процесса $x(t)$.

Плотность распределения вероятностей для таких максимумов

$$f_+(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ cf_M(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

где $f_M(x)$ — плотность распределения вероятностей для всех максимумов; c — коэффициент нормировки распределения,

$$c = \frac{1}{\int_0^{\infty} f_M(x) dx} = \frac{2k}{k+1};$$

k — параметр сложности структуры случайного процесса.

Частота появления положительных максимумов

$$\omega_+ = \frac{k+1}{2} \omega_0.$$

Значения случайного процесса в точках перегиба траектории

Значения случайного процесса в точках перегиба траектории используют в расчетах на усталостную долговечность в качестве средних значений циклов. Найдем для этих значений соответствующую плотность распределения вероятностей $f_n(x)$. Обозначим плотность совместного распределения вероятностей процесса, его второй и третьей производных как $f(x, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$. Тогда вероятность события того, что в интервале времени dt в точках траектории случайного процесса $x(t)$ выполняются условия $x \in dx$, $\ddot{x} \in d\ddot{x}$, $\ddot{\ddot{x}} \in d\ddot{\ddot{x}}$, составит

$$f(x, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) dx d\ddot{x} d\ddot{\ddot{x}} = |\ddot{\ddot{x}}| f(x, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) dx d\ddot{x} dt.$$

Вероятность обнаружить в интервале времени dt точку перегиба траектории со значением случайного процесса в интервале dx

$$P\{x_n \in (dx dt)\} = dx dt \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{\ddot{x}}| f(x, 0, \ddot{\ddot{x}}) d\ddot{\ddot{x}}.$$

Вероятность обнаружить в интервале времени dt какую-либо точку перегиба траектории

$$P\{x_n \in (dxdt)\} = dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} dx = dt \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}| f(0, \ddot{x}) d\ddot{x},$$

где $f(0, \ddot{x})$ — плотность совместного распределения вероятностей для второй и третьей производных при $\ddot{x} = 0$.

Поскольку вероятность обнаружить точку перегиба траектории в области $\{dt, dx\}$ равна произведению вероятности обнаружить в интервале dt какую-либо точку перегиба и вероятности того, что в этой точке значение x будет находиться в интервале dx , имеем

$$dxdt \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} = \left\{ dt \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}| f(0, \ddot{x}) d\ddot{x} \right\} \{f_n(x) dx\}.$$

С учетом этого искомую плотность распределения вероятностей значений случайного процесса в точках перегиба его траектории можем определить по формуле

$$f_n(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}| f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x}}. \quad (2.35)$$

Подставив в (2.35) выражения для $f(x, 0, \ddot{x})$ и $f(0, \ddot{x})$, соответствующие гауссовским стационарным процессам, и вычислив интегралы, получим

$$f_n(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi(1-k^{-2})}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2(1-k^{-2})}\right), \quad (2.36)$$

т. е. распределение вероятностей значений гауссовского стационарного процесса в точках перегиба траектории является нормальным со средним значением, равным нулю, и дисперсией

$$s_n^2 = s^2(1-k^{-2}).$$

Амплитуды и средние значения простых циклов

В расчетах на усталостную долговечность конструкций амплитуды σ_a и средние значения σ_m простых циклов случайного процесса $\sigma(t)$ вычисляются по формулам

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), \quad \sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}), \quad (2.37)$$

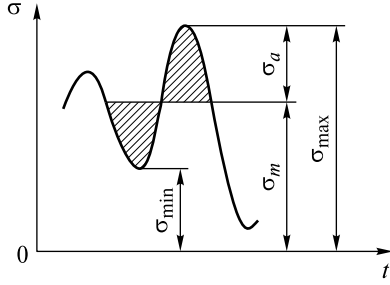


Рис. 2.2

где σ_{\max} , σ_{\min} — следующие друг за другом максимальное и минимальное значения этого процесса, определяющие один простой цикл нагружения.

Из геометрических соотношений следует, что средние значения циклов мало отличаются от значений процесса в точках перегиба траектории (рис. 2.2), поэтому распределение вероятностей средних значений в циклах гауссовских стационарных процессов можем принять в виде (2.36). При этом математическое ожидание среднего значения и второй момент распределения вероятностей будем определять как

$$\bar{\sigma}_m = 0, \quad \langle \sigma_m^2 \rangle = \frac{k^2 - 1}{k^2} s^2. \quad (2.38)$$

Поскольку

$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m, \quad (2.39)$$

то, усреднив левую и правую части равенства (2.39) и учтя соотношения (2.38), получим

$$\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_{\max} = \frac{s}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (2.40)$$

Возведя в квадрат левую и правую части равенства (2.39) и усреднив полученный результат, имеем

$$\langle \sigma_a^2 \rangle = \langle \sigma_{\max}^2 \rangle - 2 \langle \sigma_a \sigma_m \rangle - \langle \sigma_m^2 \rangle.$$

В связи с тем, что

$$4 \langle \sigma_a \sigma_m \rangle = \langle \sigma_{\max}^2 - \sigma_{\min}^2 \rangle = 0,$$

с учетом соотношений (2.28) и (2.38) найдем

$$\langle \sigma_a^2 \rangle = \frac{2}{k^2} s^2. \quad (2.41)$$

Двум найденным моментам, вычисленным по (2.40) и (2.41), амплитудам простых циклов соответствует закон распределения вероятностей Рэлея с плотностью

$$f_a(\sigma) = \frac{k^2 \sigma}{s^2} \exp\left(-\frac{k^2 \sigma^2}{2s^2}\right). \quad (2.42)$$

Абсолютный максимум случайных процессов и оценка вероятности внезапного отказа

Рассмотрим задачу нахождения функции распределения вероятностей $F^*(x, t)$ абсолютного максимума случайного процесса $x(t)$ в интервале времени $(0, t)$. Выделив из заданного процесса поток его максимумов и считая их статистически независимыми, в соответствии с теоремой о произведении вероятностей получим

$$F^*(x, t) = [F_m(x)]^{n(t)}, \quad (2.43)$$

где $F_m(x)$ — функция распределения вероятностей максимумов; $n(t)$ — число максимумов за время t .

Для вычисления функции (2.43) введем в рассмотрение величину $z = n(t)(1 - F_m(x))$ и примем, что

$$n(t) = \bar{n}_m t, \quad F_m(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right),$$

где \bar{n}_m — среднее число максимумов в единицу времени.

При большом числе $n_m(t)$

$$F^*(x, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = e^{-z} = \exp\left(-\bar{n}_m t \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right)\right) \approx \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_0 \\ 1 - \bar{n}_m t \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right) & \text{при } x \geq x_0, \end{cases} \quad (2.44)$$

где x_0 — решение уравнения

$$F_m(x_0) = 1 - \frac{1}{\bar{n}_m t}. \quad (2.45)$$

Среднее значение абсолютного максимума

$$\bar{x}_* \approx x_0 = s \sqrt{2 \ln(\bar{n}(0))}, \quad (2.46)$$

где $\bar{n}(0)$ — среднее число выбросов за нулевой уровень.

Наряду с потоком максимумов из заданного случайного процесса можно выделить и другие потоки случайных величин, характеризующие те или иные особенности изучаемых процессов. В частности, можно рассмотреть поток скоростей в момент достижения процессом некоторого уровня, поток значений кинетической энергии, соответствующих потоку скоростей, поток амплитуд циклов и т. п. Во всех этих случаях для определения распределений вероятностей абсолютных максимумов можно использовать соотношение (2.43), где вместо $F_m(x)$ следует подставить функцию распределения вероятностей

исследуемого параметра, а вместо n_m — среднюю частоту этого параметра. Так, для нахождения распределения вероятностей абсолютного максимума скорости в момент начала выброса за пределы уровня x функцию распределения вероятностей скорости в соответствии с (2.23) примем в виде

$$F_n(\dot{x}) = 1 - \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2s_x^2}\right), \quad (2.47)$$

а частоту потока определим как частоту выбросов за уровень x по формуле (2.9).

Тогда функцию распределения вероятностей абсолютного максимума скорости в момент начала выброса за уровень x получим в виде

$$F_n^*(\dot{x}/x, t) = 1 - \bar{m}(0) \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2s_x^2} - \frac{x^2}{2s_x^2}\right). \quad (2.48)$$

Следует отметить, что в отличие от (2.46) соотношение (2.48) является функцией двух переменных.

Среднее значение абсолютного максимума скорости в момент начала выброса за уровень x будем определять по формуле

$$\langle \dot{x}_*/x \rangle = s_x \sqrt{2 \ln(\bar{m}(0)) - \frac{x^2}{s_x^2}}. \quad (2.49)$$

Из сопоставления выражений (2.46) и (2.49) следует, что среднее значение абсолютного максимума скорости равно нулю в момент времени, когда процесс достигает наибольшего значения, т. е.

$$\langle \dot{x}_*/x = x_* \rangle = 0.$$

Получим функцию распределения вероятностей абсолютного максимума кинетической энергии, соответствующей началу выброса за уровень x :

$$F_n^*(T/x, t) = 1 - \bar{m}(0) \exp\left(-\frac{T}{T} - \frac{x^2}{2s_x^2}\right). \quad (2.50)$$

Среднее значение абсолютного максимума кинетической энергии найдем в виде

$$\langle T_*/x \rangle = \bar{T} \left(\ln(\bar{m}(0)) - \frac{x^2}{2s_x^2} \right). \quad (2.51)$$

Среднее значение абсолютного максимума кинетической энергии равно нулю в момент времени, когда процесс достигает наибольшего значения, т. е.

$$\langle T_*/x = x_* \rangle = 0.$$

Аналогично можно получить функцию распределения вероятностей абсолютного максимума амплитуд циклов, средних значений циклов и т. п.

Таким образом, для любого параметра x случайного процесса $x(t)$ можно найти распределение вероятностей его наибольшего значения, соответствующего любому интервалу времени t . Если этот параметр однозначно характеризует уровень качества функционирования системы и известно его пре-

дельно допустимое значение x_* , то надежность системы на интервале времени t будет определяться вероятностью

$$P(t) = P\{x(\tau) \leq x_*, \tau \in (0, t)\} = F^*(x_*, t) \approx 1 - t\bar{m}(x_*), \quad (2.52)$$

где $F^*(\cdot)$ — интегральная функция распределения вероятностей абсолютного максимума процесса $x(t)$; $\bar{m}(x_*)$ — ожидаемое число выбросов за пределы уровня x_* в единицу времени.

В случае, когда функционирование системы описывается вектором состояния $\vec{v}(t)$ с границей s области допустимых значений Ω_* (рис. 2.3), вероятность безотказной работы в интервале времени $(0, t)$ по аналогии с (2.55) можно вычислить по формуле

$$H(t) = P\{\vec{v}(t) \in \Omega_*, \tau \in (0, t)\} \approx 1 - \bar{n}_s(t), \quad (2.53)$$

где $\bar{n}_s(t)$ — ожидаемое число выходов процесса $\vec{v}(t)$ из области Ω_* .

Для вычисления $\bar{n}_s(t)$ введем дельта-функцию $\delta(\vec{v})$ векторного аргумента \vec{v} , определяемую с помощью соотношений

$$\delta(\vec{v}) = \begin{cases} 0, & \vec{v} \neq 0; \\ \infty, & \vec{v} = 0; \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\int_A \delta(\vec{v}) d\vec{v} = 1,$$

где A — любая окрестность \vec{v} при $\vec{v} = 0$.

В соответствии с (2.54) число пересечений процессом $\vec{v}(t)$ границы s за время t

$$n_s(t) = \int_0^t \dot{\vec{v}}(\tau) \delta(\vec{v}(\tau) - \vec{v}_s) d\tau, \quad (2.55)$$

где \vec{v}_s — значение вектора \vec{v} на границе s (см. рис. 2.3).

Число выходов процесса $\vec{v}(t)$ из области Ω_* через границу s за время t

$$n_s(t) = \int_0^t \int_{\Omega_*} \delta\{\vec{v}(\tau) - \vec{v}_s\} d\dot{\vec{v}} d\tau, \quad (2.56)$$

где Ω_* — область интегрирования по $\dot{\vec{v}}$, в которой нормальная составляющая вектора $\dot{\vec{v}}$ больше нуля, т. е. область, где $\dot{\vec{v}}_n = \dot{\vec{v}} \vec{n} > 0$ (здесь \vec{n} — орт нормали к границе s).

Поскольку

$$\int_{\Omega_n} d\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} \int_{\dot{\vec{v}}_n > 0} \int_s d\dot{v}_n d\vec{s} = \int_s \dot{v}_n d\vec{s},$$

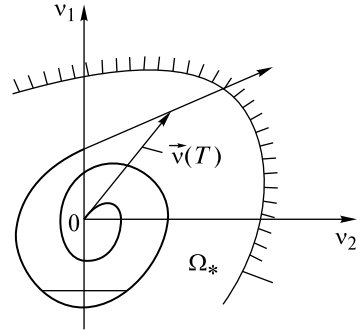


Рис. 2.3

соотношение (2.56) можем представить в виде

$$n_s(t) = \int_0^t \int_s \dot{v}_n \delta\{\bar{v}(\tau) - \bar{v}_s\} d\bar{s} d\tau. \quad (2.57)$$

Из (2.57) следует, что величина $n_s(t)$ является функцией случайного вектора \bar{v} и случайной величины \dot{v}_n . Проведя усреднение (2.57), для момента времени τ находим среднее число выходов процесса $\bar{v}(t)$ из области Ω_* через границу s в единицу времени:

$$\begin{aligned} n_s(\tau) &= \int_s \int_{\bar{v}} \int_0^\infty \dot{v}_n f(\bar{v}, \dot{v}_n) \delta\{\bar{v}(\tau) - \bar{v}_s\} d\bar{s} d\bar{v} d\dot{v}_n = \\ &= \int_s \int_{\bar{v}} \dot{v}_n f(\bar{v}_s, \dot{v}_n, \tau) d\bar{s} d\dot{v}_n, \end{aligned} \quad (2.58)$$

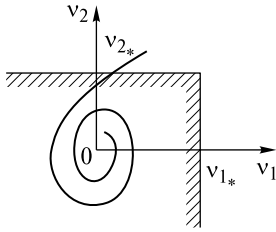


Рис. 2.4

где $f(\bar{v}_s, \dot{v}_n, \tau)$ — значение плотности совместного распределения вероятностей для $(n+1)$ -мерного процесса $\{\bar{v}(\tau), \dot{v}_n(\tau)\}$ на границе s области Ω_* в момент времени τ .

В качестве примера рассмотрим случай, когда процесс $\bar{v}(t) = \{v_1(t), v_2(t)\}$ является центрированным двумерным гауссовским стационарным процессом, а допустимая область имеет вид, показанный на рис. 2.4.

В данном случае имеем

$$\bar{n}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \dot{v}_2 f_1(v_{2*}, v_1) f_2(\dot{v}_2) d\dot{v}_1 d\dot{v}_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \dot{v}_1 f_1(v_{1*}, v_2) f_2(\dot{v}_1) d\dot{v}_2 d\dot{v}_1, \quad (2.59)$$

где

$$f_1(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi s_1 s_2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{v_1^2}{s_1^2} - 2r \frac{v_1 v_2}{s_1 s_2} + \frac{v_2^2}{s_2^2}\right)\right\};$$

$$f_2(\dot{v}_1) = \frac{1}{\dot{s}_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\dot{v}_1^2}{2\dot{s}_1^2}\right); \quad f_2(\dot{v}_2) = \frac{1}{\dot{s}_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\dot{v}_2^2}{2\dot{s}_2^2}\right);$$

s_1^2, s_2^2, r — дисперсии и коэффициент корреляции процессов $v_1(t)$ и $v_2(t)$ соответственно; \dot{s}_1^2, \dot{s}_2^2 — дисперсии процессов $\dot{v}_1(t)$ и $\dot{v}_2(t)$.

После вычисления интегралов в (2.58) получим

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{\omega_1}{2\pi} \exp\left(-\frac{v_{1*}^2}{2s_1^2}\right) \Phi\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{v_{2*}}{s_2} - r \frac{v_{1*}}{s_1}\right)\right] + \\ &+ \frac{\omega_2}{2\pi} \exp\left(-\frac{v_{2*}^2}{2s_2^2}\right) \Phi\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{v_{1*}}{s_1} - r \frac{v_{2*}}{s_2}\right)\right], \end{aligned}$$

где $\omega_1 = \frac{\dot{s}_1}{s_1}$ — средняя частота процесса $v_1(t)$; $\omega_2 = \frac{\dot{s}_2}{s_2}$ — средняя частота процесса $v_2(t)$; $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция нормального распределения вероятностей.

При больших значениях v_{1*} и v_{2*} имеем $\Phi(z) = 1$ и число выбросов из области, ограниченной прямыми $v_1 = v_{1*}$ и $v_2 = v_{2*}$, равно сумме выбросов за уровни v_{1*} и v_{2*} .

Пример 2.5. Требуется определить частоты случайного стационарного процесса типа усеченного белого шума со спектральной плотностью, показанной на рис. 2.5.

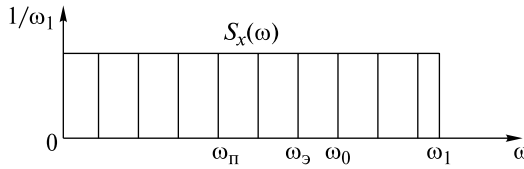


Рис. 2.5

В соответствии с формулой (2.16) найдем следующие выражения для определения дисперсий процесса и его первых трех производных:

$$s_x^2 = 1; \quad s_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{3} \omega_1^3; \quad s_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{5} \omega_1^5; \quad s_{x^{(3)}}^2 = \frac{1}{7} \omega_1^7.$$

Частоты процесса по нулям, экстремумам и точкам перегиба траектории вычислим по формулам

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega_1; \quad \omega_3 = \omega_1 \sqrt{6} > \omega_0; \quad \omega_\pi = \omega_1 \sqrt{\frac{5}{7}} > \omega_3.$$

Пример 2.6. Требуется определить частоты процесса $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ заданы дисперсиями s_1^2 и s_2^2 и энергетическими спектрами в виде импульсных дельта-функций $s_1(\omega) = s_1^2 \delta(\omega - \omega_1)$ и $s_2(\omega) = s_2^2 \delta(\omega - \omega_2)$, показанных на рис. 2.6.

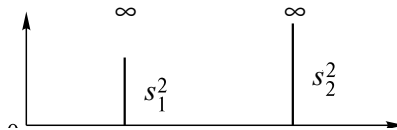


Рис. 2.6

В соответствии с формулой (2.10) получим

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_1^2 s_1^2 + \omega_2^2 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2}; \quad \omega_3^2 = \frac{\omega_1^4 s_1^2 + \omega_2^4 s_2^2}{\omega_1^2 s_1^2 + \omega_2^2 s_2^2}.$$

Таким образом, основные задачи по структурному анализу случайных процессов решены.

Лекция 3

Задача о сглаживании траекторий случайных процессов

Исходная информация для решения ряда задач статистической динамики машин и конструкций состоит в задании вероятностных характеристик непрерывных, но часто недифференцируемых случайных процессов. Возможность дифференцирования этих процессов связана лишь с особенностями их математического описания на бесконечности, при котором решение задач статистической динамики и прогнозирование надежности конструкций оказываются относительно несложными, и не связана с фактическими физическими свойствами процессов, протекающих в реальных механических системах. В этих случаях получить информацию о производных случайных процессах проблематично и необходимо тем или иным способом сглаживать их траектории.

Рассмотрим в этой связи один из способов сглаживания траекторий случайных процессов, заключающийся в усреднении их значений в малых интервалах времени, величина которых $\Delta t = a$ связана с шагом квантования записи траектории, которая выбирается при получении статистических оценок для корреляционных функций и энергетических спектров изучаемых процессов.

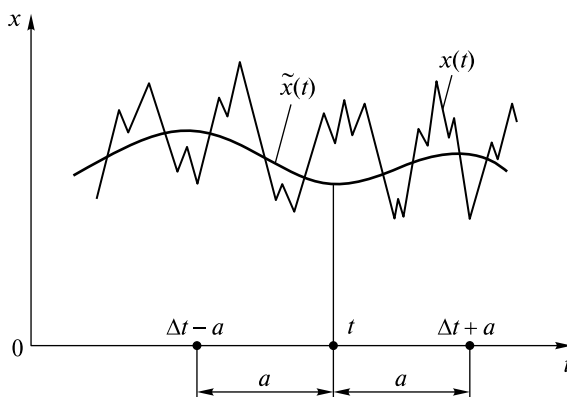


Рис. 3.1

На рис. 3.1 через $x(t)$ обозначена исходная траектория случайного процесса, а через $\tilde{x}(t)$ — его сглаженная траектория, полученная путем усреднения в интервале времени a и введения в рассмотрение весовой функции $\alpha(t, \tau)$.

Имеем

$$\tilde{x}(t, a) \frac{1}{a} \int_{t-a}^t x(\tau) d\tau \approx \int_{-\infty}^t \alpha(t, \tau) x(\tau) \alpha \tau, \quad (3.1)$$

где $\alpha(t, \tau) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\alpha}\right)$.

Продифференцировав интеграл (3.1) по параметру t , получим дифференциальное уравнение для определения сглаженной траектории $\tilde{x}(t)$ процесса $x(t)$

$$\alpha \dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}(t) = x(t) \quad (3.2)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + \alpha i\omega}. \quad (3.3)$$

Спектральную плотность процесса $\tilde{x}(t)$ определим по формуле

$$S_{\tilde{x}}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{1 + \alpha^2 \omega^2}, \quad (3.4)$$

где $S_x(\omega)$ — спектральная плотность исходного процесса $x(t)$.

При $\alpha = 0$ сглаживания траектории случайного процесса не происходит.

Для примера рассмотрим возможность сглаживания траектории белого шума $x(t)$ интенсивностью k_0 , формально имеющего бесконечную дисперсию и бесконечную частоту колебаний и спектральной плотности вида

$$S_x(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} = \text{const} \quad (-\infty \leq \omega \leq \infty). \quad (3.5)$$

В соответствии с (3.4) спектральную плотность и дисперсию сглаженного в интервале времени $\Delta t = a$ белого шума будем определять по формулам

$$S_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{k_0 / (2\pi)}{1 + \alpha^2 \omega^2}; \quad (3.6)$$

$$s_{\tilde{x}}^2 = \frac{k_0}{2\alpha}. \quad (3.7)$$

Отметим, что случайный процесс со спектральной плотностью вида (3.6) имеет ограниченную дисперсию, но не имеет производных. Для их получения сглаживание исходного процесса $x(t)$ следует усилить, например, приняв

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2 \omega^2 + a^4 \omega^4 + \dots} \approx \exp(-a^2 \omega^2). \quad (3.8)$$

В этом случае получим полностью дифференцируемый случайный процесс со следующими спектром, дисперсией и дисперсиями его трех производных:

$$S_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \exp(-a^2\omega^2); \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} s_{\tilde{x}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{x}}(\omega) d\omega = \frac{k_0}{2a\sqrt{\pi}}; \\ s_{\tilde{x}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{\tilde{x}}(\omega) d\omega = \frac{k_0}{4a^3\sqrt{\pi}}; \\ s_{\tilde{x}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_{\tilde{x}}(\omega) d\omega = \frac{3k_0}{8a^5\sqrt{\pi}}; \\ s_{\tilde{x}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^6 S_{\tilde{x}}(\omega) d\omega = \frac{15k_0}{16a^5\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В соответствии с известными формулами Райса частоту сглаженного в интервале времени $\Delta t = a$ белого шума и частоты его первых двух производных будем вычислять по формулам

$$\omega_{\tilde{x}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}; \quad \omega_{\dot{\tilde{x}}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \omega_{\ddot{\tilde{x}}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Первые два параметра сложности структуры сглаженного белого шума $\tilde{x}(t)$ как отношение числа экстремумов к числу нулей и числа точек перегиба траектории к числу экстремумов определим по формулам

$$k_1 = \frac{\omega_{\ddot{\tilde{x}}}}{\omega_{\tilde{x}}} = \sqrt{3} \approx 1,73; \quad k_1 = \frac{\omega_{\dot{\tilde{x}}}}{\omega_{\tilde{x}}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1,29,$$

т. е. процесс $\tilde{x}(t)$ имеет относительно несложную структуру.

В качестве второго примера рассмотрим непрерывный, но недифференцируемый случайный процесс $x(t)$ с единичной дисперсией $s_x^2 = 1$, заданный корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau \quad (3.11)$$

или спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \frac{\alpha}{\pi} \varphi(\omega) \varphi^*(\omega), \quad (3.12)$$

где

$$\varphi(\omega) = \frac{-i\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\omega}; \quad \varphi^*(\omega) = \frac{i\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\omega}, \quad (3.13)$$

α, β — параметры; « * » — знак перехода к комплексно-сопряженным функциям.

После усреднения траектории процесса $x(t)$ в интервале времени $\Delta t = a$ получим для оценок дисперсии и дисперсии первых двух производных следующие выражения:

$$s_{\tilde{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_x(\omega)d\omega}{1 + \alpha^2\omega^2}; \quad s_{\tilde{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s_x(\omega)d\omega}{1 + \alpha^2\omega^2}; \quad s_{\tilde{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4 s_x(\omega)d\omega}{1 + \alpha^4\omega^4}. \quad (3.14)$$

Интегралы вида (3.14) вычисляются стандартными методами.

Получим дисперсию процесса $\tilde{x}(t)$:

$$s_{\tilde{x}}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \alpha a}{1 + a[2\alpha + a(\alpha^2 + \beta^2)]} \leq 1.$$

При $a = 0$ $s_{\tilde{x}}^2 = 1$ и сглаживания траектории не происходит, при $a \rightarrow \infty$ $s_{\tilde{x}}^2 \rightarrow 0$.

Далее имеем

$$s_{\tilde{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[b_0(i\omega)^2 + b_1]d\omega}{|a_0(i\omega)^2 + a_1(i\omega) + a_2|^2} = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1} \cdot 2\pi;$$

$$s_{\tilde{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[b_0(i\omega)^4 + b_1(i\omega)^2 + b_2]d\omega}{|a_0(i\omega)^3 + a_1(i\omega)^2 + a_2 i\omega + a_3|^2} = \frac{-a_2 b_0 + a_2 b_0 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)} \cdot 2\pi.$$

При получении этих формул использованы соотношения (3.12) и (3.13).

Пример 3.1. Известно, что фединг радиолокационного сигнала и мерцание цели часто описываются непрерывным, но недифференцируемым процессом с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$$

и спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

Аналогичными характеристиками описываются неровности автомобильных дорог при анализе динамики мобильных машин при их движении по неровностям. При этом обычно принимают

$$\alpha = 0,01 \dots 0,1 \text{ м}^{-1}; \quad \beta = 0,025 \dots 0,14 \text{ м}^{-1}.$$

Путем сглаживания траектории рассматриваемого случайного процесса требуется вычислить его производные и частоты.

Спектральную плотность процесса $\dot{x}(t)$ можем представить в виде

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \Phi_x(\omega) \Phi_x^*(\omega),$$

где для квазиспектров

$$\Phi_x(\omega) = \frac{\omega^2 + i\omega\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega^2 - \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha i\omega} \xrightarrow{\text{при } \omega \rightarrow \infty} = 1;$$

$$\Phi_x^*(\omega) = \frac{\omega^2 - i\omega\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha i\omega} \xrightarrow{\text{при } \omega \rightarrow \infty} = 1.$$

Сглаженные квазиспектры и сглаженные спектральные плотности, обозначенные сверху знаком сглаживания « \sim », запишем следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_{\dot{x}}(\omega) = \Phi_{\dot{x}}(\omega) - 1; \quad \tilde{\Phi}_x^*(\omega) = \Phi_x^*(\omega) - 1;$$

$$\tilde{S}_{\dot{x}}(\omega) = (\alpha^2 + \beta^2) S_x(\omega); \quad \tilde{S}_x(\omega) = (\alpha^2 + \beta^2) \tilde{S}_{\dot{x}}(\omega).$$

Здесь «*» — знак перехода к комплексно-сопряженным величинам.

Для определения частоты процесса по нулям получим простую формулу:

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Для автомобильных дорог

$$\omega_0 = 0,027...0,15 \text{ м}^{-1}.$$

Таким образом, использование методов сглаживания траектории позволяет решить задачи структурного анализа для формально недифференцируемых случайных процессов.

Лекция 4

Некорректные задачи статистической динамики машин и конструкций

Рассмотрим механические системы, функционирование которых описывается следующим линейным дифференциальным уравнением n -го порядка:

$$L\{q(t)\} = f(t), \quad (4.1)$$

где $L = L(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ — линейный дифференциальный оператор; $n = 1, 2, \dots$ — порядок уравнения (4.1); $p = \frac{d}{dt}$; a_n, \dots, a_1, a_0 — параметры; $q(t)$ — обобщенная координата для момента времени t ; $f(t)$ — функция времени.

В прямой задаче динамики по $f(t)$ определяется функция $q(t)$, а в обратной задаче по заданной (измеренной) координате $q(t)$ — процесс внешних воздействий.

Импеданс рассматриваемой механической системы определяется как $L(i\omega)$, а передаточная функция — как $H(i\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$, что есть амплитуда реакции механической системы на единичное гармоническое воздействие $1 \cdot e^{i\omega t}$ с частотой ω

$$H(i\omega) = e^{-i\omega t} W \{ e^{i\omega t} \},$$

где $W(\cdot)$ — обратный к L оператор.

Функция Грина $g(t - \tau)$ для уравнения (4.1) есть реакция механической системы в момент времени $t > \tau$ на единичное дельта-воздействие в момент времени $t = \tau$. Эту функцию можем определить, решив уравнение

$$L\{g(t - \tau)\} = \delta(t - \tau), \quad (4.2)$$

где дельта-функцию Дирака представим в виде следующего интеграла Фурье:

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.3)$$

Из (4.2) имеем

$$g(t - \tau) = W \{ \delta(t - \tau) \} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k t}, \quad (4.4)$$

где λ_k – корни уравнения $L(\lambda_k) = 0$; у L' штрих сверху означает производную по λ .

Из (4.3) и (4.4) получим равенства

$$g(t) = W \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W \{ e^{i\omega t} \} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.5)$$

т. е. функция Грина есть преобразование Фурье от передаточной функции. Обратное преобразование Фурье над функцией Грина определяет передаточную функцию

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.6)$$

Представим функцию $f(t)$ в виде следующего интеграла Дирака:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (4.7)$$

Поскольку

$$q(t) = W \{ f(t) \}, \quad (4.8)$$

то из (4.7) придем к стационарному решению уравнения (4.1) в виде следующего интеграла Дюамеля:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (4.9)$$

При замене нижнего предела $-\infty$ на нуль имеем нестационарное решение уравнения (4.1).

Из (4.9) при заданной с малыми погрешностями функции $f(t)$ (в прямой задаче динамики) получим искомую функцию $q(t)$ также с малыми погрешностями, и, если $f(t)$ — негауссовский случайный процесс, в силу основной теоремы теории вероятностей (как суммы большого числа случайных слагаемых) $q(t)$ будет стремиться к гауссовскому процессу.

Таким образом, определение реакции механической системы $q(t)$ на заданное воздействие $f(t)$ является корректной задачей механики.

В отличие от этого случая решение обратной задачи по определению воздействия $f(t)$ по измеренной с некоторой погрешностью реакции $q(t)$ (как решение интегрального уравнения (4.9)) является некорректной задачей. Так, из уравнения (4.1) следует, что для определения $f(t)$ необходимо n раз дифференцировать заданную с погрешностями функцию $q(t)$, что является некорректной математической задачей.

Введем в рассмотрение амплитудные по Фурье спектры процессов $f(t)$ и $q(t)$:

$$\Phi_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad \Phi_q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.10)$$

Обратные преобразования дают

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_q(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.11)$$

Подставив соотношения (4.11) в уравнение (4.1), получим равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_q(\omega) L\{e^{i\omega t}\} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_q(\omega) L(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отсюда следует главная формула детерминистической динамики механической систем:

$$\Phi_q(\omega) = H(i\omega)\Phi_f(\omega). \quad (4.12)$$

Определение $q(t)$ по $f(t)$ является корректной задачей. Определение $q(t)$ по $q(t)$ может оказаться некорректной задачей.

В соответствии с теоремой Винера о дельта-коррелированности амплитудных спектров имеем равенства

$$\langle \Phi_f^*(\omega_1)\Phi_f(\omega_2) \rangle = S_f(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2);$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_q^*(\omega_1)\Phi_q(\omega_2) \rangle &= S_q(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2) = \langle H^*(i\omega_1)H^*(i\omega_2)\Phi_f^*(\omega_1)\Phi_f(\omega_2) \rangle = \\ &= H^*(i\omega_1)H^*(i\omega_2)S_f(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2) = |H(i\omega)|^2 S_f(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2), \end{aligned}$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор усреднения; $H(i\omega)$ — детерминированная функция; «*» — знак перехода к комплексно-сопряженным функциям.

Отсюда следует главная формула статистической динамики механических систем:

$$S_q(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (4.13)$$

где $S_q(\omega)$ — спектральная плотность процесса $q(t)$; $S_f(\omega)$ — спектральная плотность процесса $f(t)$.

Вычисление $S_q(\omega)$ по $S_f(\omega)$ является корректной задачей динамики. Определение спектральной плотности $f(t)$ для процесса из (4.13) по формуле

$$S_f(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{|H(i\omega)|^2} \quad (4.14)$$

может оказаться некорректной задачей.

Так, дисперсию n -й производной процесса $f(t)$ будем вычислять как

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{2n} S_q(\omega)}{|H(i\omega)|^2} d\omega. \quad (4.15)$$

Из-за множителя ω^{2n} в числителе интеграла в (4.15) дисперсия s^2 , как правило, не существует.

В качестве простого примера рассмотрим встречающуюся в статистической теории гироскопов динамическую систему, функционирование которой описывается уравнением

$$\dot{q} + aq = f(t) \quad (4.16)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{a + i\omega}. \quad (4.17)$$

Пусть измеренная функция $q(t)$ имеет спектральную плотность

$$S_q(\omega) = \frac{b}{\pi} \frac{s_q^2}{b^2 + \omega^2}, \quad (4.18)$$

где b — оценка средней частоты процесса $q(t)$; s_q^2 — дисперсия процесса.

Спектральную плотность процесса $f(t)$ будем определять по формуле

$$S_f(\omega) = \frac{b}{\pi} \frac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2}. \quad (4.19)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ имеем $S_f(\omega) \rightarrow \frac{b}{\pi} = \text{const}$.

Из (4.19) следует, что дисперсий процессов $f(t)$, $\dot{f}(t)$, $\ddot{f}(t)$, ... не существует.

В работах А.Н. Тихонова показано, что корректное (в указанном выше смысле) решение обратных задач динамики можно получить, если вместо исходного оператора $L(p)$ использовать регуляризующий рассматриваемую систему оператор $\tilde{L}(p, \alpha)$ со стабилизирующим параметром $\alpha \geq 0$ и соответствующую регуляризованную передаточную функцию, определяемую, например, как

$$\tilde{H}(i\omega) = e^{\alpha\omega} H(i\omega). \quad (4.20)$$

При $\alpha = 0$ регуляризации системы не происходит.

Искомую спектральную плотность процесса $f(t)$ будем определять по формуле

$$S_f(\omega) = \frac{e^{-\alpha^2\omega^2} S_q(\omega)}{|H(i\omega)|^2} = \frac{|a_n(i\omega)^n + \dots + a_1(i\omega) + a_0|}{\frac{1}{n!} \alpha^{2n} \omega^{2n} + \dots + \alpha^2 \omega^2 + 1} S_q(\omega), \quad (4.21)$$

дисперсии всех производных

$$s_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} S_f(\omega) d\omega. \quad (4.22)$$

Отсюда следует, что соотношение (4.21) позволяет корректно решить поставленную задачу.

После регуляризации уравнения (4.16) получим

$$S_f(\omega) = \frac{b}{\pi} \frac{a^2 + \omega^2}{(b^2 + \omega^2)(1 + \alpha^2 \omega^2 + \dots)^2},$$

что позволяет вычислить дисперсию процесса и дисперсии всех его производных.

Для определения параметра α можно использовать, например, сглаживание (см. рис. 3.1) траектории процесса $q(t)$ и устранение из нее таким образом высокочастотных составляющих. Сглаженную в интервале времени $\Delta t = a$ траекторию $\tilde{q}(t)$ можно определить из решения уравнения

$$\alpha \dot{\tilde{q}}(t) + \tilde{q}(t) = q(t)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + \alpha i\omega}.$$

Тогда

$$S_{\tilde{q}}(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{1 + \alpha^2 \omega^2};$$

$$S_f(\omega) = \frac{|a_n(i\omega)^n + \dots + a_1(i\omega) + a_0|^2}{1 + \alpha^2 \omega^2}.$$

Повторные сглаживания траектории процесса $q(t)$ приводят к формулам, подобным (4.21) и к окончательному решению рассматриваемой задачи.

Пример 4.1. Требуется объяснить принципиальное различие в интегрировании и дифференцировании реальных случайных функций $x(t)$ (рис. 4.1).

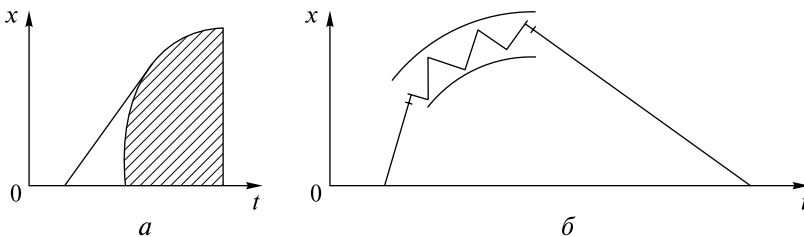


Рис. 4.1

Такого различия нет, если функции заданы абсолютно точно, что сделать в принципе невозможно (рис. 4.1, а).

Если функции заданы (измерены) с точностью до поля допуска, то вычислить интеграл от них несложно, однако вычисление производных является некорректной задачей математической физики (рис. 4.1, б).

Лекция 5

Обратные задачи статистической динамики механических систем

Рассмотрим механические системы, функционирование которых описывается линейным дифференциальным уравнением n -го порядка вида

$$L\{q(t)\} = f(t), \quad (5.1)$$

где $L = L(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ — линейный дифференциальный оператор; $n = 1, 2, \dots$ — порядок уравнения системы (5.1); $p = \frac{d}{dt}$; a_n, \dots, a_1, a_0 — параметры; $q(t)$ — обобщенная координата системы для момента времени t ; $f(t)$ — случайная стационарная функция.

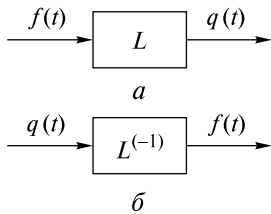


Рис. 5.1

Решение прямой задачи статистической динамики по определению вероятностных характеристик процессов на выходе системы $q(t)$ по заданным (экспериментально установленным) вероятностным характеристикам процессов на входе $f(t)$ сводится к решению корректной математической задачи по интегрированию заданных с возможно малыми погрешностями функций $f(t)$ (рис. 5.1, а).

В отличие от решения прямой (корректной) задачи решение обратной задачи по определению вероятностных характеристик процессов на входе $f(t)$ по вероятностным характеристикам, зарегистрированным в эксперименте с неизбежными погрешностями процесса $q(t)$, сводится к некорректной математической задаче многократного дифференцирования приближенно заданных функций (рис. 5.1, б).

Рассмотрим решение некорректной обратной задачи статистической динамики для случая, когда процесс $q(t)$ описывается моделью белого шума интенсивностью k_0 , из которого устранены высокочастотные составляющие. Появление этих составляющих обусловлено не реальными физическими процессами, протекающими в системе вход — выход, а особенностями использования при их анализе на бесконечности математического аппарата интегрального преобразования Фурье.

Одна из возможностей устранения маловероятных и малозначимых высокочастотных составляющих из случайного процесса состоит в его сглаживании путем усреднения в малом интервале времени $\Delta t = a$, когда сглаженный процесс $\tilde{q}(t)$ получают из заданного белого шума $q(t)$ интенсивностью k_0 путем решения уравнения

$$a\tilde{q}(t) + \dot{\tilde{q}}(t) = q(t) \quad (5.2)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + ai\omega}.$$

В этом случае спектральную плотность процесса $\tilde{q}(t)$ на выходе динамической системы будем определять как

$$\tilde{S}_q(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_q(\omega) = \frac{k_0/(2\pi)}{1 + a^2\omega^2}. \quad (5.3)$$

Его дисперсия при $a \neq 0$ существует и вычисляется по формуле

$$s_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_q(\omega) d\omega = \frac{k_0}{2a}. \quad (5.4)$$

Интенсивность сглаживания исходного процесса зависит от интервала усреднения a , и при $a = 0$ сглаживания не происходит. При этом имеем случайный процесс с дисперсией $s_q^2 \rightarrow \infty$. Далее в тексте знак сглаживания « \sim » будем опускать, а спектральную плотность измеряемого процесса $q(t)$ принимать в виде (5.3). При этом из эксперимента достаточно определить только интенсивность k_0 исходного случайного процесса $q(t)$.

В качестве примера рассмотрим частный случай уравнения (5.1), когда

$$n = 1, L = p, \dot{q}(t) = f(t) \quad (5.5)$$

Спектральные плотности процессов $\dot{q}(t)$ и $f(t)$ получим в виде

$$S_q(\omega) = S_f(\omega) = \frac{\omega^2 k_0 / (2\pi)}{1 + a^2\omega^2}. \quad (5.6)$$

Эти процессы оказываются недифференцируемыми в том смысле, что их спектры не стремятся к нулю ($\omega \rightarrow \infty$), а их дисперсии

$$s_q^2 = s_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega \rightarrow \infty.$$

Для перехода к дифференцируемым процессам путем устранения из них математических особенностей при $\omega \rightarrow \infty$ представим выражение (5.6) в виде произведения двух квазиспектров:

$$S_f(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \Phi(\omega)\Phi^*(\omega), \quad (5.7)$$

где квазиспектры

$$\Phi(\omega) = \frac{i\omega}{1 + ai\omega}; \quad \Phi^*(\omega) = -\frac{i\omega}{1 - ai\omega}$$

при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к единице.

Для устранения особенностей этих спектров при $\omega \rightarrow \infty$ представим их в сглаженном виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\omega) &= \Phi(\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = -\frac{1}{a(1+ai\omega)}; \\ \tilde{\Phi}^*(\omega) &= \Phi^*(\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi^*(\omega) = -\frac{1}{a(1-ai\omega)}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ имеем $\Phi(\omega) \rightarrow 0$, $\Phi^*(\omega) \rightarrow 0$.

Подставив выражения (5.8) в формулу (5.7), получим спектральные плотности для сглаженных процессов $\tilde{q}(t)$ и $\tilde{f}(t)$ в виде

$$\tilde{S}_q(\omega) = \tilde{S}_f(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \frac{a^{-2}}{1+a^2\omega^2}\tag{5.9}$$

с дисперсиями

$$s_q^2 = s_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_f(\omega) = \frac{k_0}{2a^3},\tag{5.10}$$

и при $\omega \rightarrow \infty$ имеем $\tilde{S}_q(\omega) = \tilde{S}_f(\omega) \rightarrow 0$.

Эффективную (среднюю) частоту этих процессов можем определить по известной формуле Райса как

$$\omega_e = \frac{s_{\dot{q}}}{s_f} = \frac{1}{a},\tag{5.11}$$

и при $a \rightarrow 0$ (для несглаженных процессов) $\omega_e \rightarrow \infty$.

Из (5.3) и (5.9) следуют формулы для дифференцирования сглаженных случайных процессов:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\dot{q}}(\omega) &= \omega_e^2 S_q(\omega); \\ \tilde{S}_{\ddot{q}}(\omega) &= \omega_e^4 S_q(\omega),\end{aligned}\tag{5.12}$$

Полученные выше результаты (см. (5.9), (5.10)) применимы к уравнению

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t)\tag{5.13}$$

с параметрами $2n$ и ω_0^2 .

В соответствии с описанной процедурой вычисления спектральных плотностей спектральную плотность сглаженного процесса $\tilde{f}(t)$ можем вычислить по формуле

$$\tilde{S}_f(\omega) = (\omega_e^4 + 4n^2\omega_e^2 + \omega_0^4) \tilde{S}_q(\omega).\tag{5.14}$$

Аналогично поставленная задача решается для уравнения (5.1) при любом значении n .

Исследуем теперь механическую систему, по результатам анализа которой можно установить спектральную плотность на входе системы $S_h(\omega)$ кинематического воздействия $h(t)$ по экспериментально определенной спектральной плотности $S_q(\omega)$ перемещения $q(t)$ на выходе системы (рис. 5.2).

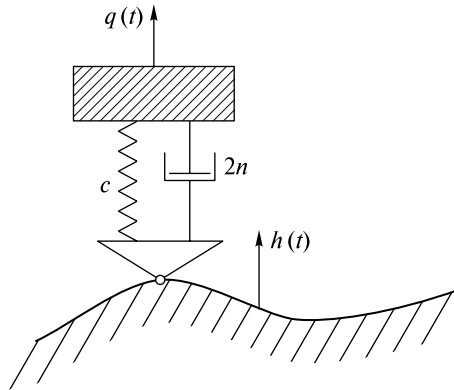


Рис. 5.2

Из рассмотренной выше задачи следует, что искомая спектральная плотность процесса $h(t)$ будет определяться из решения уравнения

$$2n\dot{h}(t) + \omega_0^2 h(t) = f(t) \quad (5.15)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + 2ni\omega}. \quad (5.16)$$

Используя соотношения (5.14)–(5.16), найдем искомую спектральную плотность процесса $h(t)$ по формуле

$$S_h(\omega) = |H(i\omega)|^2 \tilde{S}_f(\omega) = (\omega_e^4 + 4n^2\omega_e^2 + \omega_0^4) \frac{k_0/(2\pi)}{(1 + a^2\omega^2)(\omega_0^4 + 4n^2\omega^2)}. \quad (5.17)$$

Дисперсия процесса $h(t)$ существует и вычисляется как

$$s_h^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\omega) d\omega = \frac{k_0}{2\omega_0(a\omega_0^2 - 2n)} (\omega_e^4 + 4n^2\omega_e^2 + \omega_0^4). \quad (5.18)$$

Дисперсия первой производной

$$s_{\dot{h}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_h(\omega) d\omega = \frac{k_0}{4an(a\omega_0^2 - 2n)} (\omega_e^4 + 4n^2\omega_e^2 + \omega_0^4). \quad (5.19)$$

Частота процесса $h(t)$

$$\omega_h = \frac{S_{\dot{h}}}{S_h} \frac{\omega_0}{2\sqrt{an}}. \quad (5.20)$$

Спектральная плотность и дисперсия процесса $\ddot{h}(t)$:

$$S_{\ddot{h}}(\omega) = \omega_h^4 S_h(\omega); \quad (5.21)$$

$$s_{\ddot{h}}^2 = \omega_h^2 s_h^2. \quad (5.22)$$

Деформацию пружины $u(t) = q(t) - h(t)$ в системе, показанной на рис. 5.2, будем определять из уравнения

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = -\ddot{h}(t) \quad (5.23)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ni\omega}. \quad (5.24)$$

Спектральную плотность процесса $u(t)$ вычислим как

$$S_u(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{\ddot{h}}(\omega). \quad (5.25)$$

Если в эксперименте определяется спектральная плотность процесса $u(t)$, то по аналогии с изложенным выше методом расчета, используя формулу (5.25), можно определить спектральные плотность процессов $\ddot{h}(t)$, $\dot{h}(t)$, $h(t)$.

В заключение отметим, что решение поставленной задачи оказалось возможным, при условии использования в расчетах сглаживающей в интервале $\Delta t = a$ передаточной функции вида (5.2) с квадратом модуля

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2\omega^2}. \quad (5.26)$$

Легко заметить, что эффект сглаживания случайных функций можно усилить, если вместо (5.26) использовать выражение

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2\omega^2 + \frac{1}{2}a^4\omega^4 + \frac{1}{3}a^6\omega^6 + \dots}, \quad (5.27)$$

которое переходит в (5.26) при удерживании в знаменателе только первых двух слагаемых.

Из (5.27) в пределе переходим к формуле

$$|H(i\omega)|^2 = \exp(-a^2\omega^2), \quad (5.28)$$

использование которой в расчетах связано с более сложными по сравнению с (5.26) вычислениями.

Решение рассмотренной выше задачи было ограничено определением для недифференциального случайного процесса только его первой производной.

Используем метод усиленного эффекта сглаживания траекторий случайных процессов, при котором появляется возможность вычисления производных любого порядка.

Такая возможность появляется, если вместо передаточной функции вида

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2\omega^2}$$

использовать выражение

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2\omega^2 + \frac{1}{2}a^4\omega^4 + \frac{1}{3}a^6\omega^6 + \dots},$$

из которого в пределе получим компактную формулу:

$$|H(i\omega)|^2 = \exp(-a^2\omega^2).$$

При этом, однако, вычисления становятся более громоздкими.

Лекция 6

Использование преобразований Гильберта в расчетах надежности механических систем

При расчете надежности механических систем обычно используется понятие об абсолютном (наибольшем) максимуме случайного процесса, значение которого в заданном интервале времени функционирования системы в вероятностном аспекте не должно превышать некоторого предельно допустимого уровня воздействия. Вероятностные характеристики абсолютного максимума определяются в не вполне обоснованном предположении, что все максимумы случайного процесса статистически независимы. В этом случае для оценки надежности получим оценку снизу.

Оценку для надежности сверху можно найти в случае, если за процесс нагружения системы принять используемую в статистической радиотехнике огибающую случайного процесса, частота которой существенно меньше частоты исходного случайного процесса. При этих вычислениях, однако, возникают определенные трудности, обусловленные рассмотрением именно механических систем.

Вероятностные характеристики огибающей случайного процесса определим с использованием следующей пары интегральных преобразований (трансформант) Гильберта:

$$\begin{aligned}y(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{t - \tau} dt; \\x(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{\tau - t} d\tau,\end{aligned}\tag{6.1}$$

где $x(t)$ — исходный процесс; $y(t)$ — трансформанта исходного процесса по Гильберту (или наоборот).

В (6.1) аргументы t и τ (в отличие от аргументов в трансформантах Фурье и Лапласа) имеют одинаковую размерность (время), поэтому можно ввести в рассмотрение комплексную функцию времени

$$z(t) = x(t) + i y(t) = a(t) e^{i\varphi(t)},$$

где $i = \sqrt{-1}$; $a(t) = |z(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ — модуль; $\varphi(t) = \arctg \frac{y(t)}{x(t)}$ — аргумент функции $z(t)$; $x(t)$, $y(t)$ — действительная и мнимая составляющие функции $z(t)$,

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t) \cos \varphi(t); \\y(t) &= a(t) \sin \varphi(t).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Функции $a(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно называются огибающей и фазой процесса $z(t)$ (рис. 6.1).

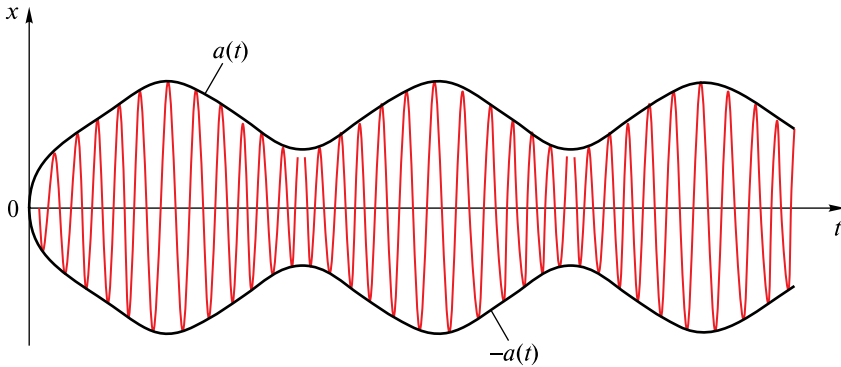


Рис. 6.1

Несложно показать, что трансформанты (комплексные спектры) Фурье $\Phi_x(\omega)$ и $\Phi_y(\omega)$ функций $x(t)$ и $y(t)$ связаны соотношением

$$\Phi_x(\omega) = -i \Phi_y(\omega). \quad (6.3)$$

В соответствии с теоремой Винера о дельта-коррелированности амплитудных спектров из (6.3) равенства имеем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_x^*(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \rangle &= \langle \Phi_y^*(\omega_1) \Phi_y(\omega_2) \rangle = S_x(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) = S_y(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2); \\ \langle \Phi_x^*(\omega_1) \Phi_y(\omega_2) \rangle &= i \langle \Phi_y^*(\omega_1) \Phi_y(\omega_2) \rangle = S_{xy}(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) = \dots \\ &= i S_y(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) = i S_x(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2), \end{aligned}$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор усреднения; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Отсюда

$$S_x(\omega) = S_y(\omega) = -i S_{xy}(\omega), \quad (6.4)$$

где $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ — спектральные плотности процессов $x(t)$ и $y(t)$; $S_{xy}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность этих процессов.

Корреляционные функции процессов $x(t)$ и $y(t)$ определяются по их спектральным плотностям (6.4) по формулам Винера — Хинчина:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad \text{Re } K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad (6.5)$$

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad \text{Re } K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \sin \omega\tau d\omega, \quad (6.6)$$

где через Re обозначено вычисление действительной части функций.

Из (6.4) следует, что если $x(t)$ — нормальный стационарный процесс, то и $y(t)$ также будет нормальным стационарным процессом с теми же вероятностными характеристиками, а плотность распределения вероятностей для огибающей будет рэлеевской и определится как

$$f(a) = \frac{a}{s^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2s^2}\right) \quad (6.7)$$

со средним значением $\langle a \rangle = s\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, где $s^2 = K_x(0) = K_y(0)$ — дисперсия процессов $x(t)$ и $y(t)$.

В соответствии с (6.7) процесс $a(t)$ называется рэлеевским стационарным процессом.

Фаза φ равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, а плотности распределения вероятностей для $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ имеют вид

$$f(\cos \varphi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}. \quad (6.8)$$

Из (6.7), (6.8) и вероятностных свойств произведения двух случайных величин (заданных формулами (6.2)), следует, что процессы $x(t)$ и $y(t)$ будут нормальными стационарными процессами.

При анализе механических систем с характерной частотой ω_0 можно принять

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \varphi_1(t), \quad (6.9)$$

где $\varphi_1(t)$ — медленная по сравнению с $\omega_0 t$ случайная функция.

С учетом (6.9) получим

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \approx a(t) \cos \omega_0 t; \quad (6.10)$$

$$y(t) = A \cos \omega_0 t - B \sin \omega_0 t \approx a(t) \sin \omega_0 t, \quad (6.11)$$

где $A = a(t) \cos \varphi_1 t \approx a(t)$; $B = a(t) \sin \varphi_1 t \approx 0$.

Из (6.10) и (6.11) следует, что

$$a(t) = x(t) \cos \omega_0 t + y(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.12)$$

Используя (6.5) и (6.6), корреляционную функцию и ее вторую производную определим как

$$\begin{aligned} K_a(\tau) &= \langle a(0)a(\tau) \rangle = \langle x(0)(x(\tau) \cos \omega_0 \tau + y(\tau) \sin \omega_0 \tau) \rangle = \dots \\ &\dots = K_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + K_{xy}(\tau) \cos \omega_0 \tau = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos(\omega - \omega_0)\tau d\omega; \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$K_a''(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 S_x(\omega) \cos(\omega - \omega_0)\tau d\omega. \quad (6.14)$$

Дисперсию процесса $a(t)$ и дисперсию ее первой производной вычислим по формулам

$$s_a^2 = K_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = s_x^2; \quad (6.15)$$

$$s_{\dot{a}}^2 = -K_a''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 S_x(\omega) d\omega = s_x^2 - \omega_0^2 s_x^2. \quad (6.16)$$

Число превышений функцией $a(t)$ уровня \tilde{a} за время t найдем по формуле Стейнберга:

$$n(\tilde{a}, t) = \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{a}(\tau)| \delta\{a(\tau) - \tilde{a}\} d\tau, \quad (6.17)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Усредняя выражение (6.16) по случайным величинам a и \dot{a} , получаем обобщение формулы Райса для определения ожидаемого числа превышений огибающей уровня \tilde{a} за время $t[s]$:

$$\bar{n}(\tilde{a}, t) = \frac{t}{2} \dot{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \delta(\tilde{a} - a) da = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_{\dot{a}} f(a) = \frac{t\omega_*}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{a}}{s_x} \exp\left(-\frac{\tilde{a}^2}{2s_x^2}\right), \quad (6.18)$$

где $\omega_* = \frac{s_{\dot{a}}}{s_x} = \sqrt{\omega_e^2 - \omega_0^2}$ — эффективная частота огибающей; $\omega_e = \frac{s_{\dot{x}}}{s_x}$ — эффективная частота процесса $x(t)$.

Если \tilde{a}_0 — недопустимый уровень воздействия $x(t)$, то надежность системы в интервале времени $(0, t)$ можем определить по формуле Болотина:

$$P_1 = P_r \{x(\tau) \leq \tilde{a}_0, \tau \in (0, t)\} = \exp\{-\bar{n}(\tilde{a}_0, t)\} \approx 1 - \bar{n}(\tilde{a}_0, t). \quad (6.19)$$

При неиспользовании понятия огибающей случайного процесса надежность системы вычисляется как

$$P_2 = 1 - \frac{t\omega_e}{2\pi} \exp\left(-\frac{\tilde{a}_0^2}{2s_x^2}\right) \ll P_1, \quad (6.20)$$

где $P_2 < P_1$.

Для примера рассмотрим случайный процесс $x(t)$ с единичной дисперсией $s = 1$ и постоянным спектром $S(\omega) = 0,5$ в полосе частот $(\omega_1 = 10, \omega_2 = 12)$.

Предельно допустимое воздействие примем равным пяти стандартам: $\tilde{a}_0 = 5s$ (рис. 6.2).

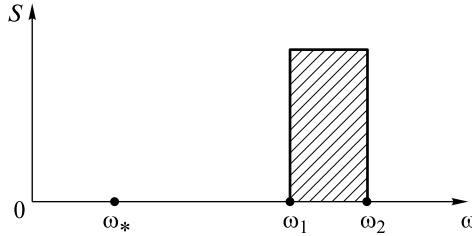


Рис. 6.2

Получим среднюю частоту процесса

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 11,0,$$

эффективную частоту процесса

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1\omega_2} = 11,1 > \omega_0,$$

частоту огибающей

$$\omega_* = \frac{1}{\sqrt{12}}(\omega_1 - \omega_2) = 0,56 \ll \omega_0,$$

величину

$$\sqrt{2\pi}\omega_*\tilde{a}_0 = \sqrt{2\pi} \cdot 2,8 \ll \omega_e.$$

Отношение числа превышений процессом $x(t)$ уровня \tilde{a}_0 к числу превышений процессом $a(t)$ этого же уровня

$$\frac{\omega_*\tilde{a}_0}{\omega_e S} = 0,25.$$

Заключаем, что надежность, вычисленная по выбросам огибающей, значительно превышает надежность по выбросам исходного процесса.

В качестве второго примера рассмотрим случайный процесс $x(t)$, сформированный в линейной системе с одной степенью свободы, подвергаемой воздействию в виде белого шума интенсивностью k_0 .

Спектральная плотность процесса $x(t)$

$$S_x(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad (6.21)$$

его дисперсия

$$s_x^2 = \frac{k_0}{4n\omega_0^2}, \quad (6.22)$$

где n — коэффициент демпфирования; ω_0 — частота собственных колебаний системы.

Введем в рассмотрение эффективную ширину спектра (рис. 6.3)

$$\Delta = \frac{s^2}{S(\omega_0)} \quad (6.23)$$

и сведем решение задачи к задаче, рассмотренной выше, в первом примере (см. рис. 6.2).

Из (6.21)–(6.23) следует

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\pi n; \\ \omega_1 &= \omega_0 - \pi n; \\ \omega_2 &= \omega_0 + \pi n; \\ \omega_* &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} n \ll \omega_0; \\ P_2 &\ll P_1, \end{aligned}$$

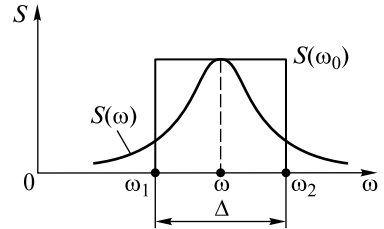


Рис. 6.3

и при $n=0$ имеем $\omega_* = 0$ и $P_2 = P_1 = 1$.

В заключение рассмотрим непрерывный недифференцируемый случайный процесс $x(t)$, сформированный в системе, функционирование которой описывается уравнением

$$\dot{x} + \alpha x = f(t), \quad (6.24)$$

где $f(t)$ — белый шум интенсивностью k_0 ; α — параметр.

Спектральную плотность процесса $x(t)$ будем определять как (рис. 6.4)

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha s^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (6.25)$$

где дисперсия $s^2 = k_0/(2\alpha)$.

Функцию (6.25) заменим на константу и введем в рассмотрение эффективную ширину спектра

$$\Delta = \frac{s^2}{S(0)} = \frac{1}{2} \pi \alpha.$$

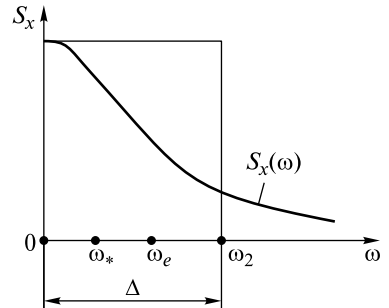


Рис. 6.4

Получим

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_1 = 0; \quad \omega_e = \frac{\alpha\pi}{2\sqrt{3}}; \quad \omega_* = \frac{1}{2}\omega_e; \quad P_2 \ll P_1.$$

Таким образом, использование в расчетах надежности понятия об огибающей случайного процесса существенно уточняет оценку надежности как вероятности непревышения случайным процессом опасного уровня воздействий.

Лекция 7

Вероятностные методы в диагностике металлоконструкций

Рассмотрим проблему принятия оптимальных в статистическом смысле решений по результатам диагностирования частично поврежденных металлоконструкций на предмет установления их пригодности к дальнейшей эксплуатации.

В качестве основной проанализируем следующую ситуацию. Известно, что при изготовлении (или во время эксплуатации) некоторого элемента конструкции в нем обнаруживаются трещины, существование которых допускается техническими условиями. При этом известно, что если длина трещины или суммарная длина трещин во всей конструкции x соответствует закону распределения вероятности с функцией $F_1(x)$ и плотностью $f_1(x)$, то конструкция является исправной, а если длина трещины в статистическом смысле будет большей и будет соответствовать закону распределения вероятностей с функцией $F_2(x)$ и плотностью $f_2(x)$, то дефектной (рис. 7.1.)

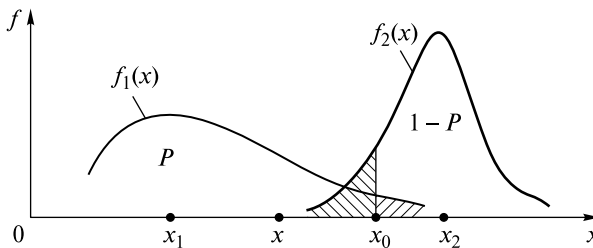


Рис. 7.1

Пусть при диагностировании конструкции зафиксирована трещина длиной x . Задача состоит в принятии правильного решения о возможности использования конструкции с этой трещиной. В любом случае, однако, возможно принятие неверного решения, поэтому можно лишь минимизировать риск принятия такого решения. В этом случае требуется найти такое значение длины трещины x_0 , при котором, если $x > x_0$, то конструкцию следует считать дефектной, а при $x < x_0$ исправной.

Обозначим через P априорную (допытную) вероятность того, что представленная к диагностированию конструкция исправна (см. рис. 7.1). Тогда $1 - P$ будет вероятностью того, что она дефектна. Значение P заранее не известно, так что природа выбирает значение P и затевает с человеком (игроком) игру с целью в максимальной степени затруднить для него принятие

правильного решения и добиться минимальной вероятности принятия такого решения. При этом цель игрока состоит в получении максимальной вероятности принятия правильных решений.

Пусть значения P и x_0 известны. Тогда стратегию игрока можно сформулировать так:

при $x < x_0$ он с вероятностью

$$P_1 = \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx = F_1(x_0)$$

считает объект исправным, а при $x \geq x_0$ он с вероятностью

$$P_2 = \int_{x_0}^{\infty} f_2(x) dx = 1 - F_2(x_0)$$

считает его дефектным.

В соответствии с теоремой об умножении вероятностей имеем:

P_1P — вероятность *правильного* решения об исправности объекта;

$P_2(1 - P)$ — вероятность *правильного* решения о дефектности объекта;

$P_1(1 - P)$ — вероятность *неверного* решения о годности объекта;

P_2P — вероятность *неверного* решения об исправности объекта.

Рассматриваемую ситуацию можно представить в виде следующей логической схемы вероятностей принятия различных решений:

$P_+ = P_+(P, x_0) = P_1P + P_2(1 - P)$		Стратегия природы	
		P — да	$1 - P$ — нет
Стратегия игрока	$x < x_0$: P_1 — да	P_1P	$P_1(1 - P)$
	$x \geq x_0$: P_2 — нет	P_2P	$P_2(1 - P)$
$P_- = P_-(P, x_0) = P_1(1 - P) + P_2P$		Да — исправна Нет — дефектна	

В соответствии с теоремой о сложении вероятностей получим, что вероятность P_+ принятия правильного решения (сумма вероятностей по диагонали слева направо вниз) равна вероятности принять за исправную конструкцию действительно исправную конструкцию и за неисправную конструкцию — действительно неисправную конструкцию.

Вероятность P_- принятия неверного решения (сумма вероятностей по диагонали справа налево вниз) равна вероятности принять за исправную конструкцию действительно неисправную конструкцию и принять за неисправную конструкцию действительно исправную конструкцию.

Вероятности P_+ и P_- есть функции двух переменных — P и x_0 . Примерные графики этих функций представлены на рис. 7.2.

Для определения оптимальных значений \hat{P} и \tilde{x}_0 потребуем максимума принятия правильных решений и минимума принятия ошибочных решений, т. е. решим «задачу о минимаксе». В обоих случаях имеем равенства

$$\frac{\partial P_+}{\partial P} = \frac{\partial P_-}{\partial P} = P_1 - P_2 = 0;$$

$$F_1(\tilde{x}_0) = 1 - F_2(\tilde{x}_0). \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) служит для определения оптимального значения \tilde{x}_0 . Это значение соответствует равенству заштрихованных площадей, показанных на рис. 7.1. Графическое определение значения \tilde{x}_0 представлено на рис. 7.3.

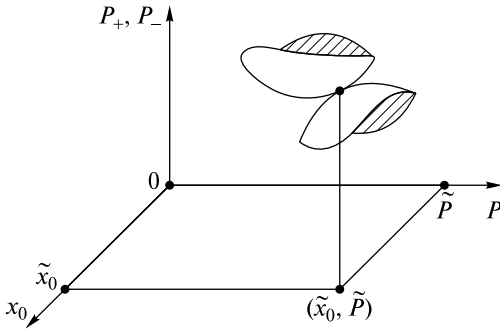


Рис. 7.2

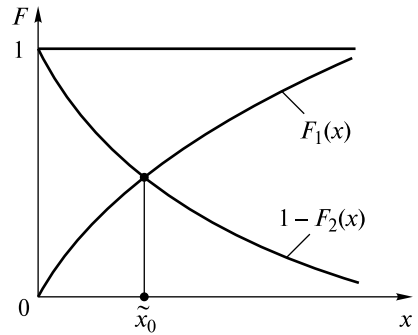


Рис. 7.3

В случае нормальных законов исходных распределений вероятностей имеем

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_1} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x}_1)^2}{2S_1^2}\right); \quad F_1(x) = \Phi\left(\frac{x-\bar{x}_1}{S_1}\right); \quad (7.2)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_2} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x}_2)^2}{2S_2^2}\right); \quad F_2(x) = \Phi\left(\frac{x-\bar{x}_2}{S_2}\right),$$

где $\Phi(z)$ — табулированная функция нормального распределения вероятностей,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt;$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, S_1, S_2$ — параметры распределений вероятностей.

С учетом соотношений (7.2) уравнение (7.1) принимает вид

$$\Phi\left(\frac{x_0 - \bar{x}_1}{S_1}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x_0 - \bar{x}_2}{S_2}\right). \quad (7.3)$$

Отметим (рис. 7.4), что

$$1 - \Phi(z) = \Phi(-z). \quad (7.4)$$

С учетом равенства (7.4) из (7.3) получим

$$\Phi\left(\frac{x_0 - \bar{x}_1}{S_1}\right) = \Phi\left(\frac{\bar{x}_2 - x_0}{S_2}\right);$$

$$\frac{x_0 - \bar{x}_1}{S_1} = \frac{\bar{x}_2 - x_0}{S_2}.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{S_1 \bar{x}_2 + S_2 \bar{x}_1}{S_1 + S_2}. \quad (7.5)$$

При $S_1 = S_2$

$$x_0 = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

Из условия экстремума функций $P_+(x_0, P)$ и $P_-(x_0, P)$

$$\frac{\partial P_+}{\partial x_0} = \frac{\partial P_-}{\partial x_0} = 0$$

следует, что оптимальное значение вероятности P определяется (для раскрытия замысла природы) из решения уравнения

$$\frac{1 - P}{P} = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}.$$

Отсюда

$$P = \left(\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} + 1 \right)^{-1}.$$

При $P = 0,5$ имеем $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, и тогда значение x_0 на рис. 7.1 определяется координатой точки пересечения кривых $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

При $P = 1,0$ имеем $x_0 = \infty$, при $P = 0$ $x_0 = 0$.

Таким образом, найдена оптимальная стратегия игрока по принятию решений о годности конструкций к дальнейшей эксплуатации и раскрыты вероятности, с которыми природа представляет на диагностирование исправные и дефектные конструкции.

Замечание. Выше в качестве диагностического параметра рассматривалась трещина в элементе конструкции. Аналогично в качестве такого параметра могут быть рассмотрены и другие показатели технического состояния объектов и конструкций: износ стенок трубопроводов и сосудов высокого давления, содержание металлической стружки в авиационном топливе, площади поверхностной коррозии деталей и т. п. Решение рассмотренной задачи можно распространить на случаи, когда техническое состояние объекта ха-

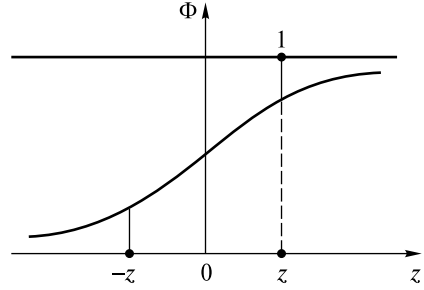


Рис. 7.4

характеризуется несколькими показателями x_1, x_2, \dots и известно, что если эти показатели соответствуют закону распределения вероятностей с плотностью $f_1(x_1, x_2, \dots)$, то объект считается исправным, а если эти показатели соответствуют другому распределению вероятностей, то дефектным.

В рассматриваемой выше задаче требуется учесть, что каждому решению в игре с природой соответствует цена C_{ij} ($i, j = 1, 2$).

Тогда оптимальные значения величин x_0 и P можем найти из условия минимума потерь, определяемых по формуле

$$C(x_0, P) = C_{11}P_1P + C_{22}P_2(1 - P) + C_{12}P_2P + C_{21}P_1(1 - P).$$

Из условия

$$\frac{\partial C(x_0, P)}{\partial P} = 0$$

получим для нахождения P уравнение

$$(C_{11} + C_{21})F_1(x_0) + (C_{12} - C_{22})(1 - F_2(x_0)) = 0.$$

При $C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{21} = 0$ возвращаемся к уравнению (7.1).

Из условия

$$\frac{\partial C(x_0, P)}{\partial x_0} = 0$$

получим следующее уравнение для определения P :

$$\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \frac{C_{22}(1 - P) + C_{12}P}{C_{11}P + C_{21}(1 - P)}.$$

Лекция 8

Вероятностные методы в механике подземных трубопроводов

В статистическом аспекте рассмотрим задачу по расчету прочности подземного трубопровода типа тонкостенной трубы, лежащей на упругом основании и засыпанной грунтом с заданными весовыми характеристиками (рис. 8.1).

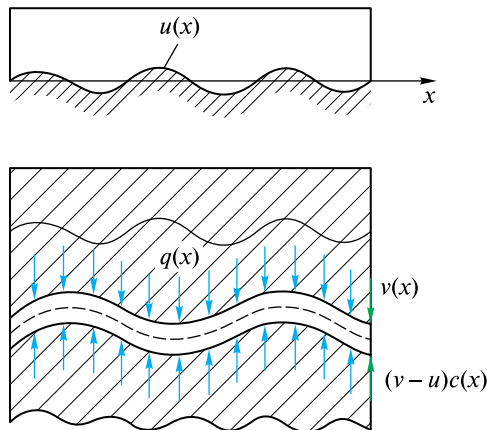


Рис. 8.1

Примем следующие обозначения:

$u(x)$ — профиль неровностей траншеи, заданный в виде случайной функции с нулевым средним значением и спектральной плотностью $S_u(\omega)$, где ω — волновое число;

$q(x) = \bar{q} + q_1(x)$ — распределенная весовая нагрузка со средним значением \bar{q} и малой (в статистическом смысле) флуктуационной составляющей $q_1(x)$ в виде случайной функции со спектральной плотностью $S_q(\omega)$;

$v(x) = \bar{v} + v_1(x)$ — упругий прогиб трубопровода со средним значением \bar{v} и малой флуктуационной составляющей $v_1(x)$ в виде случайной функции со спектральной плотностью $S_v(\omega)$;

$c(x) = \bar{c} + c_1(x)$ — коэффициент отпора (жесткости) грунта со средним значением \bar{c} и малой флуктуацией в виде случайной функции со спектральной плотностью $S_c(\omega)$.

Дифференциальное уравнение изгиба трубопровода при его жесткости (EJ) можем записать в виде

$$EJv^{IV} = q - c(v - u)$$

или

$$EJv_1^{IV} + (\bar{c} + c_1)(\bar{v} + v_1) = \bar{q} + q_1 + (\bar{c} + c_1)u_1.$$

Отсюда для среднего смещения трубопровода вниз получим оценку

$$\bar{v} = \bar{q} / \bar{c},$$

а флуктуационную составляющую прогиба трубопровода будем определять из решения уравнения

$$EJv^{IV} + cv = r(x), \quad (8.1)$$

где $r(x) = q(x) - \bar{v}c(x) + \bar{c}u(x)$.

В (8.1) учтено, что из-за малости флуктуаций введенных в рассмотрение случайных функций можно принять $c_1v_1 \approx 0$, $c_1u \approx 0$. Индекс «1» в (8.1) опущен.

Метод функций Грина

В операторной форме уравнение (8.1) имеет вид

$$L\{v(x)\} = r(x), \quad (8.2)$$

где $L(p) = EJp^4 + c$ — дифференциальный оператор; $p = \frac{d}{dt}$.

Функция Грина $g(x)$ для уравнений (8.1) и (8.2) является решением следующего дифференциального уравнения с нулевыми граничными условиями:

$$L\{g(x)\} = \delta(x), \quad (8.3)$$

где $\delta(x)$ — импульсная дельта-функция Дирака.

Решение уравнения (8.3) имеет вид

$$g(x) = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k x}. \quad (8.4)$$

Здесь λ_k — отрицательные решения алгебраического уравнения

$$L(\lambda) = EJ\lambda^4 + C = 0$$

или

$$\lambda^4 + 4k^4 = 0, \quad (8.5)$$

где $4k^4 = \frac{C}{EJ}$.

Из уравнения (8.5) следует, что

$$\lambda_k = k\sqrt{2i} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -k(1+i);$$

$$L'(\lambda) = 4\lambda^3; \quad L'(\lambda_1) = L'(\lambda_2) = 8k^3(1-i);$$

$$g(x) = \frac{1}{4k^3(1-i)} e^{-ikx} = \frac{1}{8k^3} e^{-k|x|} (\cos kx + \sin k|x|). \quad (8.6)$$

Вид функции Грина (8.6) показан на рис. 8.2.

Представим функцию $r(x)$ в виде интеграла Дирака:

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \delta(x - \tau) d\tau, \quad (8.7)$$

а функции $g(t - \tau)$ и $v(x)$ в виде

$$g(t - \tau) = L^{-1} \{ \delta(x - \tau) \}; \quad (8.8)$$

$$v(x) = L^{-1} \{ r(x) \}, \quad (8.9)$$

где L^{-1} — обратный к L оператор

Подставив (8.7) и (8.8) в (8.9), получим

$$v(x) = \int_{-\infty}^x r(\tau) g(x - \tau) d\tau. \quad (8.10)$$

Кривизну трубопровода, изгибающий момент и напряжения будем вычислять по формулам

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = v''(x) = \int_{-\infty}^x r(\tau) g''(x - \tau) d\tau;$$

$$M_{из} = EJv''(x); \quad \sigma = \frac{M_{из}}{W},$$

где W — момент сопротивления.

Из (8.10) следует, что корреляционные функции для $v(x)$, $v'(x)$ и $v''(x)$ можем найти по формулам

$$K_v(x) = \iint_{00}^{\infty\infty} g(\theta_1) g(\theta_2) K_r(|x| + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2; \quad (8.11)$$

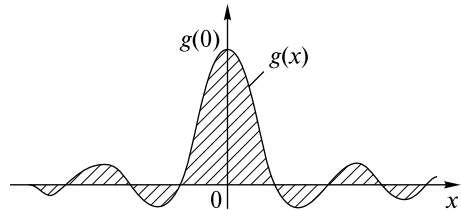


Рис. 8.2

$$K_{\dot{v}}(x) = -\ddot{K}(x); \quad K_{\ddot{v}}(x) = -K^{IV}(x), \quad (8.12)$$

где $K_r(x)$ – корреляционная функция процесса $r(x)$.

Частоты изменения функций $v(x)$, $v'(x)$ и $v''(x)v''(x)$ вычислим следующим образом:

$$\omega_v = \frac{S_{\dot{v}}}{S_v}; \quad \omega_{v'} = \frac{S_{\dot{v}'}}{S_{v'}}; \quad \omega_{v''} = \frac{S_{\dot{v}''}}{S_{v''}}. \quad (8.13)$$

Вероятность того, что напряжения в трубопроводе на длине l не превысят опасного уровня σ_* (надежности по прочности), определим как

$$P\{\sigma(x) \leq \sigma_*, \quad x \in (0, l)\} = l \frac{\omega_\sigma}{2\pi} \exp\left(-\frac{\sigma_*^2}{2S_\sigma^2}\right), \quad (8.14)$$

где $S_\sigma^2 = K_\sigma(0)$.

Метод спектральных представлений Фурье

Решение уравнения (8.1) при единичном гармоническом воздействии $r_1(x) = 1 \cdot e^{-i\omega x}$ ищем в виде $v(x) = H(i\omega)e^{-i\omega x}$. Получим передаточную функцию этого уравнения

$$H(i\omega) = \frac{1}{EJ\omega^4 + c}. \quad (8.15)$$

Функции $r(x)$ и $v(x)$ представим через амплитудные спектры $\Phi_r(\omega)$ и $\Phi_v(\omega)$:

$$\begin{aligned} r(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_r(\omega) e^{i\omega x} d\omega; \\ v(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_v(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Подставив выражения (8.16) в уравнение (8.1), получим

$$\Phi_v(\omega) = H(i\omega)\Phi_r(\omega). \quad (8.17)$$

Поскольку амплитудные спектры случайных процессов дельта-коррелированы (теорема Винера), спектральные плотности функций $r(x)$ и $v(x)$ связаны соотношением

$$S_v(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_r(\omega) = \frac{S_r(\omega)}{(EJ\omega^4 + c)^2}. \quad (8.18)$$

Спектральные плотности для кривизны трубопровода и изгибающего момента (8.18) определим по формулам

$$S_\kappa(\omega) = \omega^4 S_v(\omega); \quad S_M(\omega) = (EJ)^2 S_\kappa(\omega).$$

При белом шуме $r(x)$ интенсивностью k_0 получим дисперсии для прогибов и кривизны трубопровода:

$$s_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_v(\omega) d\omega = \frac{3\sqrt{2}k_0}{16\pi c^2} \left(\frac{c}{EJ} \right)^{1/4};$$

$$s_\kappa^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_\kappa(\omega) d\omega = \frac{\sqrt{2}k_0}{16\pi c^2} \left(\frac{c}{EJ} \right)^{5/4}.$$

Дисперсию для напряжений определим как

$$s_\sigma^2 = \frac{1}{W^2} s_r^2.$$

Приведенные в этой лекции соотношения позволяют провести расчеты надежности, используя различные критерии согласно формулам типа (8.14).

В решении рассмотренной выше задачи требуется учесть упругие деформации сдвига грунта, показанные на рис. 8.3.

Примем: $v = v(x)$ – деформации сдвига; $Q = c_2 v$ – сила сдвига при коэффициенте жесткости c_2 ; $q = c_2 v''$ – распределенная нагрузка.

Дифференциальное уравнение изгиба трубопровода (8.1) изменится и примет следующий вид:

$$EJv^{IV} - c_2 v^{II} + c_1 v = q$$

с импедансом

$$L(i\omega) = EJ\omega^4 + c_2\omega^2 + c_1$$

и передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}.$$

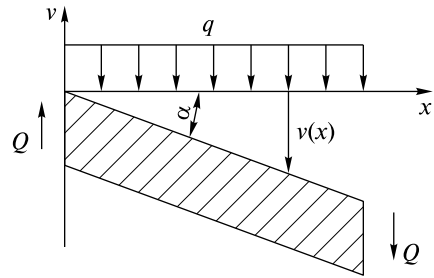


Рис. 8.3

Лекция 9

Усталостная долговечность элементов конструкций, работающих в условиях интенсивной коррозии и случайных процессов нагружения

В условиях коррозии характеристики сопротивления усталости со временем снижаются, что приводит к снижению их усталостной долговечности.

Для определения темпа снижения предела выносливости σ_{-1} можем, например, основываться на том, что оно происходит с постоянной интенсивностью, т. е. принять, что выполняется следующее условие:

$$i = \frac{d\sigma_{-1}/dt}{\sigma_{-1}} = -\beta = \text{const}, \quad (9.1)$$

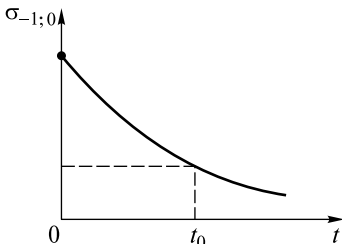


Рис. 9.1

где i (от *intensity*), $\dot{\sigma}_{-1}(t)$ — интенсивность и скорость снижения предела выносливости со временем t .

Из (9.1) следует, что к моменту времени t предел выносливости снизится. Будем вычислять его по формуле

$$\sigma_{-1}(t) = \sigma_{-1;0} \exp(-\beta t). \quad (9.2)$$

Процесс снижения σ_{-1} является экспоненциальным (рис. 9.1).

В формуле (9.2) $\sigma_{-1;0}$ — начальное значение предела выносливости, а параметр β определим экспериментально. Так, если известно, что к моменту времени t_1 предел выносливости уменьшился в k раз, то из (9.2) найдем

$$\beta = \frac{1}{t_1} \ln k$$

и при $t_1 = 100$ ч, $k = 2$ получим $\beta \approx 0,007$ ч⁻¹.

При $t = 0$ имеем $\sigma_{-1}(0) = \sigma_{-1;0}$, при $t \rightarrow \infty$ $\sigma_{-1}(t) \rightarrow 0$.

В случае когда снижение предела выносливости происходит в геометрической прогрессии, вместо (9.1) получим соотношение

$$i = -\alpha \beta t^{\alpha-1}, \quad (9.3)$$

т. е. это снижение при $\alpha = 1$ будет вейбулловским, при $\alpha = 2$ рэлеевским, при $\alpha = 3$ максвелловским и т. д.

Из (9.3) получим

$$\sigma_{-1}(t) = \sigma_{-1;0} \exp(-\beta t^\alpha). \quad (9.4)$$

При $t = 0$ имеем $\sigma_{-1}(0) = \sigma_{-1;0}$, при $t \rightarrow \infty$ $\sigma_{-1}(t) \rightarrow 0$.

Параметры α и β определим экспериментально. Пусть на момент времени t_1 предел выносливости уменьшился в k_1 раз, а на момент времени t_2 — в k_2 раз. Тогда для определения этих параметров имеем систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} \ln k_1 &= \beta t_1^\alpha; \\ nk_2 &= \beta t_2^\alpha. \end{aligned}$$

Для расчета усталостной долговечности при случайных процессах нагружения конструкции примем уравнение кривой усталости в виде

$$\sigma^m N = \sigma_{-1}^m N_0 = \text{const}, \quad (9.5)$$

где m , и N_0 — параметры; $N \equiv N(\sigma)$ — число циклов нагружения до разрушения при амплитуде напряжений σ .

Распределение вероятностей для амплитуд напряжений σ примем следующим законом Рэлея с плотностью

$$f(\sigma) = \frac{\sigma}{S^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2S^2}\right), \quad (9.6)$$

где S — параметр.

Согласно линейной гипотезе о накоплении усталостных повреждений, ожидаемое усталостное повреждение v за n циклов нагружения опишем соотношением

$$v(n) = n \left\langle \frac{1}{N(\sigma)} \right\rangle,$$

и за время t получим

$$v(n) = \frac{\omega_0 t}{2\pi} \left\langle \frac{1}{N(\sigma)} \right\rangle,$$

где ω_0 — частота процесса нагружения; $\langle \dots \rangle$ — оператор усреднения.

В соответствии с (9.4), (9.5) и (9.6) ожидаемое усталостное повреждение к моменту времени t

$$v(t) = \frac{2^{m/2} S^m \omega_0}{2\pi N_0 \sigma_{-1;0}^m} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) J(t), \quad (9.7)$$

где

$$J(t) = \int_0^t \exp(m\beta x^{\alpha m}) dx, \quad (9.8)$$

Долговечность конструкции T найдем из решения уравнения (9.8).

При $\alpha = 1$ имеем

$$T = \frac{1}{\beta m} \ln(\beta m k);$$

$$J(T) = \int_0^T \exp(m\beta x^{\alpha m}) dt = \frac{2\pi N_0 \sigma_{-1;0}^m}{2^{m/2} S^m \omega_0} \equiv K. \quad (9.9)$$

Отсюда

$$T = J^{-1}(K),$$

где индекс «-1» означает обратную функцию.

В качестве примера рассмотрим расчетное прогнозирование усталостной долговечности нефтедобывающей платформы, установленной на дне моря и подвергающейся в процессе эксплуатации коррозии, интенсивным нерегулярным воздействиям от сотрясения основания при землетрясениях, порывах ветра и волнениях моря при шторме. Эти воздействия рандомизируются и представляются в виде гауссовских случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками — корреляционными функциями и энергетическими спектрами.

Расчетная схема рассматриваемой нефтедобывающей платформы при анализе сейсмического воздействия приведена на рис. 9.2, при анализе ветрового воздействия — на рис. 9.3, при анализе волнового воздействия — на рис. 9.4.

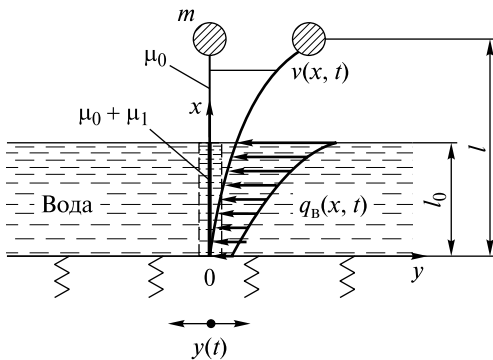


Рис. 9.2

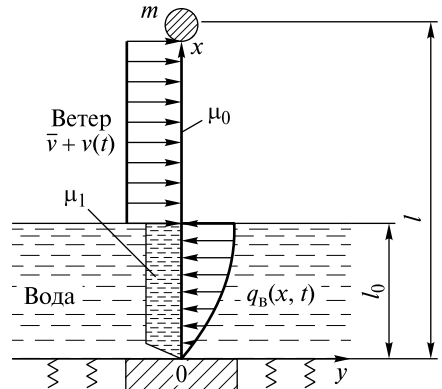


Рис. 9.3

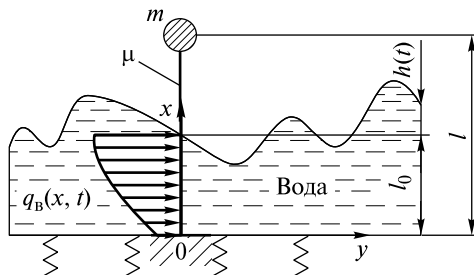


Рис. 9.4

Для всех расчетных схем используем общее уравнение

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial v}{\partial t} + Cv = q(x, t) \quad (9.10)$$

с упругим оператором сжато-изогнутого стержня

$$C = \frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} P \frac{\partial}{\partial x}. \quad (9.11)$$

В формулах (9.10), (9.11) обозначены: $v = v(x, t)$ — перемещение в точке с координатой x в момент времени t ; μ — распределенная масса; β — распределенный коэффициент демпфирования; $q(x, t)$ — распределенная нагрузка; EJ — жесткость стержня; P — весовое воздействие.

Распределенная масса

$$\mu \equiv \mu(x) = \begin{cases} m\delta(x-l); \\ \mu_0, & x \in (0, l); \\ \mu_0 + \mu_1, & x \in (0, l_0), \end{cases}$$

где m — сосредоточенная масса в верхней части стержня; μ_1 — присоединенная масса воды, вовлеченная в общий колебательный процесс.

Распределенная нагрузка при анализе сейсмических воздействий

$$q = q(x, t) = \mu a(t) - q_b(x, t),$$

где $a(t) = \ddot{y}(t)$ — ускорение основания; $q_b(x, t) = k_1(\dot{y} + \dot{v})$ — распределенная демпфирующая нагрузка от воздействия воды; k_1 — параметр.

Распределенная нагрузка при анализе пульсирующего ветрового воздействия со скоростью $W(t)$

$$q(t) = k_2 W(t),$$

где k_2 — параметр.

Распределенная нагрузка при волновом воздействии с высотой волн $h(t)$

$$q(t) = k_3 \dot{h}(t) + k_4 \ddot{h}(t),$$

где k_3, k_4 — параметры.

Спектральную плотность виброускорений $a(t)$ примем в виде

$$S_a(\omega) = \frac{2s^2}{\pi} \frac{\alpha\theta}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (9.12)$$

где $s = \frac{1}{3} 2^{n-7}$ — стандарт виброускорений, мс^{-2} , при землетрясении интенсивностью n баллов; $\theta = 10 \text{ с}^{-1}$; $\alpha = 5 \text{ с}^{-1}$.

Повторяемость землетрясений интенсивностью n баллов в год $\lambda_k = 10^{6-n}$. Средняя длительность одного землетрясения $t = 30$ с с периодом интенсивной фазы $t_0 = 6$ с.

Спектральную плотность пульсирующей составляющей скорости ветрового воздействия N вычислим по формуле

$$S_N(\omega) = s_N^2 \frac{\beta|\omega|}{3(1 + \beta\omega^2)^{4/3}}, \quad (9.13)$$

где $s_N^2 = 0,013\bar{N}^2$ — дисперсия скорости ветра при средней скорости ветра $\bar{N} = 20, 30, 40$ м/с; $\beta = (L / \bar{N}^2)^2$; $L = 190$ м.

Спектральную плотность высот волн $h(t)$ при средней скорости ветра W определим как

$$S_h(\omega) = \frac{ag^3}{4N} \omega^{-6} \exp \left[- \left(\frac{bg}{\omega N} \right)^2 \right]. \quad (9.14)$$

Решение уравнения (9.10) как сумму решений, вычисленных отдельно по каждой форме колебаний $\varphi(x)$, получим в виде

$$v(x, t) = u(t)\varphi(x), \quad (9.15)$$

где $u(t)$ — функции времени, подлежащие определению методами статистической динамики; формы $\varphi(x)$ находят известными методами теории колебаний.

Напряжения в стержне вычислим по формуле сопротивления материалов

$$\sigma(x, t) = \frac{EJ}{W} u(t)\ddot{\varphi}(x). \quad (9.16)$$

При $\varphi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$ имеем

$$\sigma_{\max} = ku(t),$$

где $k = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2 W}$.

Подставив выражения типа (9.15) по каждой форме колебаний в уравнение (9.10) и умножив его скалярно на функцию $\varphi(x)$, получим дифференциальные уравнения для определения функций $u(t)$ типа

$$M\ddot{u} + B\dot{u} + \lambda u = Q(t), \quad (9.17)$$

где $M = (m\varphi, \varphi)$ — обобщенная масса; $B = (b\varphi, \varphi)$ — обобщенный коэффициент демпфирования; $\lambda = (c\varphi, \varphi)$ — обобщенная жесткость; $Q(t) = (q, \varphi)$ — обобщенная сила; запятой обозначено скалярное произведение соответствующих функций.

Разделив выражение (9.15) на M , получим уравнение колебаний в стандартной форме:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t), \quad (9.18)$$

где $2n = \frac{B}{M}$; $\omega_0^2 = \frac{\lambda}{M}$; $f(t) = \frac{Q(t)}{M}$.

В связи с относительной длительностью ветровых и волновых воздействий процесс $f(t)$ можем считать стационарным случайным процессом, заданным спектральной плотностью $S_f(\omega)$.

Тогда спектральную плотность процесса $u(t)$ вычислим по формуле

$$S_u(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_f(\omega),$$

где $H(i\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2ni\omega}$ — передаточная функция для уравнения (9.18),

а его дисперсию и дисперсию максимальных напряжений — по формулам

$$s_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) d\omega;$$

$$s_\sigma^2 = k^2 s_u^2.$$

Функция Грина для уравнения (9.18) имеет вид

$$g(t) = \frac{1}{\omega_n} e^{-nt} \sin \omega_n t,$$

где $\omega_n^2 = \omega_0^2 - n^2$.

В связи с относительной кратковременностью сейсмических воздействий процесс $f(t)$ будет нестационарным, его интенсивность изменяется от нуля до некоторого максимума и затем постепенно убывает до нуля (рис. 9.5). Такой процесс можем описать функцией

$$f(t) = a(t)x(t), \quad (9.19)$$

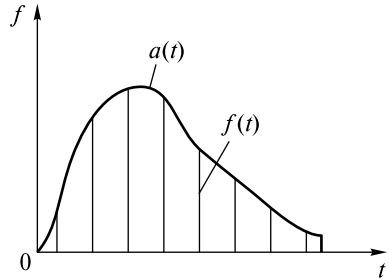


Рис. 9.5

где $a(t) = cte^{-ct}$ — псевдоогibaющая стационарного процесса $x(t)$ со спектральной плотностью $S_x(\omega)$; максимум $f(t)$ достигается в момент $t = c^{-x}$.

Используя фильтрующие свойства системы пропускать воздействия в основном с частотой ω_0 , заменим процесс $x(t)$ на белый шум с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = k_0 \delta(\tau), \quad (9.20)$$

где k_0 — интенсивность белого шума,

$$k_0 = 2\pi S_x(\omega_0).$$

Поскольку решение уравнения (9.18) можем представить в виде интеграла Дюамеля

$$u(t) = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (9.21)$$

корреляционные функции процессов $f(t)$ и $u(t)$ вычислим по формулам

$$K_f(t_1, t_2) = k_0 a(t_1)a(t_2)\delta(t_1 - t_2); \quad (9.22)$$

$$K_u(t_1, t_2) = k_0 \int_0^t g(t_1 - \tau)g(t_2 - \tau)a^2(\tau)d\tau. \quad (9.23)$$

Дисперсии процессов $u(t)$ и максимальных напряжений $\sigma(t)$ определим как

$$s_u^2(t) = k_0 \int_0^t a^2(\tau)g^2(t - \tau)d\tau; \quad (9.24)$$

$$s_\sigma^2(t) = k^2 s_u^2(t). \quad (9.25)$$

Подставив выражение (9.25) в формулу (9.9), получим значения ожидаемой долговечности T — ресурс конструкций при различных интенсивностях случайных сейсмических, ветровых и волновых воздействий, работающих в условиях коррозии металла.

Пример 9.1. Требуется уточнить расчет усталостной долговечности с учетом того, что накопления усталостных повреждений при напряжениях меньше предела выносливости σ_{-1} не происходит.

В этом случае уравнение кривой усталости (9.5) изменится и примет вид

$$N(\sigma) = \begin{cases} N_0 \frac{\sigma_{-1}^m}{\sigma^m} & \text{при } \sigma \geq \tilde{\sigma}_{-1}; \\ \infty & \text{при } \sigma < \tilde{\sigma}_{-1}, \end{cases}$$

где $\tilde{\sigma}_{-1}$ — напряжения нижний порог для суммирования усталостных повреждений.

Тогда исходное уравнение (9.7) для определения усталостного повреждения к моменту t примет вид

$$v(t) = \frac{2^{m/2} s^m \omega_0}{2\pi N_0 \sigma_{-1;0}^m} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1, \frac{\sigma_{-1}^2}{2s^2}\right) \int_0^t \exp(m\beta x^{am}) dx,$$

где $\Gamma(x, a) = \int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ — табулированная неполная гамма-функция.

Лекция 10

Вероятностное прогнозирование остаточного ресурса деталей машин и конструкций с использованием результатов незавершенных испытаний по определению их долговечности

Рассмотрим возможность расчетного прогнозирования остаточного ресурса объектов с использованием результатов незавершенных испытаний по определению их долговечности. Информация о незавершенных испытаниях служит для оценки параметров распределения вероятностей ожидаемой долговечности.

Задача по прогнозированию остаточного ресурса возникает обычно в ситуациях, когда по предварительным экспертным или расчетным оценкам, а также по ряду диагностических признаков выясняется, что ресурс объекта близок к исчерпанию, а продление срока его эксплуатации на некоторое время может дать значительный экономический эффект. При этом имеется в виду, что в расчетных моделях по оценке ресурса конструкций на этапе их расчета обычно учитываются только наиболее нагруженные режимы работы и принимаются минимальные или усредненные значения прочностных характеристик материалов. Такие расчеты часто носят лишь сравнительный характер, поэтому действительное техническое состояние объекта на данный момент времени эксплуатации может значительно отличаться от расчетного.

Рассмотрим ситуацию, когда ведется наблюдение за работой большого числа объектов N , ни один из которых к моменту времени t_0 не вышел из строя, а к моменту времени t_1 из строя вышло $n < N$ объектов (рис. 10.1).

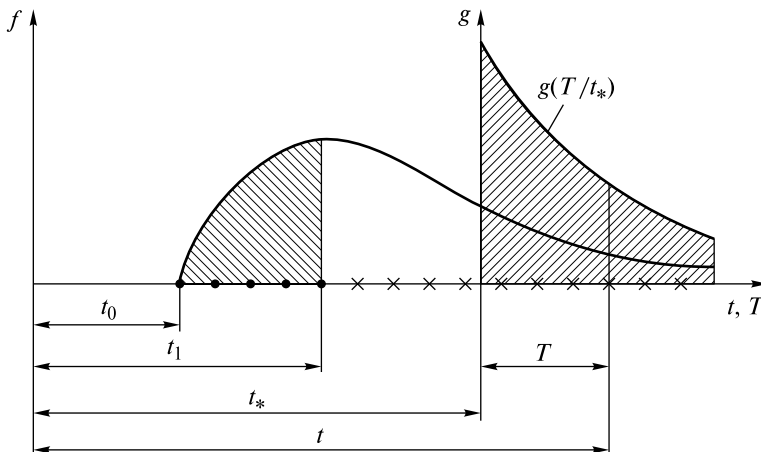


Рис. 10.1

Для каждого из оставшихся $N - n$ объектов требуется определить остаточный ресурс T при условии наработки им без отказа времени $t_* > t_1$.

На рис. 10.1 зафиксированные моменты времени отказов объектов отмечены «•», а «×» — их гипотетические моменты отказов при $t > t_1$.

Остаточный ресурс каждого объекта характеризуется плотностью распределения вероятностей $g(T/t_*)$ или вероятностью $P(T/t_*)$ для времени T при условии, что к моменту времени t_* отказа не произошло.

При однопараметрической функции распределения вероятностей $F(t/b)$ для долговечности ее параметр b определим из решения уравнения

$$P(t < t_1) = F(t_1/\beta) = \frac{n}{N}. \quad (10.1)$$

Если для времени t принять закон Вейбулла с функцией распределения вероятностей

$$F(t/\beta) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 - e^{-\beta(t-t_0)^\alpha} & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (10.2)$$

с наперед заданным параметром α , то из (10.1) и (10.2) найдем

$$\beta = -(t_1 - t_0)^{-\alpha} \ln \left(1 - \frac{n}{N} \right). \quad (10.3)$$

В соответствии с (10.2) первые два момента и коэффициент вариации величины $t - t_0$ вычислим по формулам

$$\langle t - t_0 \rangle = \beta^{-1/\alpha} \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right); \quad (10.4)$$

$$\langle (t - t_0)^2 \rangle = \beta^{-2/\alpha} \Gamma \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right); \quad (10.5)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)}}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)} \approx \frac{\pi}{\alpha \sqrt{6}} + O \left(\frac{1}{\alpha^2} \right), \quad (10.6)$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор усреднения; $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ — гамма-функция.

Известно, что коэффициент вариации δ_t для долговечности t примерно равен 10 %, так что для этого и подобных случаев с помощью формул (10.4)–(10.6) можно определить параметр α и затем по формуле (10.3) — параметр β .

Поскольку вероятность безотказной работы в течение времени t по теореме о произведении вероятностей равна произведению вероятности такой работы в интервале времени T (при условии, что уже отработано без отказа время t_*) и вероятности такой работы за время t_* , то имеем равенство

$$P(t_* + T) = P(T/t_*)P(t_*). \quad (10.7)$$

Отсюда для определения вероятностных характеристик остаточного ресурса T получим формулы

$$P(T/t_*) = \frac{P(t_* + T - t_0)}{P(t_* - t_0)}; \quad (10.8)$$

$$g(T/t_*) = \frac{f(t_* + T - t_0)}{P(t_* - t_0)}; \quad (10.9)$$

$$\langle T/t_* \rangle = \frac{1}{P(t_*)} \int_0^{\infty} P(t_* + T - t_0) dt. \quad (10.10)$$

Гамма-процентный остаточный ресурс $T_\gamma(t_*)$ при предварительной наработке t_* найдем из решения уравнения

$$P(t_* - t_* + T_\gamma(t_*)) = \gamma P(t_*). \quad (10.11)$$

При $\gamma = 1$ имеем $T_\gamma = 0$, при $\gamma = 0$ $T_\gamma = \infty$.

Для описания рассеяния долговечности t законом Вейбулла (10.2) используем формулы

$$P(t) = e^{-\beta(t-t_0)^\alpha};$$

$$P(T/t_*) = e^{-\beta[(t_*-t_0+T)^\alpha - (t_*-t_0)^\alpha]}; \quad (10.12)$$

$$g(T/t_*) = \alpha\beta(t_* + T)^{\alpha-1} e^{-\beta[(t_*-t_0+T)^\alpha - (t_*-t_0)^\alpha]}; \quad (10.13)$$

$$\langle T/t_* \rangle = \frac{1}{P(t_* - t_0)} \int_{t_*-t_0}^{\infty} e^{-\beta x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha\beta^{\frac{1}{\alpha}} P(t_* - t_0)} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, \beta(t_* - t_0)^\alpha\right); \quad (10.14)$$

$$T_\gamma(t_*) = \bar{t} \left[\beta(t_* - t_0)^\alpha - \ln \gamma \right]^{\frac{1}{\alpha}} - (t_* - t_0); \quad (10.15)$$

$$T_{\gamma}(t_*) = \frac{\bar{t} - t_0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \left[\beta(t_* - t_0)^{\alpha} - \ln \gamma \right]^{\frac{1}{\alpha}} - t_* + t_0, t_* \geq t_0,$$

где $\Gamma(a, x) = \int_a^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ — неполная гамма-функция,

Отметим, что при $\alpha = 1$, т. е. при экспоненциальном законе распределения вероятностей для t , остаточный ресурс T не зависит от предварительной наработки t_* .

Более точные значения параметров α и β (без использования априорной информации о значении коэффициента вариации для t) можем вычислить, если вместо одного момента времени t_1 рассмотрим два момента времени: момент t_1 и момент $t_2 < t_1$, при котором число зафиксированных разрушений $n_2 < n_1$. Соответственно можем получить два уравнения для определения двух неизвестных. При этом расчеты существенно усложняются.

Для нахождения параметров α и β используем метод максимума правдоподобия. В этой связи рассмотрим определение параметров нормального распределения вероятностей при незавершенных испытаниях по методу максимума правдоподобия.

Плотность нормального распределения вероятностей при $t_0 = 0^2$ примем в виде

$$f(t/\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} e^{-\frac{1}{2\beta}(t^2 - 2\alpha t + \alpha^2)},$$

где α , β — среднее значение и дисперсия величины t . При $t \neq 0$ суть не изменяется, но формулы будут громоздкими.

При N объектах, подвергнутых испытаниям, и n объектах, испытания которых завершены в момент времени испытаний t_1, t_2, \dots, t_n , функция правдоподобия при $n < N$ будет иметь вид

$$L(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\beta} \left[\sum_{i=1}^n t_i^2 + (N-n)t_0^2 - 2\alpha \left(\sum_{i=1}^n t_i + (N-n)t_0 \right) + n\alpha^2 \right]}.$$

В этом случае

$$\ln L(\alpha, \beta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\beta) - \frac{1}{2\beta} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} t_i^2 + (n - n_1)t_0^2 - 2\alpha \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_i + (n - n_1)t_0 \right] + n\alpha^2 \right\}.$$

Параметры α и β определим из следующих уравнений максимума правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -2 \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_i + (n - n_1)t_0 \right] + 2n\alpha = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{n}{2\beta} + \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} t_i^2 + (N - n)t_0^2 - 2\alpha \left(\sum_{i=1}^n t_i + (N - n) \right) t_0 + n\alpha^2 \right\}.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n t_i + (N - n)t_0 \right];$$

$$\beta = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (t_i - \alpha)^2 + (N - n)t_0^2 - 2\alpha(N - n)t_0 \right].$$

При завершенных испытаниях в случае $n = N$ имеем

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N t_i;$$

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (t_i - \alpha)^2.$$

Если время t следует усеченному слева на некотором уровне t_0 нормальному распределению вероятностей с функцией, определяемой как

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ C \left[\Phi \left(\frac{t - \alpha}{\beta} \right) - \Phi \left(\frac{t_0 - \alpha}{\beta} \right) \right] & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

где $C = \frac{1}{1 - \Phi \left(\frac{t_0 - \alpha}{\beta} \right)}$ — коэффициент нормировки; α, β — параметры;

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ — табулированная функция Лапласа, то для α и β получаем зависимость

$$P(t_0 \leq t \leq t_1) = \frac{n_1}{N} = C \left[\Phi \left(\frac{t_1 - \alpha}{\beta} \right) - \Phi \left(\frac{t_0 - \alpha}{\beta} \right) \right].$$

Необходимую для вычисления параметров α и β вторую зависимость между ними получим из следующего определения коэффициента вариации для t :

$$\delta_t = \frac{s}{\bar{t}},$$

где стандарт s и среднее значение \bar{t} для t выражаются по (10.7) стандартными методами теории вероятностей через α и β ; так что s и \bar{t} являются функциями от α и β .

Для описания рассеяния долговечности t законом Гаусса используем формулы:

$$P(t) = 1 - F(t);$$

$$P(T/t_*) = \frac{1 - F(t_* + T)}{1 - F(t_*)};$$

$$g(T/t_*) = \frac{C}{1 - F(t_*)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t_* + T - \alpha}{\beta}\right)^2};$$

$$\langle T/t_* \rangle = \int_0^{\infty} T g(T | t_*) dT.$$

Остаточный гамма-процентный ресурс $T_\gamma(t_*)$ — решение уравнения

$$1 - F(t_* + T_\gamma(t_*)) = \gamma(1 - F(t_*)).$$

В качестве основного примера рассмотрим задачу по прогнозированию остаточного ресурса подшипников мобильных машин.

Наблюдение велось за $N = 10 \cdot 10^3$ подшипниками, ни один из которых не вышел из строя за $t_0 = 10 \cdot 10^3$ ч, а к моменту времени $t_1 = 20 \cdot 10^3$ ч вышли из строя $n = 200$ подшипников.

Считаем, что распределение долговечности подшипников следует закону Вейбулла (10.2) с параметром $\alpha = 4$.

Вычислим β по формуле (10.3):

$$\beta = -(20 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3)^4 \ln\left(1 - \frac{200}{10 \cdot 10^3}\right) = -2,02 \cdot 10^{-18}.$$

График $P(T/t_*)$ при $t_* = 10^5$ приведен на рис. 10.2, при $t_* = 2 \cdot 10^5$ — на рис. 10.3.

Вычислим среднее значение остаточного ресурса по формуле (10.14):

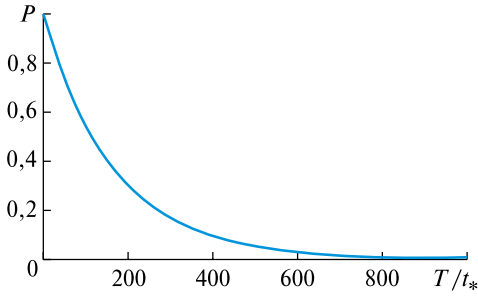


Рис. 10.2

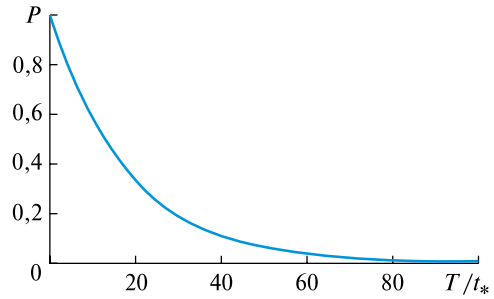


Рис. 10.3

Пример 10.1. Известно, что ресурс сооружения описывается следующей гауссовской плотностью распределения вероятностей:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{(t-\bar{t})^2}{2s^2}\right),$$

где $\bar{t} = 60$ лет; $s = 15$ лет.

Требуется вычислить вероятность того, что сооружение прослужит больше t лет.

Имеем

$$P(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{s}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Получим

$$P(t=60) = 1 - \Phi(0) = 0,5; \quad P(t=75) = 1 - \Phi(1) = 0,16; \quad P(t=90) = 1 - \Phi(2) = 0,028.$$

Вероятность того, что после t_* лет работы сооружение простоит еще T лет, определим по формуле

$$P\left(\frac{T}{t_*}\right) = \frac{P(T+t_*)}{P(t_*)}.$$

Тогда

$$P\left(\frac{15}{60}\right) = \frac{P(t=75)}{P(60)} = 0,32 \gg P(75); \quad P\left(\frac{15}{75}\right) = \frac{P(t=90)}{P(60)} = 0,144 \gg P(90).$$

Лекция 11 Метод марковских процессов

Рассмотрим нестационарный случайный процесс $x(t)$ с начальной (при $t = t_0$) плотностью распределения вероятностей $f(x_0)$ (рис. 11.1, 11.2). Установим закономерности эволюции этой плотности. Многомерную плотность распределения вероятностей для этого процесса представим в виде

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})f(x_n / x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где $f(x_n / x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ — условная плотность вероятности значения x_n при условии, что в предыдущие моменты времени процесс $x(t)$ характеризовался значениями x_0, x_1, \dots, x_{n-1} .

В случае когда выполняется условие

$$f(x_n / x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_n / x_{n-1}), \quad (11.1)$$

т. е. если значение случайного процесса в некоторый момент времени зависит только от предыдущего его значения, процесс $x(t)$ называется марковским.

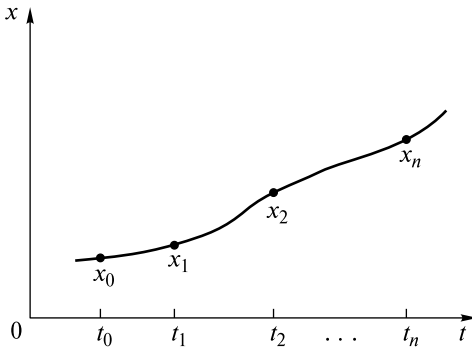


Рис. 11.1

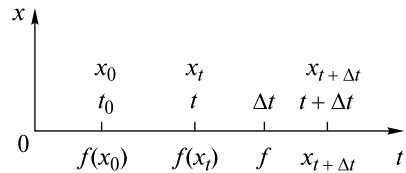


Рис. 11.2

Из (11.1) при $n = 2$, $x_1 = x$, $t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t$ следует

$$f(x_0, x) = f(x_0)f(x / x_0);$$

$$f(x_t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)f(x_t / x_0);$$

$$f(x_{t+\Delta t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_{t+\Delta t} / x_1) dx_1.$$

После несложных преобразований этих соотношений получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x_{t+\Delta t}) - f(x_t)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\chi_1 f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\chi_2 f), \quad (11.2)$$

где $\chi_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ — «коэффициент сноса»; $\chi_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ — «коэффициент диффузии».

Уравнение (11.2) называется уравнением Фоккера — Планка. Марковские процессы формируются в системах, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка с правыми частями в виде белых шумов:

$$\dot{x} + \varphi(x) = q(t). \quad (11.3)$$

Здесь $\varphi(x)$ — детерминированная функция; $q = 0$. Корреляционная функция для $q(t)$ имеет вид $K_q(t_1, t_2) = k_0 \delta(t_2 - t_1)$, k_0 — интенсивность белого шума.

Поскольку

$$\Delta t = -\varphi(x)\Delta t + \int_0^{\Delta t} q(\tau) d\tau,$$

то

$$\chi_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)}{\Delta t} = -\varphi(x);$$

$$\langle \Delta x \rangle = \varphi^2(x)\Delta t^2 + \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} q(\tau_1) q(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \varphi^2(x)\Delta t^2 + k_0 \Delta t;$$

$$\chi_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = k_0.$$

Тогда уравнение (11.2) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi f) + \frac{k_0}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

При $\varphi = 0$ получим уравнение диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{k_0}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

которое при начальном условии $f(x_0) = \delta(x - x_0)$ имеет решение

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2s^2}\right), \quad s^2 = k_0 t. \quad (11.4)$$

Процесс $x(t)$ с плотностью вероятности (11.4) называется процессом Винера.

В случае $t \rightarrow \infty$ устанавливается стационарный режим движения, в котором $\dot{f} = 0$, и уравнение (11.2) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(\varphi f + \frac{k_0}{2} \frac{df}{dx} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi f + \frac{k_0}{2} \frac{df}{dx} &= \text{const}; \\ f(x) &= c \exp \left(-\frac{2}{k_0} \int \varphi(x) dx \right), \end{aligned} \quad (11.5)$$

где c — константа, определяемая из условия нормировки плотности.

При $\varphi(x) = \alpha x$, где α — заданная константа,

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi k_0}} \exp \left(-\frac{\alpha x^2}{k_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp \left(-\frac{x^2}{2s^2} \right), \quad s^2 = \frac{k_0}{2\alpha}.$$

В этом случае передаточная функция уравнения (11.3) имеет вид

$$H(i\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega},$$

а спектральная плотность $S_q(\omega)$ процесса $q(t)$ равна $\frac{k_0}{2\pi}$.

Для определения спектральной плотности и корреляционной функции процесса $x(t)$ получим выражения

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= |H(i\omega)|^2 S_q(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \frac{1}{\alpha^2 - \omega^2}; \\ K_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = s_x^2 \exp(-\alpha|\tau|), \end{aligned} \quad (11.6)$$

т. е. если нормальный процесс характеризуется соотношениями (11.6), то он является еще и марковским (теорема Дуба).

При $\varphi(x) = \text{sign}(x)$ из (11.5) для нахождения плотности вероятности получим двухстороннюю экспоненту

$$f(x) = \frac{1}{k_0} \exp \left(-\frac{2}{k_0} |x| \right).$$

Рассмотрим теперь нестационарный векторный случайный процесс $\vec{x}(t)$ со значениями в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_n

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0), \vec{x}_1 = \vec{x}(t_1), \dots, \vec{x}_n = \vec{x}(t_n).$$

Плотность вероятности

$$f(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})f(\bar{x}_n / \bar{x}_{n-1}, \dots, \bar{x}_0).$$

Если

$$f(\bar{x}_n / \bar{x}_{n-1}, \dots, \bar{x}_0) = f(\bar{x}_n / \bar{x}_{n-1}),$$

то процесс $\bar{x}(t)$ называется марковским.

Изменение во времени m -мерной плотности распределения вероятностей для таких процессов описывается уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (\chi_i f) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (\chi_{ik} f), \quad (11.7)$$

в котором задано начальное значение $f(\bar{x}_0)$, а интенсивность марковского процесса определяется по формулам

$$\chi_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t}; \quad \chi_{ik} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i \Delta x_k}{\Delta t}. \quad (11.8)$$

При $m = 1$ уравнение (11.7) принимает вид уравнения (11.2).

Многомерный марковский процесс формируется в системе, функционирование которой описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями в виде белых шумов:

$$\dot{x}_i + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (11.9)$$

Здесь $\varphi_i(\cdot)$ — детерминированные функции; $q_i = 0$. Корреляционные функции для $q(t)$ имеют вид $K_{ik}(\xi) = q_i(0)q_k(\tau) = s_{ik}\delta(t)$, где s_{ik} — взаимные интенсивности белых шумов.

По формулам (11.8) найдем

$$\chi_i = -\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m); \quad \chi_{ik} = s_{ik}.$$

Уравнение (11.7) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_i f + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m s_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (11.10)$$

Рассмотрим один частный случай системы (11.9):

$$\dot{x}_1 - x_2 = 0 \quad \dot{x}_2 + 2nx_2 + \varphi(x_1) = q(t), \quad (11.11)$$

где $q(t)$ — белый шум интенсивностью k_0 .

Система (11.11) эквивалента уравнению

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + \varphi(x_1) = q(t),$$

т. е. эта система описывает колебания нелинейной системы с одной степенью свободы и белым шумом на входе.

Далее индекс «1» при x_1 опустим.

Имеем

$$\varphi_1 = -x_2; \quad \varphi_2 = 2nx_2 + \varphi(x). \quad (11.12)$$

Подставив (11.12) в (11.10), получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + 2n \left(f + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) + \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{s}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}.$$

При $\dot{f} = 0$ это уравнение описывает стационарные колебания и его можем представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\varphi f + \frac{s}{4n} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(2n \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\dot{x} f + \frac{s}{4n} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (11.13)$$

Поскольку для стационарных процессов

$$f(x, \dot{x}) = f_1(x) f_2(\dot{x}),$$

то из (11.13) получим следующие два дифференциальных уравнения для определения плотностей $f_1(x)$ и $f_2(\dot{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} + \frac{4n}{s} \varphi(x) f_1(x) &= 0; \\ \frac{df_2}{d\dot{x}} + \frac{4n}{s} \dot{x} f_2(\dot{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c \exp \left(-\frac{4n}{s} \Pi(x) \right); \\ f_2(\dot{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s_{\dot{x}}}} \exp \left(-\frac{\dot{x}^2}{2s_{\dot{x}}^2} \right), \end{aligned}$$

где c — коэффициент нормировки; $\Pi(x) = \int_0^x \varphi(x) dx$; $s_{\dot{x}}^2 = \frac{s}{4n}$.
При $\varphi(x) = x^3$ имеем

$$f_1(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{n}{s}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{nx^4}{s}\right).$$

В случае когда $\varphi(x) = a \operatorname{sign} x$ (где a — константа), получим закон распределения вероятностей Лапласа с плотностью

$$f_1(x) = \frac{2na}{s} \exp\left(-\frac{4na}{s}|x|\right).$$

Лекция 12

Метод статистической линеаризации

Рассмотрим метод статистической линеаризации для расчета нелинейных систем при случайных внешних воздействиях на примере системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением

$$L\{q(t)\} + \varphi(q) = f(t), \quad (12.1)$$

где L — линейный дифференциальный оператор; $\varphi(q)$ — нелинейная составляющая жесткости упругого элемента (рис. 12.1); $f(t)$ — гауссовский стационарный процесс воздействий со средним значением, равным нулю.

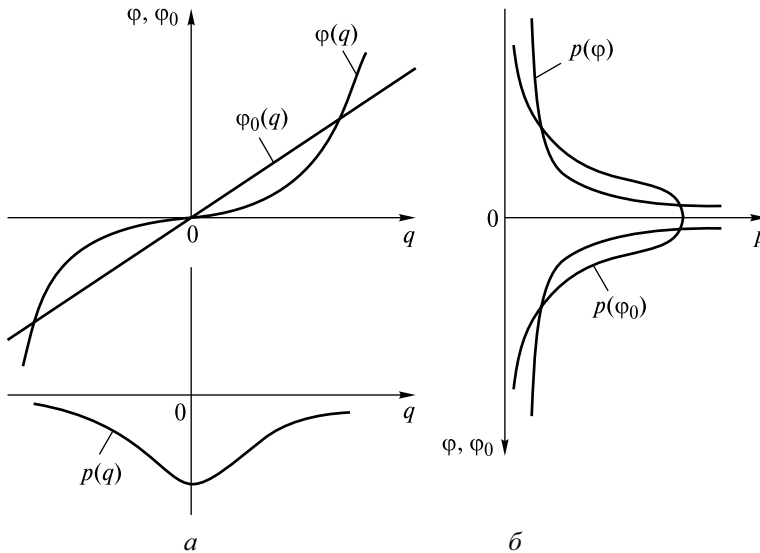


Рис. 12.1

В силу нелинейности упругой характеристики процесс на выходе рассматриваемой динамической системы $q(t)$ уже не является нормальным (гауссовским). Однако в инженерных расчетах полагают, что он мало отличается от нормального процесса и задача состоит лишь в определении его неизвестных параметров. Выбор такого подхода обусловлен возможностью использования основной предельной теоремы теории вероятностей. Она утверждает, что сумма большого числа случайных величин в пределе стремится к нормальному закону распределения вероятностей. В рассматриваемом случае (см. рис. 12.1, а) процесс $q(t)$ получают в результате интегрирования случайных процессов.

Заменим в (12.1) нелинейную функцию $\varphi(q)$ на линейную $\varphi_0(q) = kq$ так, чтобы решение уравнения (12.1) изменилось незначительно. При этом параметр k зависит от интенсивности воздействий, и его необходимо найти. Этот параметр можем определить, например, из условий равенства дисперсий функций $\varphi(q)$ и $\varphi_0(q)$, т. е. из равенства

$$\langle \varphi^2(q) \rangle = k^2 \langle q^2 \rangle. \quad (12.2)$$

Соответствующие равенству (12.2) плотности распределений вероятностей $p(\varphi)$ и $p(\varphi_0)$ также показаны на рис. 12.1, б.

Из (12.2) найдем

$$k^2 = \frac{\langle \varphi^2(q) \rangle}{\langle q^2 \rangle}. \quad (12.3)$$

Параметр k также можем определить из условия минимума квадрата отклонений функций $\varphi(q)$ и $\varphi_0(q)$, т. е. из условия

$$\langle |\varphi(q) - kq|^2 \rangle = J = \min.$$

Из уравнения $\frac{dJ}{dk} = 0$ найдем

$$k = \frac{\langle q\varphi(q) \rangle}{\langle q^2 \rangle}. \quad (12.4)$$

Пусть процесс $q(t)$ характеризуется плотностью распределения вероятностей $p(q, s)$, где s — параметр, который необходимо определить. Тогда из соотношений (12.3) и (12.4) можем найти зависимость $k = k(s)$. Используя ее в решении уравнения (12.1), получим следующее уравнение для определения неизвестного параметра s :

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega) d\omega}{|L(i\omega) + k(s)|^2}, \quad (12.5)$$

где $S_f(\omega)$ — спектральная плотность процесса $f(t)$.

Рассмотрим теперь нелинейное дифференциальное уравнение

$$L\{q(t)\} + \varphi_1(\dot{q}) + \varphi_2(q) = f(t),$$

где L — линейный дифференциальный оператор; $\varphi_1(\dot{q})$ — нелинейная составляющая функции демпфирования; $\varphi_2(q)$ — нелинейная составляющая жесткости упругого элемента; $f(t)$ — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним значением и спектральной плотностью $S_f(\omega)$.

Заменим нелинейные функции $\varphi_1(\dot{q})$ и $\varphi_2(q)$ на линейные $k_1(s)\dot{q}$ и $k_2(s)q$, где s^2 — искомая дисперсия процесса $q(t)$. Получим линейное дифференциальное уравнение

$$L\{q(t)\} + k_1(s)\dot{q} + k_2(s)q = f(t)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{L(i\omega) + k_1(s)i\omega + k_2(s)}.$$

Дисперсии s_q^2 и $s_{\dot{q}}^2$ процессов $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ определим по формулам

$$s_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega;$$

$$s_{\dot{q}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega.$$

После вычисления интегралов последние два равенства представляют собой систему двух связанных алгебраических уравнений для определения s_q и $s_{\dot{q}}$.

Пример 12.1. Пусть $L = \frac{d^2}{dt^2} + 2n\frac{d}{dt} + \omega_0^2$; $\varphi(q) = q^3$ (величина q имеет нормальный закон распределения вероятностей со средним значением, равным нулю, и дисперсией s^2); $f(t)$ — белый шум со спектральной плотностью $S_f(\omega) = k_0/(2\pi) = \text{const}$.

В соответствии с выражением для вычисления центральных моментов

$$\mu_n = \begin{cases} 0; \\ s^n (n-1)!! \end{cases}$$

получим

$$\langle \varphi^2(q) \rangle = \langle q^6 \rangle = 15s^6;$$

$$\langle q\varphi(q) \rangle = \langle q^4 \rangle = 3s^4.$$

Отсюда $k = \alpha s^2$. При использовании соотношения (12.3) имеем $\alpha = \sqrt{15}$, а при использовании (12.4) $\alpha = 3$. После вычислений из (12.5) найдем дисперсию

$$s^2 \approx \frac{k_0}{4n\omega_0^2} \left(1 - \frac{\alpha k_0}{4n\omega_0^4} \right). \quad (12.6)$$

Поправка на нелинейность системы определяется вторым слагаемым в (12.6).

Пример 12.2. При условиях примера 12.1 заменим белый шум на воздействие со спектральной плотностью

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2} k_0 \delta(|\omega| - \omega_*).$$

Подставив это выражение в (12.5) и вычислив интеграл, найдем, что дисперсия s^2 процесса $q(t)$ определяется из решения уравнения

$$s^2(\alpha s^2 + \omega_0^2 - \omega_*^2)^2 + 4\omega_*^2 s^2 - k_0 = 0, \quad (12.7)$$

с помощью которого в зависимости от соотношения параметров для s^2 можно получить одно действительное и два комплексных значения или три действительных. В первом случае решение задачи оказывается однозначным. Три решения $s_1^2 > s_2^2 > s_3^2$ во втором случае соответствуют двум устойчивым решениям (при s_1^2 и s_3^2) и одному (при s_2^2) неустойчивому решению, которое не реализуется. Выбор в пользу дисперсии s_1^2 или s_3^2 в рамках рассматриваемого решения поставленной задачи сделан быть не может. Итоговый результат зависит от истории нагружения: если выход на режим $\omega = \omega_*$ происходит с частоты $\omega < \omega_*$, то следует принять значение s_1^2 ; если с частоты $\omega > \omega_*$, то принимают значение s_3^2 .

Пример 12.3. Рассмотрим уравнение

$$L\{q(t)\} + C_1 \text{sign}(\dot{q}) + C_2 \text{sign}(q) = f(t),$$

где C_1, C_2 — параметры.

При линеаризации по критерию равенства дисперсий получим линейное уравнение

$$L\{q(t)\} + C_1 k_1 \dot{q} + C_2 k_2 q = f(t),$$

где $k_1 = 1/S_{\dot{q}}$; $k_2 = 1/S_q$.

Система уравнений для определения дисперсий процессов $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ имеет вид

$$s_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega) d\omega}{\left| L(i\omega) + \frac{C_1}{s_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{s_q} \right|^2};$$

$$s_{\dot{q}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 S_f(\omega) d\omega}{\left| L(i\omega) + \frac{C_1}{s_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{s_q} \right|^2}.$$

При $S_f(\omega) = \frac{1}{2} k_0 \delta(|\omega| - \omega_*)$ получим следующую систему алгебраических уравнений для определения s_q и $s_{\dot{q}}$:

$$s_q^2 = \frac{k_0}{\left| L(i\omega) + \frac{C_1}{s_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{s_q} \right|^2};$$

$$s_{\dot{q}}^2 = \frac{\omega_*^2 k_0}{\left| L(i\omega) + \frac{C_1}{s_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{s_q} \right|^2}.$$

Пример 12.4. Рассмотрим переходный режим случайных колебаний в системе, описываемой уравнением

$$\dot{q} + \varphi(q) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (12.8)$$

где $f(t)$ — белый шум с корреляционной функцией $K_f(\tau) = k_0 \delta(\tau)$.

Заменим уравнение (12.8) на линейное

$$\dot{q} + \alpha q = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (12.9)$$

с функцией Грина

$$g(t) = e^{-\alpha t},$$

где α — параметр, являющийся функцией от искомой дисперсии d ,

$$\alpha = \alpha(d).$$

Поскольку

$$d(t) = \langle q^2(t) \rangle,$$

имеем равенства

$$\dot{d}(t) = 2 \langle q \dot{q} \rangle = 2 \langle q(f - \alpha q) \rangle = 2 \langle qf \rangle - 2\alpha d, \quad (12.10)$$

где

$$\langle qf \rangle = \left\langle \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) f(t) d\tau \right\rangle = \int_0^t g(t-\tau) K_f(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} k_0.$$

Тогда уравнение (12.10) примет вид

$$\dot{d} + 2\alpha(d)d = k_0. \quad (12.11)$$

Таким образом, задача сведена к численному решению нелинейного дифференциального уравнения (12.11). Стационарное решение получим при $\dot{d} = 0$.

Если процесс $f(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_f(\tau) = K_f(0) e^{-\beta|\tau|},$$

то дифференциальное уравнение для определения дисперсии примет вид

$$\dot{d} + 2\alpha(d)d = \frac{2K_f(0)}{\alpha + \beta} (1 - e^{-(\alpha+\beta)t}). \quad (12.12)$$

Пример 12.5. Рассмотрим переходный режим случайных колебаний в системе, описываемой уравнением

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \varphi(q) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (12.13)$$

где $f(t)$ — белый шум с корреляционной функцией $K_f(\tau) = k_0 \delta(\tau)$.

Заменяв нелинейную функцию $\varphi(q)$ на линейную kq и введя новые переменные $x_1 = q$ и $x_2 = \dot{q}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -2nx_2 - kx_1 + f,\end{aligned}\tag{12.14}$$

где

$$\begin{aligned}k &= k(d_{11}); \quad d_{11} = \langle \dot{x}_1^2 \rangle; \quad \dot{d}_{11} = 2\langle x_1 \dot{x}_1 \rangle = 2\langle x_1 x_2 \rangle = 2d_{12}; \\ \dot{d}_{12} &= \langle x_1 \dot{x}_2 \rangle + \langle x_2 \dot{x}_1 \rangle = \langle x_1 (f - 2nx_2 - kx_1) \rangle + \langle x_2^2 \rangle = \\ &= d_{1f} - 2nd_{12} - kd_{11} + d_{22}; \\ d_{22} &= \langle x_2^2 \rangle; \quad d_{1f} = \left\langle \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) f(t) d\tau \right\rangle = \int_0^t g(t-\tau) K_f(t-\tau) d\tau = 0; \\ \dot{d}_{22} &= 2\langle (x_2 \dot{x}_2) \rangle = 2\langle x_2 (f - 2nx_2 - kx_1) \rangle = 2d_{2f} - 4nd_{22} - 2kd_{12}; \\ d_{2f} &= \int_0^t \dot{g}(t-\tau) K_f(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} k_0.\end{aligned}$$

Отсюда система уравнений для определения корреляционных моментов примет вид

$$\begin{aligned}\dot{d}_{11} - 2d_{12} &= 0; \\ \dot{d}_{12} + 2nd_{12} + kd_{11} - d_{22} &= 0; \\ \dot{d}_{22} + 4nd_{22} + 2kd_{12} &= k_0.\end{aligned}\tag{12.15}$$

Стационарное решение системы уравнений (12.14) получим при $\dot{d}_{11} = \dot{d}_{12} = \dot{d}_{22} = 0$. В этом случае $d_{12} = 0$; $kd_{11} = d_{22}$; $4nd_{22} = k_0$.

Искомую дисперсию определим из уравнения

$$4nkd_{11} = k_0.$$

Для линейной системы

$$k = \omega_0^2; \quad d_{11} = \frac{k_0}{4n\omega_0^2}.\tag{12.16}$$

Пример 12.6. Рассмотрим переходный режим случайных колебаний в системе, описываемой уравнением

$$\dot{q} = \begin{cases} \text{sign}(f - q) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}\tag{12.17}$$

где $f = f(t)$ — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $K_f(\tau) = D_{ff} e^{-\alpha|\tau|}$; D_{ff} — дисперсия; α — параметр.

Заменим нелинейную функцию $\text{sign}(f - q)$ на линейную $k(f - q)$ с коэффициентом линеаризации по критерию равенства дисперсий

$$k = 1 / \sqrt{D_{ff} - 2D_{qf} + D_{qq}},$$

где

$$D_{qq} = \langle q^2 \rangle; \quad D_{qf} = \langle qf \rangle.$$

Отсюда после преобразований получим следующую систему уравнений с белым шумом $f_0(t)$ на входе:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= k(f - q); \\ \dot{f} + \alpha f &= f_0. \end{aligned} \quad (12.18)$$

При интенсивности белого шума k_0 имеем

$$D_{ff} = k_0 / (2\alpha); \quad (12.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{qq} &= 2k \langle q(f - q) \rangle = 2k (D_{qf} - D_{qq}); \\ \dot{D}_{qf} &= \langle q\dot{f} \rangle + \langle \dot{q}f \rangle = -(k + \alpha) D_{qf} + k D_{ff}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Таким образом, после определения D_{qq} и D_{qf} с начальными условиями $D_{qq}(0) = D_{qf}(0) = 0$ получили систему двух связанных дифференциальных уравнений. Стационарное решение имеем при $\dot{D}_{qq} = \dot{D}_{qf} = 0$.

Пример 12.7. Рассмотрим колебания нелинейных механических систем при нестационарных случайных воздействиях, описываемых уравнением

$$L\{q(t)\} + P(q) = \begin{cases} f(t) = a(t)x(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (12.21)$$

где L — линейный дифференциальный оператор; $q(t)$ — перемещение в системе; $P(q)$, $a(t)$ — нелинейные неслучайные функции; $x(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением, амплитудным спектром $\Phi_x(\omega)$ и спектральной плотностью $S_x(\omega)$.

Основная задача состоит в определении дисперсии $s_q^2(t)$ нестационарного процесса $q(t)$.

Примем метод статистической линеаризации и заменим функцию $P(q)$ на линейную kq , где параметр линеаризации $k = k(s_q^2(t))$ зависит от искомой дисперсии $s_q^2(t)$ и используемого критерия линеаризации.

Уравнение (12.21) примет вид

$$L\{q(t)\} + kq = \begin{cases} a(t)x(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (12.22)$$

Стационарный процесс $x(t)$ можем представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (12.23)$$

Для нестационарного процесса $f(t)$ имеем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) \varphi(\omega, t) d\omega, \quad (12.24)$$

где в соответствии с (12.22) координатную функцию процесса $f(t)$ определим как

$$\varphi(\omega, t) = a(t)e^{i\omega t}. \quad (12.25)$$

Решение уравнения (12.22) найдем в виде

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) \psi(\omega, t) d\omega, \quad (12.26)$$

где $\psi(\omega, t)$ — координатная функция процесса $q(t)$, которую необходимо определить.

Подставив (12.24) и (12.26) в (12.22), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) (L + k) \{\psi(\omega, t)\} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) a(t) e^{i\omega t} d\omega. \quad (12.27)$$

Тогда для нахождения функции $\psi(\omega, t)$ имеем дифференциальное уравнение

$$(L + k) \{\psi(\omega, t)\} = a(t) e^{i\omega t} \quad (12.28)$$

с начальными условиями $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = \dots = \psi^{(n-1)}(0) = 0$.

В соответствии с (12.26) корреляционную функцию процесса $q(t)$ определим как

$$\begin{aligned} K_q(t_1, t_2) &= \langle q^*(t_1) q(t_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Phi_x^*(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \rangle \psi^*(\omega_1, t_1) \psi(\omega_2, t_2) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Поскольку амплитудные спектры стационарных процессов стохастически ортогональны, т. е.

$$\langle \Phi_x^*(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \rangle = S_x(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (12.30)$$

соотношение (12.29) примет вид

$$K_q(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \psi^*(\omega, t_1) \psi(\omega, t_2) d\omega. \quad (12.31)$$

Отсюда при $t_1 = t_2 = t$ получим выражение для определения искомой дисперсии:

$$s_q^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |\psi(\omega, t)|^2 d\omega. \quad (12.32)$$

Уравнения (12.28) и (12.32) представляют собой связанную систему уравнений для определения функций $s_q^2(t)$ и $\psi(\omega, t)$. Для ее решения целесообразно использовать метод последовательных приближений. Так, первое приближение $\psi_1(\omega, t)$ для функции $\psi(\omega, t)$ получим из уравнения (12.28) при $k = k_1 = 0$. Подставив $\psi_1(\omega, t)$ в (12.32), найдем первое приближение $s_{q_1}^2(t)$ для искомой дисперсии $s_q(t)$. Подставив новое значение коэффициента линеаризации $k_2 = k_2(s_{q_1}^2)$ в (12.28), получим уравнение для определения второго приближения $\psi_2(\omega, t)$ для функции $\psi(\omega, t)$. Подставив $\psi_2(\omega, t)$ в (12.32), найдем второе приближение $s_{q_2}^2(t)$ для искомой дисперсии $s_q^2(t)$. Вычисления выполняем до достижения требуемой точности расчета.

При $L = \frac{d}{dt} + \alpha$ и $a(t) = e^{-\mu t}$ (где α, μ — параметры) уравнение (12.28) примет вид

$$\dot{\psi} + (k + \alpha)\psi = e^{(i\omega - \mu)t}; \quad \psi(0) = 0. \quad (12.33)$$

Первое приближение $\psi_1(\omega, t)$ для функции $\psi(\omega, t)$ получим из (12.33) при $k = k_1 = 0$:

$$\psi_1(\omega, t) = \frac{1}{\alpha - \mu + i\omega} (e^{(i\omega - \mu)t} - e^{-\alpha t}); \quad (12.34)$$

$$|\psi_1(\omega, t)|^2 = \frac{1}{(\alpha - \mu)^2 + \omega^2} (e^{-2\mu t} + e^{-2\alpha t} - 2e^{-(\mu + \alpha)t} \cos \omega t). \quad (12.35)$$

Подставив (12.36) в (12.28), получим дифференциальное уравнение для определения второго приближения для функции $\psi(\omega, t)$. Вид этого уравнения зависит от вида нелинейности и способа линеаризации. Так, при $P(q) = q^3$ и критерии минимума среднего квадратического отклонения имеем $k = \sqrt{15}s_{q_1}^2$.

В этом случае уравнение (12.28) примет вид

$$\dot{\psi}_2 + (\alpha + \sqrt{15}s_{q_1}^2(t))\psi_2 = e^{(i\omega - \mu)t}; \quad \psi_2(0) = 0.$$

Подставив $\psi_2(t)$ в формулу (12.32), найдем второе приближение для искомой дисперсии. Выполняя такие вычисления, можем найти искомую дисперсию с заданной точностью.

Особенности расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы рассмотрим на примере системы, описываемой уравнением

$$L(p)\vec{q}(t) + \vec{\phi}(\vec{q}) = \vec{f}(t), \quad (12.36)$$

где $L(p)$ — матрица линейных дифференциальных операторов; $\vec{\phi}(\vec{q})$ — нелинейная вектор-функция сил сопротивления; $\vec{f}(t)$ — векторный гауссовский стационарный процесс с нулевым средним значением.

Процесс $q(t)$ будем считать гауссовским, для которого в результате решения задачи должна быть определена матрица корреляционных функций $K_{\vec{q}}(\tau)$ или матрица соответствующих спектральных плотностей $S_{\vec{q}}(\omega)$.

Применим к уравнению (12.36) метод статистической линейизации и заменим в нем нелинейную функцию $\bar{\varphi}(\bar{q})$ на линейную $\bar{\varphi}_0(\bar{q}) = C\bar{q}$, где матрица коэффициентов линейизации C можно найти по какому-либо критерию, определяющему близость векторов $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}_0$. В качестве такого критерия примем минимум среднего квадратического отклонения, выраженного как

$$\langle (\bar{\varphi} - C\bar{q})^T (\bar{\varphi} - C\bar{q}) \rangle = \langle \bar{\varphi}^T \bar{\varphi} - \bar{q}^T C^T \bar{\varphi} - \bar{\varphi}^T C \bar{q} + \bar{q}^T C^T C \bar{q} \rangle \rightarrow \min \dots \quad (12.37)$$

При реализации критерия (12.37) используем следующие правила вычисления производных от матричных выражений по матрице:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dC}(ABC) &= (BA)^T; \\ \frac{d}{dC}(AC^T B) &= BA; \\ \frac{d}{dC}(AC^T CD) &= CDA + CA^T D^T. \end{aligned} \quad (12.38)$$

Из соотношений (12.37) и (12.38) следует, что

$$C = \langle \bar{\varphi} \bar{q}^T \rangle \langle \bar{q} \bar{q}^T \rangle^{-1} = [c_{kj}(\overline{q_1 q_1}, \overline{q_1 q_2}, \dots, \overline{q_k q_j}, \dots, \overline{q_n q_n})]. \quad (12.39)$$

Равенство (12.39) означает, что элементы матрицы C выражаются через корреляционные моменты вектора $\bar{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$. Эти моменты, в свою очередь, могут быть определены по спектральным плотностям $S_{q_k q_j}(\omega)$ процесса $\bar{q}(t)$:

$$\langle q_k q_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_k q_j}(\omega) d\omega. \quad (12.40)$$

Заменим уравнение (12.36) на линейризованное уравнение

$$[L(p) + C]\bar{q}(t) = \bar{f}(t) \quad (12.41)$$

с матрицей передаточных функций

$$[H(i\omega)] = [L(i\omega) + C^{-1}] = [H_{kj}(i\omega)]. \quad (12.42)$$

Тогда в соответствии с (12.40) и выражением для определения элементов матрицы спектральных плотностей

$$S_{q_i q_j}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n H_{i\alpha}(-i\omega_1) H_{j\beta}(i\omega_2) S_{f_{\alpha\beta}}(\omega)$$

получим следующую систему уравнений для определения элементов матрицы корреляционных моментов вектора \bar{q} :

$$\langle q_k q_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left[L_{k\alpha}^*(i\omega) + C_{k\alpha}(q_1 q_1, q_1 q_2, \dots, q_k q_j, \dots, q_n q_n) \right]^{-1} \times \\ \times \left[L_{j\beta}(i\omega) + C_{j\beta}(q_1 q_1, q_1 q_2, \dots, q_k q_j, \dots, q_n q_n) \right]^{-1} S_{f_{\alpha} f_{\beta}}(\omega) d\omega, \quad (12.43)$$

где $S_{f_{\alpha} f_{\beta}}(\omega)$ — элементы матрицы спектральных плотностей вектора воздействий $\vec{f}(t)$.

Вычислив из системы уравнений (12.42) корреляционные моменты вектора \vec{q} и подставив их значения в (12.39), получим матрицу коэффициентов линеаризации C . Теперь из решения линейного уравнения (12.41) можем найти матрицы корреляционных функций и спектральных плотностей искомого процесса $\vec{q}(t)$.

Пример 12.8. Функционирование механической системы описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} + \text{sign}(x) = f(t),$$

где $f(t)$ — белый шум интенсивностью k_0 .

Требуется определить плотность распределения вероятностей и дисперсию процесса $x(t)$ методом марковских процессов и методом статистической линеаризации.

По методу марковских процессов получим для x распределение Лапласа с плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{k_0} \exp\left(-\frac{2}{k_0}|x|\right)$$

и дисперсией

$$s_x^2 = \frac{k_0^2}{2}.$$

По методу статистической линеаризации процесс $\text{sign}(x(t))$ представим в виде $\alpha x(t)$, где $\alpha = \frac{1}{s_x}$.

Плотность вероятностей для x будет гауссовского вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right)$$

с дисперсией

$$s_x^2 = \frac{k_0}{2\alpha}.$$

Таким образом, полученные результаты не совпадают.

Лекция 13

Расчеты на прочность при случайных воздействиях и случайных характеристиках прочности

Рассмотрим задачу по определению запаса прочности конструкций и деталей машин при случайных воздействиях на них и случайных характеристиках их прочности.

Поток случайных воздействий $x(t): x_1, x_2, x_3, \dots$ (рис. 13.1) задается интегральной функцией распределения вероятностей $F_1(x)$ или соответствующей плотностью вероятностей $f_1(x)$ и числом воздействий n . Наибольшее в выборке объема n из возможных воздействий в интервале $(0, n)$ обозначим $x^*(n)$.

Характеристика прочности x задается интегральной функцией распределения вероятностей $F_2(x)$ или соответствующей плотностью вероятности $f_2(x)$ и числом изготовленных однотипных изделий m . Наименьшее в выборке объемом n из возможных характеристик прочности в этих изделиях обозначим $x_*(m)$.

Суть расчетов элементов конструкций на прочность заключается в сопоставлении возникающих в них напряжений с их прочностными возможностями. При этом под коэффициентом запаса прочности следует понимать отношение минимального значения прочности к максимально возможным напряжениям, т. е. число

$$N = x_*(m) / x^*(n). \quad (13.1)$$

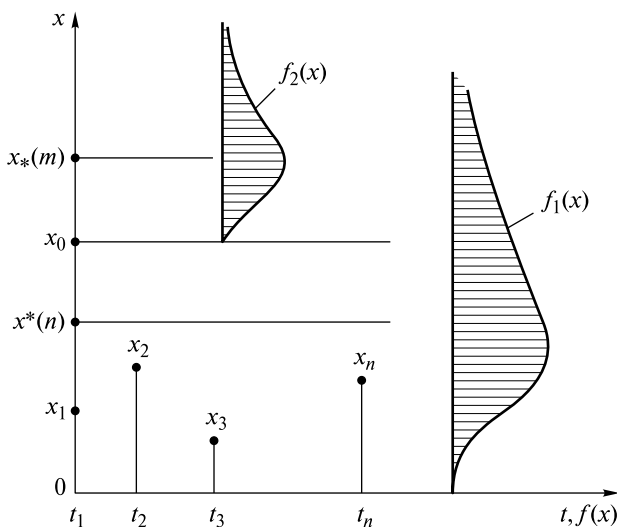


Рис. 13.1

Задача состоит в определении этого числа.

В соответствии с теоремой о произведении вероятностей функцию распределения вероятностей для наибольшего из возможных воздействий определим как

$$F^*(x) = F^n(x). \quad (13.2)$$

Непосредственно использовать в расчетах формулу (13.2) затруднительно, поэтому перейдем к ее асимптотической оценке при $n \rightarrow \infty$. Для этого введем в формулу (13.2) величину $z = n(1 - F(x))$ и вычислим при большом n

$$F(x) = 1 - \frac{z}{n};$$

$$F^*(x) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = e^{-z} = \exp(-n(1 - F(x))). \quad (13.3)$$

В отличие от (13.2) в формуле (13.3) параметр n — не степень, а множитель, что позволяет эффективно проводить расчеты.

Если для описания вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 - \exp(-\beta_1 x^{\alpha_1}) & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

то получим формулу с двойной экспонентой:

$$F^*(x) = \exp(-n \exp(-\beta_1 x^{\alpha_1})) \approx \begin{cases} 0 & \text{при } x < x^*; \\ 1 - n \exp(-\beta_1 x^{\alpha_1}) & \text{при } x \geq x^*, \end{cases}$$

где наиболее вероятное значение для максимально возможного x

$$x^*(n) \approx \left(\frac{1}{\beta} \ln(n)\right)^{1/\alpha_1}. \quad (13.4)$$

Для определения рассеяния минимального значения прочности для m изделий имеем функцию распределения вероятностей

$$F_*(x) = 1 - (1 - F(x))^m. \quad (13.5)$$

Введем в рассмотрение величину $z = mF(x)$ и вычислим при большом m

$$F(x) = \frac{z}{m}. \quad (13.6)$$

Если рассеяние характеристики прочности описывается трехпараметрическим законом распределения вероятностей Вейбулла с гарантированным значением x_0 и параметрами α_2 и β_2

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_0; \\ 1 - \exp(-\beta_2 (x - x_0)^{\alpha_2}) & \text{при } x \geq x_0, \end{cases} \quad (13.7)$$

то, подставив (13.7) в (13.5), найдем

$$F_*(x) = 1 - \exp(-m\beta_2(x - x_0)^{\alpha_2}). \quad (13.8)$$

При этом ожидаемое минимальное значение прочности

$$x_* = x_0 + (m\beta_2)^{-1/\alpha_2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha_2}\right), \quad (13.9)$$

где $\Gamma()$ — гамма-функция

При $m \rightarrow \infty$ имеем $x_*(m) \rightarrow x_0$.

Для определения искомого коэффициента запаса прочности получим формулу

$$N = \frac{x_0 + (m\beta_2)^{-1/\alpha_2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha_2}\right)}{\left(\frac{1}{\beta_1} \ln n\right)^{-1/\alpha_2}}. \quad (13.10)$$

В качестве примера рассмотрим элемент конструкции, нагружение которого описывается гауссовским стационарным процессом со стандартным отклонением s , рэлеевской функцией распределения вероятностей для его максимумов со средним значением $s\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25S$. Прочность этого элемента оценим в $5S$. Таким образом, коэффициент запаса прочности будет $N = 5 : 1,25 = 4$. Вероятность разрушения при одном случайном разрушении составит $P = e^{-12,5}$, т. е. будет настолько малой, что ею можно пренебречь.

В рассматриваемом случае коэффициент запаса прочности при n воздействиях определим по формуле

$$N = \frac{5}{\sqrt{2 \ln n}}.$$

При $n = 10$ имеем $N = 2,31$, при $n = 100$ $N = 1,66$, при $n = 1000$ $N = 1,35$, при $n = 10000$ $N = 1,18$, при $n \rightarrow \infty$ $N \rightarrow 0$, т. е. при возрастании числа нагружений коэффициент запаса прочности уменьшается. Это обусловлено вероятностным характером воздействий и отражает известный факт, что при случайных нагрузках вероятность разрушения постепенно возрастает.

Функцию распределения вероятностей для наибольшего в интервале времени $(0, t)$ максимума случайного процесса с просто структурой при $k = 1$ (т. е. абсолютного максимума) можем вычислить в предположении статистической независимости максимумов по формуле произведения вероятностей:

$$F_*(x, t) = (F_M(x))^{n(t)};$$

где ориентировочное значение числа максимумов за время t

$$n(t) \approx n(t) = \frac{t}{2\pi} \omega_0;$$

$$F_M(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right).$$

Введем в рассмотрение величину

$$z = n(t)(1 - F_M(x)).$$

Получим

$$F_*(x, t) = \left(1 - \frac{z}{n(t)}\right)^{n(t)} \rightarrow e^{-z} = \exp\{-n(t)(1 - F_M(x))\} = \exp\left\{-n(t)\exp\left(-\frac{x^2}{2S_x^2}\right)\right\}.$$

Ориентировочное среднее значение абсолютного максимума в интервале времени $(0, t)$ вычислим как

$$x_*(t) \approx s_x \sqrt{2 \ln n(t)}.$$

При $n = 100$ имеем $x \approx 3s_x$, при $n = 1000$ $x \approx 3,7s_x$, при $n = 10000$ $x \approx 4,3s_x$.

Пример 13.1. Пусть система состоит из двух элементов, риск ее использования определяется как

$$R = R_1 + R_2,$$

где R — заданное нормированное значение риска для системы; R_1, R_2 — риски для элементов 1 и 2.

Требуется оптимальным образом перераспределить риски по элементам, если известно, что стоимость изготовления элемента 2 в a раз больше стоимости изготовления элемента 1.

Общую стоимость изготовления системы с точностью до постоянного множителя представим в виде

$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{a}{R_2}.$$

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа с неопределенным множителем λ :

$$F(R_1, R_2, \lambda) = \frac{1}{R_1} + \frac{a}{R_2} - \lambda(R - R_1 - R_2).$$

Оптимальные значения для R_1, R_2 и λ вычислим из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2} + \lambda = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial R_2} = -\frac{a}{R_2^2} + \lambda = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = R - R_1 - R_2 = 0.$$

Из решения этой системы уравнений следует, что чем больше значение a , тем бóльшую долю общего риска необходимо переложить на элемент 2 (более дорогостоящий в изготовлении). В частности, при $a = 1$ имеем $R_1 = R_2 = 0,5R$; при $a = 2$ $R_1 = 0,41R, R_2 = 0,59R$; при $a = 10$ $R_1 = 0,24R, R_2 = 0,76R$.

Лекция 14

Определение асимптотических распределений вероятностей для крайних значений статистической выборки

Предположим, что при получении повторной выборки случайной величины x ее крайние значения x_1 и x_n имеют вероятностное рассеяние, которое подлежит определению в зависимости от исходной информации о функции $F(x)$, плотности вероятностей $f(x)$ для x и числа выборок n (рис. 14.1).

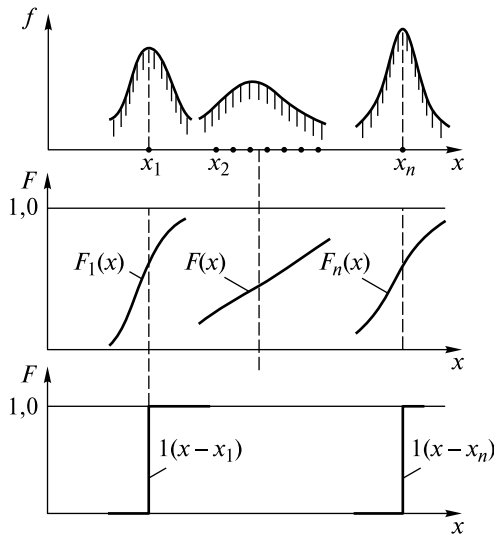


Рис. 14.1

Например, имеем:

первую выборку $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$;

вторую выборку $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$;

..... ;

n -ю выборку $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$.

Задача состоит в нахождении законов распределения вероятностей для наименьших $x_1 = \inf(x)$ и наибольших $x_n = \sup(x)$ значений величины x .

Функцию распределения вероятностей для x_1 при n независимых испытаниях вычислим по формуле

$$F_1(x) = 1 - (1 - F(x))^n. \quad (14.1)$$

Введем в рассмотрение величину

$$z = nF(x).$$

При большом n получим

$$F_1(x) = 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = 1 - e^{-z} = 1 - \exp(-nF(x)). \quad (14.2)$$

Пусть величина x описывается функцией распределения вероятностей Вейбулла

$$F(x) = 1 - \exp(-\beta x^\alpha), \quad (14.3)$$

где α, β — параметры.

Подставив (14.3) в (14.2), найдем

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 - \exp(-n(1 - \exp(-\beta x^\alpha))) \approx \\ &\approx \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq x_* \\ 1 - \exp(-n\beta x^\alpha) & \text{при } x \leq x_* \end{cases} \approx 1(x - x_*), \end{aligned} \quad (14.4)$$

где величина x_* определяется из уравнения

$$1 - \exp(-n\beta x^\alpha) \approx -n\beta x^\alpha \approx 1 - n\beta x^\alpha = 0.$$

Отсюда

$$x_* = n\beta^{-1/\alpha}. \quad (14.5)$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем $x_* \rightarrow 0$.

Функцию распределения вероятностей для максимальных значений выборки определим как

$$F_n(x) = F^n(x). \quad (14.6)$$

Введем в рассмотрение величину

$$z = n(1 - F(x)).$$

При большом n получим

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = e^{-z} = \exp(-n(1 - F(x))). \quad (14.7)$$

Если величина x имеет распределение вероятностей Вейбулла (14.3), то

$$F_n(x) = \exp(-n(1 - \beta x^\alpha)) \approx \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_{**} \\ 1 - \exp(-n\beta x^\alpha) & \text{при } x \geq x_{**} \end{cases} \approx 1(x - x_{**}),$$

где $1(x - x_{**})$ — единичная функция Хевисайда; величина x_{**} определяется из уравнения

$$1 - n \exp(-n\beta x_{**}^\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$x_{**} = \left(\frac{1}{\beta} \ln n \right)^{1/\alpha}. \quad (14.8)$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем $x_{**} \rightarrow \infty$.

Из соотношений (14.4) и (14.8) следует, что плотности распределения вероятностей для величин x_1 и x_n имеют вид дельта-функций

$$f_1(x) = \delta(x - x_*); \quad f_n(x) = \delta(x - x_{**}).$$

Далее применим полученные результаты для оценки прочности партии из $n_1 = 100$ однотипных элементов, подвергаемых потоку из $n_2 = 100 \dots 10000$ воздействий с напряжениями, имеющими распределение вероятностей Рэлея

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2s^2}\right),$$

где s^2 — заданная дисперсия напряжений.

В расчетах примем, что предел прочности следует распределению вероятности Вейбулла

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left(\frac{\sigma_B - \sigma_0}{\sigma_C}\right)^4,$$

где σ_0 , σ_C — заданные параметры.

Результаты расчета представим в виде истинного коэффициента запаса прочности:

$$n = \frac{\inf(\sigma_B)}{\sup(\sigma)}.$$

Лекция 15

Статистическая оптимизация параметров виброзащитных систем

При создании систем виброзащиты мобильных машин и конструкций возникает задача по выбору для них упругого элемента оптимальной жесткости. При этом учитывается, что требования к такому выбору противоречивы: для уменьшения абсолютного ускорения объекта виброзащиты требуется как можно меньшая жесткость упругого элемента, а для уменьшения его деформации — как можно бóльшая.

Рассмотрим нелинейную механическую систему виброзащиты объекта массой m от кинематического случайного возмущения $h(t)$, заданного спектральной плотностью $S_h(\omega)$ (рис. 15.1).

Обозначим: $Y(t)$ — абсолютное перемещение объекта виброзащиты; $\ddot{Y}(t) = \alpha(t)$ — абсолютное ускорение объекта; $\dot{h}(t) = \alpha_0(t)$ — ускорение кинематического воздействия $h(t)$ со спектральной плотностью $S_{\alpha_0}(\omega)$; $u(t) = h(t) - Y(t)$ — деформация упругого элемента; $\varphi(u) = cu + \mu u^3$ — силовая характеристика упругого элемента с параметрами c и μ ; b — коэффициент демпфирования.

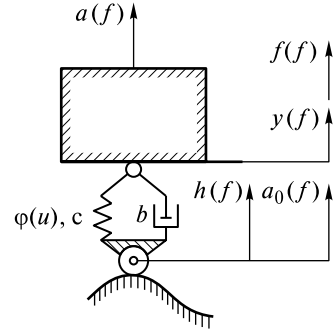


Рис. 15.1

Нелинейную характеристику упругого элемента линеаризуем по методу минимума среднего квадратического отклонения и представим в виде (рис. 15.2)

$$\varphi(u) = ku, \quad (15.1)$$

где $k = c + 3\mu s_u^2$ — коэффициент линеаризации; s_u^2 — дисперсия процесса $u(t)$.

Из условия динамического равновесия объекта виброзащиты получим следующие два дифференциальных соотношения для определения функций $u(t)$ и $\alpha(t)$:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = -\alpha_0(t); \quad (15.2)$$

$$\alpha(t) = 2n\dot{u} + \omega_0^2 u, \quad (15.3)$$

где $\omega_0^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$; $\omega_1^2 = C/m$; $\omega_2^2 = 3\mu / (mS_u^2)$; $2n = b/m$.

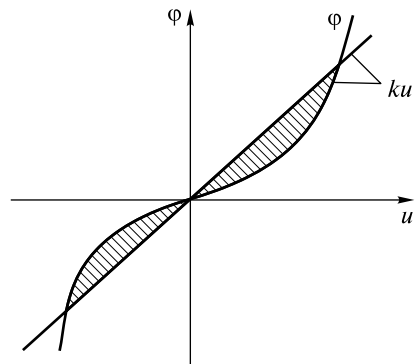


Рис. 15.2

В соответствии с уравнениями (15.2) и (15.3) передаточные функции от $\alpha_0(t)$, $u(t)$ и $k\alpha(t)$ определим по формулам

$$H_u(i\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^0 + 2ni\omega};$$

$$H_\alpha(i\omega) = \frac{2ni\omega + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^0 + 2ni\omega}.$$

С учетом фильтрующих свойств динамической системы пропускать в основном воздействия с частотой собственных колебаний и возможностью вследствие этого представлять эти воздействия в виде эквивалентных белых шумов получим для определения дисперсий s_u^2 и s_α^2 процессов $u(t)$ и $\alpha(t)$ следующие соотношения:

$$s_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_u(i\omega)|^2 S_{a_0}(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2n\omega_0^2} S_{a_0}(\omega); \quad (15.4)$$

$$s_\alpha^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_\alpha(i\omega)|^2 S_{a_0}(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2n} \omega_0^2 S_{a_0}(\omega). \quad (15.5)$$

Из (15.4) для определения s_u^2 получим уравнение

$$\frac{3\mu}{m} s_u^4 + \frac{C}{m} s_u^2 = \frac{\pi}{2n} S_{a_0}(\omega), \quad (15.6)$$

из (15.5) для определения s_α^2 — выражение

$$s_\alpha^2 = \frac{\pi}{2n} \left(\frac{C}{m} + \frac{3\mu}{m} s_u^2 \right) S_{a_0}(\omega), \quad (15.7)$$

в которое входит s_u^2 из уравнения (15.6).

Зависимости дисперсий $s_u^2(\omega_1)$ и $s_\alpha^2(\omega_1)$ процессов $u(t)$ и $\alpha(t)$ обусловлены частотой ω_1 (т. е. жесткостью c) при $\mu = 0$ и $\mu > 0$ и имеют вид, показанный на рис. 15.3

На рис. 15.3 видно, что требования к системе виброзащиты по жесткости противоречивы: при увеличении жесткости ускорение объекта виброзащиты возрастает, а деформация упругого элемента уменьшается; при ее уменьшении ускорение уменьшается, а деформация упругого элемента возрастает.

Нахождение оптимальной жесткости усложняется тем, что требования к системе виброзащиты формулируются в различных единицах измерения: по перемещениям $u(t)$ — в единицах длины, а по ускорениям — в единицах ускорения.

Определив оптимальную частоту $\tilde{\omega}_1^*$ из условия ограничения ускорения $\alpha \leq \alpha_*$, получим значение u^* . Определив оптимальную частоту $\tilde{\omega}_1^{**}$ из условия ограничения деформации упругого элемента $u \leq u_*$, получим α_* .

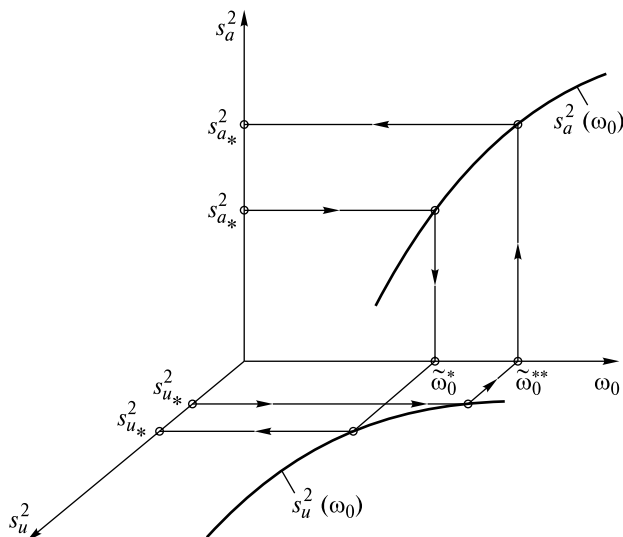


Рис. 15.3

Дальнейшее решение задачи связано с нахождением ускорения $\ddot{h}(t)$. Однако в большом числе случаев этой функции формально не существует, а воздействие $h(t)$ имеет вид недифференцируемой функции

$$S_h(\omega) = \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (15.8)$$

где S_h , α , β — параметры.

Это затруднение устраняется применением к траекториям случайных процессов операции статистического сглаживания.

Применим эту операцию к соотношению (15.8).

Спектральную плотность первой производной процесса $h(t)$ представим в виде

$$S_{\dot{h}}(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} S_h^2 \Phi_h(\omega) \Phi_h^*(\omega),$$

где $\Phi_h(\omega)$, $\Phi_h^*(\omega)$ — квазиспектры,

$$\Phi_h(\omega) = \frac{\omega^2 + i\omega\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha i\omega};$$

$$\Phi_h^*(\omega) = \frac{\omega^2 - i\omega\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha i\omega}.$$

Здесь «*» — переход к комплексно-сопряженным функциям.

Спектральную плотность сглаженного процесса $\tilde{h}(t)$ найдем в виде

$$\tilde{S}_h(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\Phi_h(\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi_h(\omega) \right) \left(\Phi_h^*(\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi_h^*(\omega) \right) = (\alpha^2 + \beta^2) S_h(\omega).$$

Его дисперсию и среднюю частоту определим по формулам

$$s_h^2 = (\alpha^2 + \beta^2) s_h^2;$$

$$\omega_h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Для нахождения сглаженной второй производной получим выражение

$$\tilde{S}_h(\omega) = S_{a_0}(\omega) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 S_h(\omega).$$

В соответствии с (15.4) и (15.5) имеем

$$s_u^2 = \frac{\pi(\alpha^2 + \beta^2)^2}{2n\omega_1^2} S_h(\omega_0); \quad (15.9)$$

$$s_a^2 = \frac{\pi}{2n} (\omega_0^2 + 4n^2) (\alpha^2 + \beta^2)^2 S_h(\omega_0). \quad (15.10)$$

Из соотношений (15.9) и (15.10) вновь следует, что увеличение жесткости системы виброзащиты приводит к возрастанию ускорения объекта и уменьшению деформации ее упругого элемента. Эти соотношения используются в расчетах так же, как и формулы (15.4)–(15.7).

Лекция 16

Нестационарные системы со случайными параметрическими и силовыми воздействиями

Рассмотрим механическую систему, функционирование которой описывается уравнением

$$\dot{q} + \alpha(t)q = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (16.1)$$

где $\alpha(t)$ — случайная параметрическая характеристика системы; $q = q(t)$ — обобщенная координата системы на момент времени t , $f(t)$ — случайное внешнее воздействие на систему; $\alpha(t)$ и $f(t)$ считаются гауссовскими стационарными центрированными случайными процессами и заданы своими корреляционными функциями или энергетическими спектрами; $t = 0$ — гауссовский момент начала внешнего воздействия.

Задача состоит в определении корреляционной функции или энергетического спектра и дисперсии процесса $q(t)$. Аналогично (16.1) можно рассмотреть уравнение общего вида

$$L\{q\} = f(t) \quad (16.2)$$

с линейным дифференциальным оператором L любого порядка $n > 1$ и случайными параметрическими и силовыми воздействиями — функциями времени.

Функция Грина $g(t, t_0)$ для уравнения (16.1) определяется из решения уравнения

$$\dot{g} + \alpha(t)g = \delta(t), \quad (16.3)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, с нулевым начальным условием.

Из (16.3) следует, что

$$g(t, \tau) = \exp\left(-\int_{\tau}^t \alpha(\tau) d\tau\right). \quad (16.4)$$

Решение уравнения (16.1) получим в виде интеграла Дюамеля

$$q(t) = \int_0^t g(\tau, t_0) f(\tau) d\tau \quad (16.5)$$

Из (16.5) следует, что амплитуду нестационарной реакции на внезапно приложенное гармоническое воздействие $e^{i\omega t}$ (передаточную функцию для уравнения (16.1)) можем определить как преобразование Фурье от функции Грина:

$$H(i\omega, t) = \int_0^t g(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (16.6)$$

Спектральную плотность нестационарного процесса $q(t)$ вычислим по формуле Винера — Хинчина:

$$S_q(w, t) = |H(iw, t)|^2 S_f(w), \quad (16.7)$$

где $S_f(w)$ — спектральная плотность стационарного внешнего воздействия $f(t)$.

Искомая дисперсия процесса $q(t)$ имеет вид

$$s_q^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(w, t) dw. \quad (16.8)$$

Таким образом, задача сведена к вычислению интеграла (16.8). Однако проблема в том, что важно иметь аналитические выражения для функции $\alpha(t)$ и найти соответствующее решение уравнения типа (16.3) при $n > 1$ для уравнения (16.2).

Другой способ решения поставленной задачи состоит в следующем. Из соотношения (16.5) для моментов времени t_1 и t_2 имеем равенства

$$\begin{aligned} q(t_1) &= \int_0^{t_1} g(t_1, \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1; \\ q(t_2) &= \int_0^{t_2} g(t_2, \tau_2) f(\tau_2) d\tau_2. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Усреднив произведение функций (16.9), получим корреляционную функцию процесса $q(t)$

$$\begin{aligned} K_q(t_1, t_2) &= \langle q(t_1)q(t_2) \rangle = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g(t_1, \tau_1) g(t_2, \tau_2) f(\tau_1) f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_f(\tau_1 - \tau_2) \exp[-x(t_1, \tau_1)] \exp[-x(t_2, \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (16.10)$$

где

$$x(t_1, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t_1} \alpha(\tau) d\tau; \quad x(t_2, \tau_2) = \int_{\tau_2}^{t_2} \alpha(\tau) d\tau;$$

$\langle \dots \rangle$ — оператор усреднения; $K_f(\tau_1 - \tau_2)$ — заданная корреляционная функция процесса $f(t)$.

При белом шуме интенсивностью k_0 на входе найдем

$$K_f(\tau_1 - \tau_2) = k_0 \delta(\tau_1 - \tau_2); \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau; \quad (16.11)$$

$$s_q^2(t_1) = K_q(t_1, t_2) = k_0 \int_0^{t_1} \exp(-2x(t_1, \tau)) d\tau = k_0 \int_0^{t_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} f(x) dx \right) d\tau, \quad (16.12)$$

где $f(x)$ — гауссовская плотность распределения вероятностей с нулевой средней и переменной дисперсией $s_x^2(t, \tau)$.

Для нахождения дисперсии введем в рассмотрение корреляционную функцию процесса $x(t, \tau)$

$$K_x(t_1, t_2, \tau) = \int_{\tau}^{t_1} \int_{\tau}^{t_2} \alpha(\tau_1), \alpha(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \int_{\tau}^{t_1} \int_{\tau}^{t_2} K_\alpha(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (16.13)$$

где $K_\alpha(\tau_1 - \tau_2)$ — заданная корреляционная функция процесса $\alpha(t)$.

Для вычисления интеграла (16.13) введем новые переменные $\tau = (\tau_1 - \tau_2)$ и $\varepsilon = \tau_1$. Получим

$$d\tau_1 d\tau_2 = I d\tau d\varepsilon,$$

где $I = 2$ — якобиан преобразования, и

$$s_x(t, \tau) = 2 \int_{\tau}^t K_\alpha(z) \int_{\tau}^{t-\tau} d\varepsilon dz = 2 \int_{\tau}^t (t - \tau) K_\alpha(z) dz \approx 2(t - \tau) \int_{\tau}^t K_\alpha(z) dz. \quad (16.14)$$

При $K_\alpha(\tau) = k_0 \delta(\tau)$ имеем $s_x(t, \tau) = k_0(t - \tau)$.

При $K_\alpha(\tau) = s_\alpha^2 e^{-\beta\tau}$ имеем $s_x(t, \tau) = \frac{t - \tau}{\beta} s_\alpha^2 (e^{-\beta\tau} - e^{-\beta t})$.

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к вычислению интеграла (16.14), и ее можно считать решенной.

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (16.1) параметр

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t), \quad (16.15)$$

где $\alpha_0 = \text{const}$; $\alpha_1(t)$ — малая случайная флуктуация процесса $\alpha(t)$.

В этом случае решение уравнения (16.1) можно найти в виде

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t), \quad (16.16)$$

где $q_0(t)$ — решение уравнения (16.1) при $\alpha_1 = 0$; $q_1(t)$ — малая случайная флуктуация процесса $q(t)$.

Подставив выражения (16.15) и (16.16) в уравнение (16.1) и приняв произведение двух малых функций $\alpha_1 q_1 = 0$, придем к следующей системе двух уравнений для определения функций $q_0(t)$ и $q_1(t)$ при $t \geq 0$:

$$\dot{q}_0 + \alpha_0 q_0 = f(t); \quad (16.17)$$

$$\dot{q}_1 + \alpha_0 q_1 = \alpha_1 q_0 = f_1(t). \quad (16.18)$$

Определив из уравнения (16.17) функцию $q_0(t)$ и подставив ее в уравнения (16.18) и (16.16), стандартными методами статистической динамики можем решить поставленную задачу.

Литература

- Биргер И.А.* Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978.
- Болотин В.В.* Вибрации в технике: справочник: Т. 1: Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1999.
- Болотин В.В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971.
- Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение.
- Васильев В.И.* Распознающие системы. Киев: Наук. думка, 1969.
- Гусев А.С.* Введение в динамику машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
- Гусев А.С.* Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.
- Гусев А.С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. М.: Машиностроение, 1989.
- Гусев А.С.* Теоретические основы расчетов на сопротивление усталости. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
- Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1984.
- Гусев А.С., Стародубцева С.А.* Случайные колебания стержней, частично погруженных в жидкость // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. № 2. 2016.
- Крылов Ю.М., Стрекалов С.С., Цыплухин В.Ф.* Ветровые волны и их воздействия на сооружения. Л.: Гидрометеоздат, 1976.
- Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1989.
- Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983.
- Свежников А.А., Рыбкин С.С.* Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1974.
- Тихонов А.Н.* О задачах с неточной заданной исходной информации // ДАН СССР. 1985. Т. 280, № 3. С. 559–562.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.А.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
- Случайные колебания стержней, частично погруженных в жидкость / А.С. Гусев, Ю.В. Григорьев, С.А. Стародубцева, В.Ф. Фомичева // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 2. DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2.

Содержание

Предисловие	3
Лекция 1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей	4
Лекция 2. Структурный анализ случайных процессов	6
Лекция 3. Задача о сглаживании траекторий случайных процессов.....	24
Лекция 4. Некорректные задачи статистической динамики машин и конструкций	29
Лекция 5. Обратные задачи статистической динамики механических систем	34
Лекция 6. Использование преобразований Гильберта в расчетах надежности механических систем	40
Лекция 7. Вероятностные методы в диагностике металлоконструкций ...	46
Лекция 8. Вероятностные методы в механике подземных трубопроводов ...	51
Лекция 9. Усталостная долговечность элементов конструкций, работающих в условиях интенсивной коррозии и случайных процессов нагружения	56
Лекция 10. Вероятностное прогнозирование остаточного ресурса деталей машин и конструкций с использованием результатов незавершенных испытаний по определению их долговечности	63
Лекция 11. Метод марковских процессов	70
Лекция 12. Метод статистической линеаризации	75
Лекция 13. Расчеты на прочность при случайных воздействиях и случайных характеристиках прочности	86
Лекция 14. Определение асимптотических распределений вероятностей для крайних значений статистической выборки	90
Лекция 15. Статистическая оптимизация параметров виброзащитных систем	93
Лекция 16. Нестационарные системы со случайными параметрическими и силовыми воздействиями	97
Литература	100

Учебное издание

Гусев Александр Сергеевич

**Курс лекций
по вероятностным методам
в механике**

Редактор *О.М. Королева*

Художник *Я.М. Асинкритова*

Корректор *Н.А. Фетисова*

Компьютерная графика *Т.Ю. Кутузовой*

Компьютерная верстка *Е.В. Жуковой*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 28.08.20. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 8,29. Тираж 100 экз. Изд. № 749-2019. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
<https://bmstu.press/>

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com