Государственное образовательное учреждение высшего образования

“Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана”

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

А.С. Гусев, С.А Стародубцева

Введение в статистическую динамику и надежность механических систем

Конспект лекций

“Проблема неопределенности изящно(elegantly)
решается с помощью понятий случайная величина
и случайный процесс. Однако, это не конец истории,
а её начало, которая никогда не закончится”
Р.Беллман

Предисловие

Настоящее учебное пособие представляет собой краткий конспект лекций, прочитанный автором в разные годы студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана, МГТУ МАДИ и МГТУ МАМИ, обучающихся по специальности “Динамика и прочность машин” и “Прикладная механика”. Оно соответствует программам курсов “Статистическая динамика и надежность машин и конструкций” и “Случайные процессы и их анализ”, которые являются продолжением и развитием курсов “Сопротивление материалов”, “Теоретическая механика”, “Аналитическая механика и теория колебаний”.

Расширенная версия этого пособия (223 стр.) в виде монографии опубликована в издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2009 г. под названием “Вероятностные методы в механике машин и конструкций.”

Внешние нерегулярные силовые, кинематические и параметрические воздействия на машины и конструкции, а также вероятностное рассеивание прочностных характеристик и материалов описываются методами математической статистики и теории вероятностей и методами теории случайных процессов.

Цель учебного пособия состоит в формировании у студентов инженерного мышления в области статистических методов расчета надежности машин и конструкций при случайных воздействиях.

Студент должен **знать:**

- Математические методы, используемые в расчетах надежности и долговечности конструкций, находящихся в эксплуатации под воздействием нерегулярных интенсивных нагрузок;
- Методы прогнозирования динамических реакций механических систем на случайные силовые, кинематические и параметрические воздействия;
- Принципы разработки расчетных схем для современных машин, оборудования и приборов;
- Основные понятия и термины, используемые при создании новых конструкций с заданными требованиями по надежности, долговечности и безопасности.

Студент должен **уметь:**

- Применять методы теории вероятностей и теории случайных процессов для анализа динамики машин при нерегулярных на них воздействиях;
- Определять рациональные размеры и формы конструкций;
- Использовать особенности различных методов оценки надежности и долговечности конструкций, соответствующих различным расчетным ситуациям.

В компетенции обучающихся входит круг вопросов, связанных с созданием современных машин, конструкций и приборов, отвечающих требованиям надежности и безопасности в эксплуатации.

Оглавление

Предисловие

Лекция 1. Математическое введение

Лекция 2. Характеристики случайных величин

Лекция 3. Функциональные преобразования случайных величин

Лекция 4. Параметрическая надежность

Лекция 5. Математическое описание случайных процессов

Лекция 6. Функциональные преобразования случайных процессов

Лекция 7. Математическое описание механических систем

Лекция 8. Метод спектральных представлений Фурье в статистической динамике линейных систем

Лекция 9. Метод главных координат в статистической динамике линейных систем

Лекция 10. Метод статистической линеаризации в динамике нелинейных систем

Лекция 11. Особенности статистической динамики систем с кинематическими воздействиями

Лекция 12. Статистическая динамика распределенных систем

Лекция 13. Задачи структурного анализа случайных процессов

Лекция 1. Математическое введение

Дельта-функция Дирака

Дельта-функция Дирака *δ(x)* определяется выражениями:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0; \quad \delta(0) = \infty \tag{1.1}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1 \text{ при } \varepsilon > 0$$

Для функции *φ(x)* справедливо соотношение (интеграл Дирака)

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)\delta(x - x_0)dx = \varphi(x_0) \text{ при } a \leq x \leq b \tag{1.2}$$

Соотношение (1.2) выражает фильтрующее свойство дельта-функции.

Из (1.1) и (1.2) следует равенство

$$(-1)^n \int_{a}^{b} \varphi(x)\delta^{(n)}(x - x_0)dx = \varphi^{(n)}(x_0), \tag{1.3}$$

где $n = 1, 2, \ldots$ – порядок производных.

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье *Φ(ω)* (трансформата Фурье, интеграл Фурье, комплексный амплитудный спектр Фурье и т. п.) функции *x(t)* определяется равенством:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.4}$$

где $e^{-i\omega t} = Cos(\omega t) - iSin(\omega t)$

Обратное преобразование имеет вид:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.5}$$

При $x(t) = \delta(t)$ получаем:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi}; \qquad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega \tag{1.6}$$

Т.е. дельта-функцию можно представить в виде интеграла Фурье.

Функция Грина

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$L\{q(t)\} = f(t) \tag{1.7}$$

где $L = a_n p^{(n)} + \ldots + a_1 p + a_0$ – линейный дифференциальный оператор, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования,

q(t) – функция, подлежащая определению, *f(t)* – заданная функция времени *t*, $a_0, \ldots, a_n$ – константы, $n = 1, 2, \ldots$

Функция Грина *g(t)* для уравнения (1.7) есть решение уравнения

$$L\{g(t)\} = \delta(t), \tag{1.8}$$

которое имеет вид

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k t} \tag{1.9}$$

где $t \geq 0$, а λ_k – корни алгебраического уравнения $L(\lambda) = 0$, штрих сверху означает производную по λ.

Представим функцию f(t) в виде интеграла Дирака (1.2)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{1.10}$$

Тогда решение уравнения (1.7) можно представить в виде следующего интеграла Дюамеля

$$q(t) = W_{(t)}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)W_{(t)}\{\delta(t-\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.11}$$

где W – обратный к L оператор.

Контрольные задачи

Задача 1.

Определить функцию Грина при $L = p^2 + 2np + \omega_0^2$.

Два решения уравнения $L(\lambda) = \lambda^2 + 2n\lambda + \omega_0^2$ имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\omega_n, \text{где } \omega_n^2 = \omega_0^2 - n^2$$

Тогда имеем:

$$L'(\lambda) = 2\lambda + 2n; \quad L'(\lambda_1) = 2i\omega_n; \quad L'(\lambda_2) = -2i\omega_n;$$

$$g(t) = \frac{e^{-nt}}{2i\omega_n}\left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}\right) = \frac{1}{\omega_n} e^{-nt} Sin(\omega_n t).$$

Задача 2.

Проверить, что функция Грина при $L = p^4 + 4k^3$ имеет вид

$$g(t) = \frac{1}{8k^3} e^{-k|t|}(Coskt + Sink|t|)$$

Задача 3.

Вычислить амплитудные спектры Фурье для производных процесса $x(t)$.

Имеем:

$$\Phi_{\dot{x}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} e^{-i\omega t}\, dt,$$

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\dot{x}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \Phi_x e^{i\omega t} d\omega.$$

Отсюда получаем:

$$\Phi_{\dot{x}}(x) = i\omega\Phi_x(\omega);\ \Phi_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^2\Phi_x(\omega), \ldots$$

Задача 4.

Проверить, что амплитудный спектр Фурье функции $x(t) = cos^3\theta t$ определяется как

$$\Phi_x(\omega) = \frac{3}{4}\delta(\omega - 3\theta)\ ,$$

где $\delta(.) -$ функция Дирака.

Лекция 2. Характеристики случайных величин

Вероятностное рассеивание значений случайных величин X описывается следующими функциями:

- плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \in \Delta x\}}{\Delta x} \qquad (2.1)$$

где $P\{x \in \Delta x\}$ - вероятность того, что величина x будет в интервалах Δx;

- интегральной функцией распределяется вероятностей

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz \qquad (2.2)$$

- статистическими моментами n-го порядка

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f x)dx \qquad (2.3)$$

где <…> - знак вероятностного усреднения,

- характеристической функцией

$$\chi(\omega) = \langle e^{i\omega x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)dx \qquad (2.4)$$

Теоремы о случайных событиях

Основные теоремы о случайных событиях состоят в следующем. Пусть в n опытах событие A произошло n_A раз , а несовместное с ним событие B – n_B раз. Тогда частота (в пределе – вероятность) появления либо события A, либо события B

$$P(A + B) = \frac{n_A + n_B}{n} = P(A) + P(B). \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) выражает теорему о сложении вероятностей.

Пусть в n опытах события *A* произошло n_A раз, а событие *B* появляется n_A раз, но только тогда, когда появилось событие *A*. Одновременное появления событий *A* и *B* обозначим как $n_{AB}(n_{AB} = n_B)$. Тогда частота (вероятность) одновременного появления событий *A* и *B*.

$$P(A+B) = \frac{n_{AB}}{n} = \frac{n_B}{n}\frac{n_A}{n_A} = P(A)P(B/A) =$$

$$= P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \qquad (2.6)$$

где *P(B/A)* – вероятность появления события *B* при условии, что произошло событие *A, P(A/B)* - вероятность появления события А при условии, что произошло событие *B*.

Формула (2.6) выражает теорему о произведении вероятностей.

Для независимых событий *A* и *B* формула (2.6) принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad (2.7)$$

Законы распределения вероятностей

Нормальное (гауссово) распределение вероятностей задается полностью

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}\right) \qquad (2.8)$$

Характеристическая функция нормального распределения вероятностей имеет вид

$$\chi(\omega) = \exp\left(i\omega\bar{x} - \frac{s^2}{2}\omega^2\right) \qquad (2.9)$$

Центральные моменты вычисляются как

$$\langle (x-\bar{x})^n \rangle = \begin{cases} 0, \text{при } n = 1, 3, \dots \\ s^n (n-1)!! \quad , \text{при } n = 2, 4, \dots \end{cases} \qquad (2.10)$$

Трехпараметрическое распределение вероятностей положительных величин задается полностью

$$f(x) = \frac{\alpha \beta^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} x^{\gamma-1} \exp(-\beta x^{\alpha}), \quad x \geq 0,$$

где – α, β, γ параметры распределения.

При $\alpha = \gamma$ имеем распределение Вейбулла. Тогда

$$f(x) = \alpha \beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^{\alpha})\,; \bar{x} = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right);$$

$$D\{x\} = \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right).$$

В случае $\alpha = 1$ получаем двухпараметрическое гамма-распределение. При этом

$$f(x) = \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} \exp(-\beta x)\,;\ \bar{x} = \frac{\gamma}{\beta};$$

$$D\{x\} = \frac{\gamma}{\beta^2};\ \chi(\omega) = \frac{1}{(\frac{1 - i\omega}{\beta})^{\gamma}}.$$

Если $\alpha = \gamma = 2$ и $\beta^{-1} = 2s^2$, имеем распределение Рэлея, характеризующееся соотношениями

$$f(x) = \frac{x}{s^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right);\ \bar{x} = s\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$D\{x\} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) s^2.$$

При $\gamma = 1, \alpha = 2$ и $\beta^{-1} = 2s^2$ получаем положительную ветвь нормального распределения, для которой

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{s\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right);\ \bar{x} = s\sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

$$D\{x\} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) s^2;\ \langle x^2 \rangle = s^2.$$

В случае, когда $\alpha = \gamma = 1$, имеем экспоненциальное распределение, описывающееся следующими выражениями:

$$f(x) = \beta \exp(-\beta x);$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\beta};$$

$$D\{x\} = \frac{1}{\beta^2};$$

$$\chi(\omega) = \frac{\beta}{\beta - i\omega}.$$

Системы случайных величин

Плотность распределения вероятностей системы двух случайных величин x и y (рис. 2.1) определяется по формуле

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{x \in \Delta x, y \in \Delta y\}}{\Delta x \Delta y},$$

где $P\{x \in \Delta x, y \in \Delta y\}$ – вероятность того, что значения величин x и y находятся в прямоугольной области $(\Delta x, \Delta y)$.

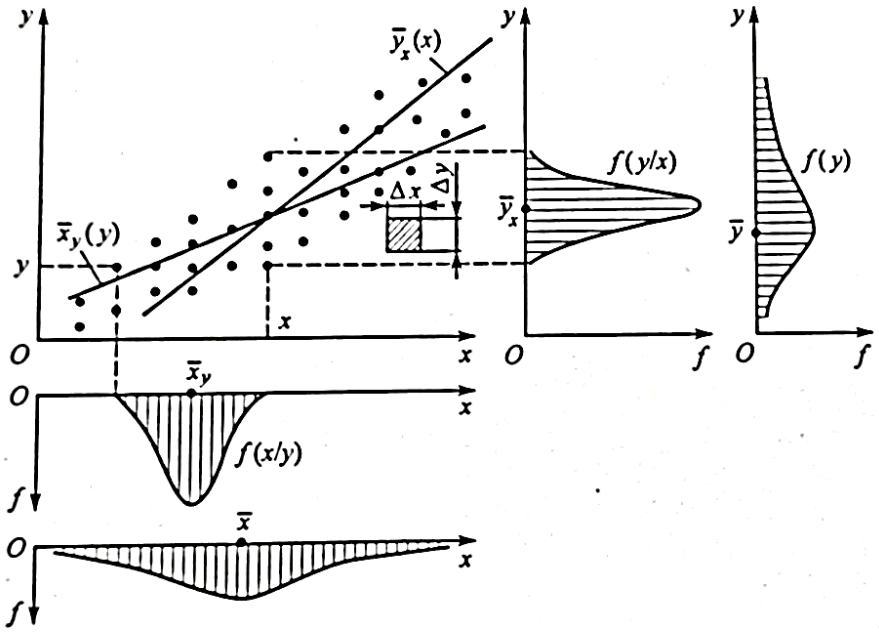


Рис 2.1

Интегральная функция распределения вероятностей величин x и y имеет вид

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\alpha,\beta)d\alpha d\beta.$$

Интегральные функции распределения вероятностей величин x и y определяются как

$$F(x) = F(x,\infty);$$

$$F(y) = F(\infty,y).$$

Корреляционные моменты порядка (n,m) системы двух случайных величин x и y вычисляют по формуле

$$\alpha = \langle x^n y^m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f(x,y)dxdy,$$

где n,m = 1,2,…

Центральные корреляционные моменты распределения вероятностей системы случайных величин x и y находят по выражению

$$\mu_{n,m} = \langle (x - \overline{x_n})^n ((y - \overline{y_m})^m) \rangle.$$

Центральный корреляционный момент порядка (1.1) обозначают K_{xy}. Коэффициент корреляции случайных величин x и y вычисляют по формуле

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{s_x s_y},$$

где s_x и s_y – средние квадратические отклонения величин x и y соответственно.

Обозначим условную плотность распределения вероятностей при фиксируемом y через $f(x/y)$, а при фиксируемом x - $f(y/x)$(см. рис. 2.1). Здесь и далее наклонная черта указывает на условность распределения. Условные средние значения определяют по формулам

$$\overline{x_y}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f\left(\frac{x}{y}\right) dx; \overline{y_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

Зависимость $\overline{x_y}(y)$ и $\overline{y_x}(x)$ называют корреляционными или регрессионными, а их графики – линии регрессии.

Плотность совместного распределения вероятностей системы двух случайных величин выражается через одномерные и условные плотности следующим образом:

$$f(x, y) = f(x) f(y/x) = f(y) f(x/y).$$

Случайные величины называются статистически независимыми, если выполняются равенства

$$f(x/y) = f(x); \quad f(y/x) = f(y); \quad f(x, y) = f(x) f(y).$$

Случайные величины называются некоррелированными, если их корреляционный момент равен нулю. Статистически независимые случайные величины также являются некоррелированными. Однако некоррелированные

величины могут оказаться статистически зависимыми. Этот случай здесь не рассматривается.

Плотность двухмерного нормального распределения вероятностей определяется выражением

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi s_x s_y \sqrt{1-r^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{s_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{s_x s_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{s_y^2}\right]\right\},$$

Лекция 3.
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим монотонную функцию $y = \varphi(x)$, в которой аргумент x является случайной величиной с заданной плотностью $f_x(x)$ и интегральной функцией распределения вероятностей $F_x(x)$. Требуется найти плотность $f_y(y)$ и интегральную функцию $F_y(y)$ распределения вероятностей величины y. Из рис. 5.1 видно, что при $y' > 0$

$$F_y(y) = F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\psi(y)} f_x(\alpha)d\alpha, \qquad (3.1)$$

где $x = \varphi^{-1}(y) = \psi(y)$ – функция, обратная от x.

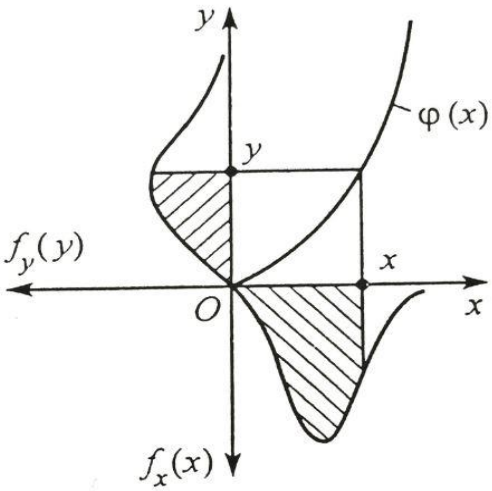


Рис 3.1

В результате дифференцирования (3.1) получаем

$$f_y(y) = f_x\{\psi(y)\}\psi'(y). \qquad (3.2)$$

При $y' < 0$ (рис. 3.2)

$$F_y(y) = 1 - F_x(x) = \int_x^\infty f_x(\alpha)d\alpha = \int_{\psi(y)}^\infty f_x(\alpha)d\alpha. \qquad (3.3)$$

После дифференцирования (3.3) получаем

$$f_y(y) = -f_x\{\psi(y)\}\psi'(y). \qquad (3.4)$$

Обобщив соотношения (3.2) и (3.4), имеем

$$f_y(y) = f_x\{\psi(y)\}|\psi'(y)|. \qquad (3.5)$$

Поскольку

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy,$$

моменты распределения вероятностей величины y

$$\langle y^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^n f_y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^n(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^n(x)f(x)dx.$$

При $n = 1$ получаем среднее значение величины y:

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

Далее рассмотрим функцию $z = \varphi(x, y)$ двух случайных аргументов x и y. Интегральная функция распределения вероятностей величины z определяется как

$$F(z) = \int_{(D)} f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ - плотность совместного распределения вероятностей системы случайных величин x и y; D - область плоскости (x, y), показанная на рис. 3.3.

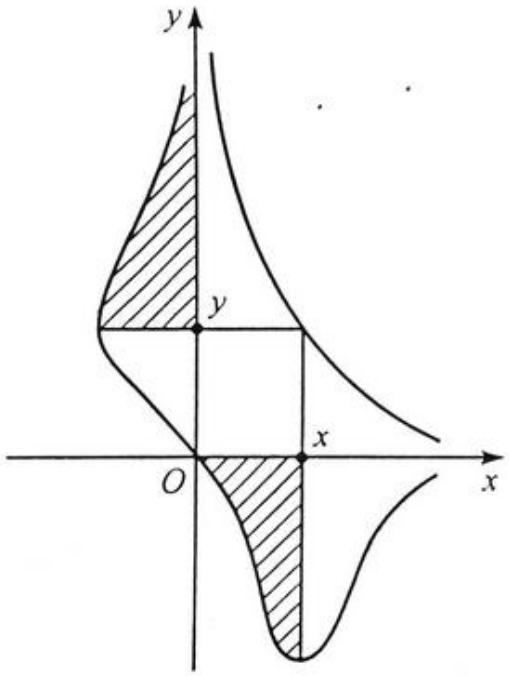


Рис. 3.2

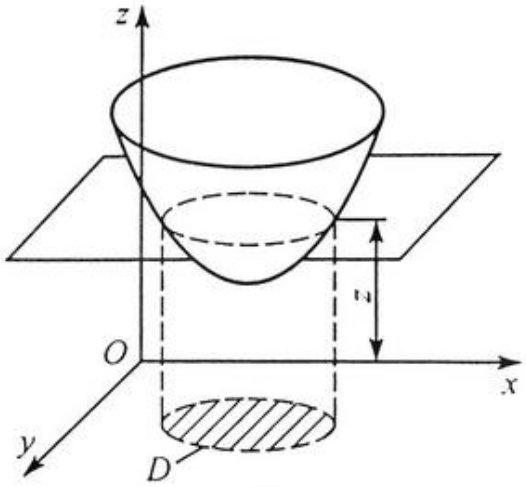


Рис. 3.3

Пусть $z = x + y$. Тогда $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ и

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right\} dx.$$

Плотность распределения вероятностей величины z определяется выражением

$$f(z) = F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx.$$

Плотность распределения вероятностей произведения случайных величин $z = x \cdot y$

$$f(z) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx.$$

В случае отношения двух случайных величин $z = \frac{x}{y}$

$$f(z) = \int_{0}^{\infty} yf(zy, y)dy - \int_{-\infty}^{0} yf(zy, y)dy.$$

Для суммы произвольного числа статически независимых величин

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \tag{3.6}$$

с характеристическими функциями распределения вероятностей $\chi_k(\omega_k)$ среднее значение, дисперсия и характеристическая функция величины определяются по формулам

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k; \qquad s_{x_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} s_{x_k}^2;$$

$$\chi_n(\omega) = \langle e^{i\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n}\rangle = \chi_1(\omega_1)\chi_2(\omega_2) \ldots \chi_n(\omega_n).$$

В случае, когда все величины x_k подчиняются одному и тому же закону распределения вероятностей с характеристической функцией $\chi(\omega)$,

$$\chi_n(\omega) = \chi^n(\omega)$$

Рассмотрим этот случай подробно. С учетом того, что можно принять $\bar{x} = \overline{x_1} = \overline{x_2} = \ldots = \overline{x_n} = 0$ и $s_x^2 = 1$, дисперсия каждого слагаемого будет равна 1/n.

Используя соотношение (3.4), разложим функцию $\chi(\omega)$ в ряд Тейлора:

$$\chi(\omega) = \chi(0) + \dot{\chi}(0)\omega + \frac{1}{2}\ddot{\chi}(0)\omega^2 + \cdots = 1 - \frac{\omega^2}{2n} + \cdots$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$ характеристическая функция суммы (3.6)

$$\chi_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\omega^2}{2n}\right)^n = e^{\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)}.$$

Отсюда следует, что при указанных ограничениях в случае $n \to \infty$ сумма (3.6) подчиняется нормальному закону распределения вероятностей при любых законах распределения вероятностей ее слагаемых. Это согласуется с центральной предельной теоремой теории вероятностей, утверждающей, что случайная величина, рассеивание значений которой обусловлено различными равнозначимыми причинами, имеет нормальный закон распределения вероятностей.

Рассмотрим случай, когда слагаемые суммы (3.6) являются статистически зависимыми случайными величинами с нормальным законом распределения вероятностей. Характеристическая функция для данной суммы случайных величин имеет вид

$$\chi_n(\omega) = \langle e^{i\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n}\rangle = exp\left\{i\omega\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\right\}$$

Отсюда следует, что полученная характеристическая функция соответствует нормальному закону распределения вероятностей случайной величины, среднее значение которой равно

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}, \text{ а дисперсия } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\,.$$

Отсюда получаем, что сумма зависимых нормально распределенных случайных величин, так же как и сумма независимых нормально распределенных случайных величин, имеет нормальный закон распределения вероятностей.

Контрольная задача.

Определить распределение вероятностей для суммы z=x+y , в которой статистически независимые величины x и y равномерно распределены в интервале (a,b) (рис. 3.4)

Совместная плотность распределения величин (x,y) будет

$$f(x,y) = \frac{1}{(a-b)^2}$$

а интегральная функция распределения вероятностей для z будет определяться как (см. рис. 3.4)

$$F(z) = P(x+y \le z) = P(y \le z - x) = \frac{(z-2a)^2}{2(a-b)^2}$$

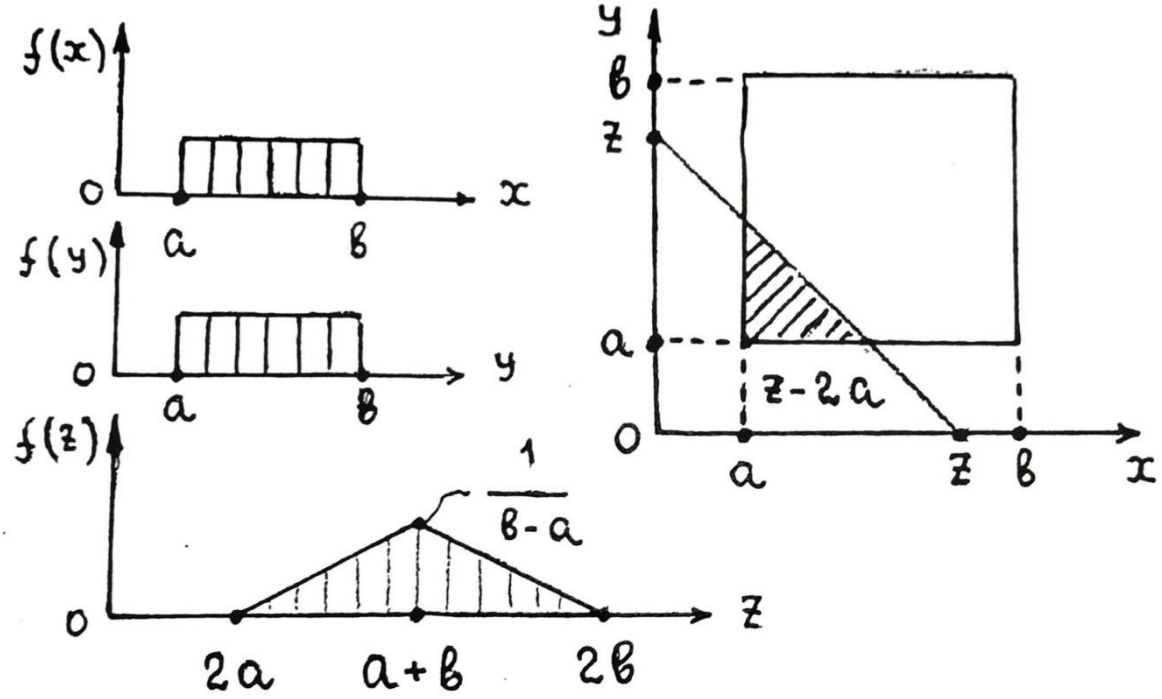


Рис 3.4

Плотность вероятностей для z из интервала $(2a, a+b)$

$$f(z) = F'(z) = \frac{z-2a}{(a-b)^2}$$

Аналогично определяется плотность вероятностей для интервала $(a+b, 2a)$

Следует заметить, что исходные законы распределения вероятностей изменяются в сторону приближения их к нормальному распределению вероятностей.

Если величины x и y статистически независимы и распределены нормально с характеристиками $\bar{x}, \bar{y}, s_x$ и s_y, то характеристическая функция величины z=x+y будет определяться как

$$\chi_z(\omega) = \chi_x(\omega) \cdot \chi_y(\omega) = \exp\left(i\omega(\bar{x} + \bar{y}) - \frac{\omega^2}{2}\left(s_x^2 + s_y^2\right)\right) =$$

$$= \exp\left(i\omega\bar{z} - \frac{s_z^2}{2}\omega^2\right),$$

где $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$, $s_z^2 = s_x^2 + s_y^2$

Отсюда следует, что при суммировании нормально распределенных случайных величин (в отличии от ранее рассмотренного случая) закон распределения вероятностей не изменяется и остается нормальным.

Лекция 4. Параметрическая надежность.

Рассмотрим вопрос об оценке параметрической надежности механических систем. Введем следующие обозначения: x параметр, определяющий качество функционирования системы (например, напряжение, перемещение, скорость, ускорение и т.п.); x_* – предельно допустимое значение этого параметра. Для нормальной работы системы должно выполняться условие: $x \leq x_*$.

Под параметрической надежностью понимается вероятность события $x \leq x_*$:

$$P = P\,\{x \leq x_*\}.$$

Риск определяется как вероятность события $x > x_*$, т.е. как

$$R = P\,\{x > x_*\} = 1 - P$$

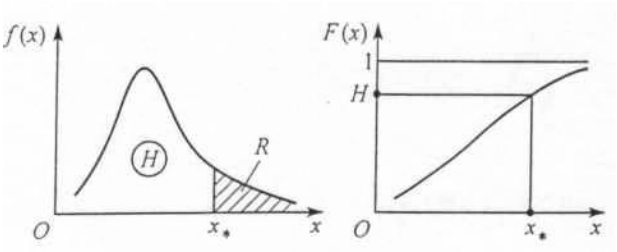


Рис. 4.1

В случае, когда x – случайная величина с интегральной функцией $F(x)$ и плотностью вероятностей $f(x)$, а x_*– детерминированная величина (рис. 4.1),

$$P = \int_{-\infty}^{x_*} f(x)dx = F\,(x_*). \qquad (4.1)$$

При независимых случайных величинах x и x_* с плотностями вероятностей $f(x)$ и $f_*(x_*)$ приближенное значение риска равно произведению вероятностей двух событий $x > x_0$ и $x_* < x_0$ (рис. 4.2), т.е.

$R \approx \omega_1 \omega_2,$

где

$\omega_1 = P\{x > x_0\} = \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx\,;\ \omega_2 = P\{x_* < x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} f_*(x_*)dx_*\,;$

Здесь величина x_0 определяется точкой пересечения плотностей вероятностей $f(x)$ и $f_*(x_*)$.

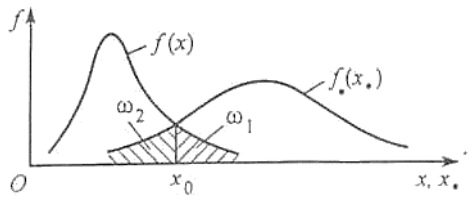


Рис 4.2

Рассмотрим вычисление надежности для случая, когда система величин (x, x_*) задана совместной плотностью вероятностей $f(x, x_*)$ или соответствующей функцией распределения вероятностей

$$F(x, x_*) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x_*} f(x, x_*)dxdx_* \qquad (4.2)$$

Из (4.2) получаем

$$P = P\{x \le x_*\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x_*} f(x, x_*)dx \right) dx_*.$$

При статистически независимых величинах x и x_*, т.е. при

$$f(x, x_*) = f(x) f_*(x_*)$$

имеем

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} f_*(x_*)\left(\int_{-\infty}^{x_*} f(x)dx\right)dx_* = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_*)f_*(x_*)dx_*.$$

Формула (4.3) является обобщением формулы (4.1) для случая, когда x_*– случайная величина с плотностью $f(x_*)$. Если же x и x_*– независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $\bar{x}$, x_*, s_x и s_{x_*}, то из (4.3) следует

$$P = \Phi\left(\frac{\bar{x_*} - \bar{x}}{\sqrt{\left(s_x^2 + s_{x_*}^2\right)}}\right)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}}dt \qquad (4.4)$$

- табулированная функция нормального распределения вероятностей [ ].

Рассмотрим расчет параметрической надежности при многократных случайных нагружениях $x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис 4.3).

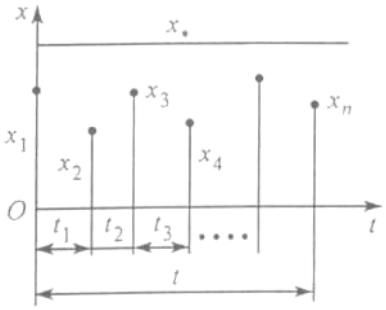


Рис 4.3

В случае, когда P, R – надежность и риск при одном нагружении соответственно, то при n независимых нагружениях риск можно определить по формуле

$$R_n = R + RP + P^2 + \ldots + RP^{n-1} = 1 - P^n. \qquad (4.5)$$

В формуле (4.5) использовано свойство суммы членов убывающей геометрической прогрессии.

Для нахождения надежности при n нагружениях имеем

$$P_n = P^n.$$

Введем величину $z = n(1 - P)$ и вычислим надежность при большом числе нагружений:

$$P_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = \exp\big(-n(1 - P)\big) \approx 1 - nR.$$

При $P = 1 - \exp\left(-\frac{x_*^2}{2S^2}\right)$, где $S -$ параметр.

Получаем закон «двойной экспоненты»

$$P_n = \exp\left(-nexp\left(-\frac{x_*^2}{2S^2}\right)\right) \tag{4.6}$$

Замечание

Применительно к расчету прочностной надежности элементов конструкций и деталей машин при случайных воздействиях в основной формуле (4.1) и далее под x следует понимать нормальное σ или касательное τ напряжение, а под x_* – например, предел прочности σ_B (илиτ_B). Здесь, однако, следует заметить, что величина σ_B определяется на образцах металлов, имеющих относительно небольшой объем, тогда как объем конструкции (или детали) может во много раз быть бóльшим и, следовательно, с бóльшей вероятностью иметь внутренние (или поверхностные) дефекты.

Обозначим функцию распределения вероятностей для предела прочности, определенной на образцах с объемом V_0, через $F(\sigma_B, V_0)$ и определим

функцию распределения вероятностей $F(\sigma_B, V)$ для детали объемом V в n раз большим, чем V_0.

Вероятность того, что в детали предел прочности превысит некоторое значение σ_B будет определяться по теореме о произведении вероятностей как

$$[1 - F(\sigma_B, V_0)]^n \tag{4.7}$$

Функция распределения вероятностей предела прочности для детали будет

$$F(\sigma_b, V) = 1 - [1 - F(\sigma_B, V_0)]^n \tag{4.8}$$

Пусть рассеивание предела прочности для образцов описывается распределением Вейбулла

$$F(\sigma_B, V_0) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_B - \sigma_0}{\sigma_c}\right)^\alpha\right], \qquad \sigma_B \geq \sigma_0 \tag{4.9}$$

где $\sigma_0, \sigma_c, \alpha$ – параметры.

Подставив (4.9) в (4.8), получим

$$F(\sigma_B, V) = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma_B - \sigma_0}{\sigma_c}\right)^\alpha\right], \sigma_B \geq \sigma_0 \tag{4.10}$$

Из формулы (4.10) следует, что предел прочности для детали с объемом $V > V_0$ в статистическом смысле меньше, чем предел прочности для образца. Вид функции (4.10) показан на рис. 4.4.

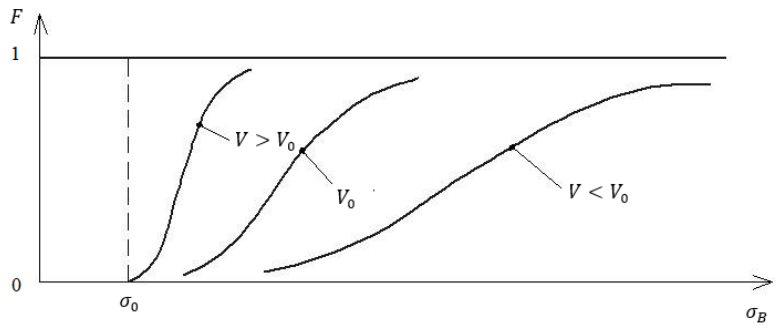


Рис. 4.4

В соответствии с (4.10) равномерно растянутый стержень имеет надежность, определяемую как (рис. 4.5, а)

$$\underline{P}\{\sigma \leq \sigma_B\} = 1 - F(\sigma, V) = \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_c}\right)^{\alpha}\right] \qquad (4.11)$$

а) б)

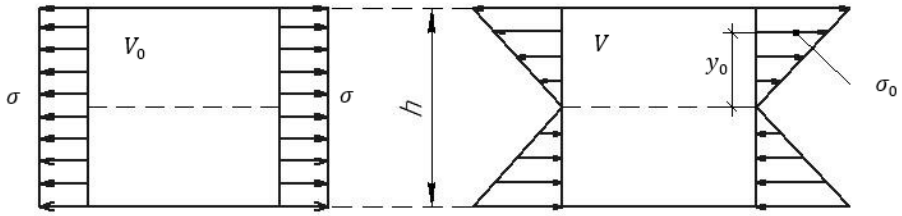


Рис. 4.5

Если напряжения распределены неравномерно, то надежность будет определяться как

$$\underline{P}\{\sigma \leq \sigma_B\} = \exp\left[-\frac{V}{V_0}\int_{\sigma>\sigma_0}\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_c}\right)^{\alpha} dV\right] \qquad (4.12)$$

где интегрирование ведется по объему, в котором $\sigma > \sigma_0$.

В случае чистого изгиба стержня (рис. 4.5, б) при $V = V_0$ имеем

$$\underline{P}\{\sigma \leq \sigma_B\} = \exp\left[-\frac{1}{h\sigma_c^{\alpha}}\int_{y_0}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{2\sigma_{max}}{h} * y - \sigma_0\right)^{\alpha} dy\right] \qquad (4.13)$$

где $y_0 = \frac{h}{2} * \frac{\sigma_0}{\sigma_{max}}$

При $\sigma_0 = 0$

$$\underline{P}\{\sigma \leq \sigma_B\} = \exp\left[-\frac{1}{2(1+\alpha)}\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_c}\right)^{\alpha}\right]$$

Из (4.11) и (4.13) следует, что при $\sigma = \sigma_{max}$ надежность при изгибе намного больше, чем при растяжении. Одинаковая надежность будет при

$$\sigma_{max} = \left[2(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\sigma$$

Так при $\alpha = 4$ имеем $\sigma_{max} = 10^{1/4}\,\sigma \approx 1.78\sigma$

Заметим, что объем мелких деталей V может быть намного меньше объема образцов V_0. Определим функцию распределения вероятностей σ_B для детали с объемом V в n раз меньшем, чем V_0.

В соответствии с (4.8) функция распределения вероятностей предела прочности для образа будет определяться по формуле

$$F = (\sigma_B, V_0) = 1 - [1 - F(\sigma_B, V)]^n$$

Отсюда найдем

$$F(\sigma_B, V) = 1 - [1 - F(\sigma_B, V_0)]^{\frac{1}{n}}$$

Получаем, что предел прочности малых по объему деталей в статистическом смысле больше предела прочности образцов (см рис. 4.4).

Если величина σ_B следует закону Вейбулла (4.9), то тогда

$$F(\sigma_B, V) = 1 - \exp\left[-\frac{V_0}{V}\left(\frac{\sigma_B - \sigma_0}{\sigma_c}\right)^{\alpha}\right]$$

Надежность равномерно растянутого стержня будет определяться по формуле

$$P\{\sigma \leq \sigma_B\} = \exp\left[-\frac{V_0}{V}\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_c}\right)^{\alpha}\right]$$

Из сказанного, в частности, следует, что опасность концентраций напряжений из-за малого объема высоконагруженной области может оказаться не столь значительной, чем ожидается. На рис. 4.6 показаны элементы конструкций с одинаковыми максимальными напряжениями. Однако, надежность первого элемента будет меньше надежности второго элемента.

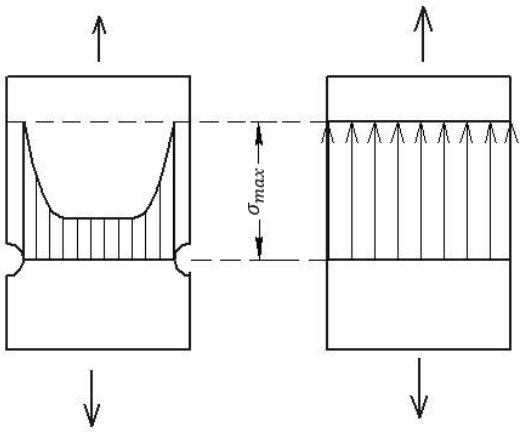


Рис. 4.6

Рассмотрим теперь вопрос об оценке надежности системы по надежности ее элементов. Надежность системы зависит от надежности составляющих ее элементов. При этом решающее значение имеет структура системы. Их высоконадежных элементов можно получить в целом ненадежную систему, а из элементов с относительно невысокой надежностью – систему с высоким уровнем надежности.

Две основные модели соединения элементов в систему – последовательное (рис 4.7, а) и параллельное (рис. 4.7, б). При последовательном соединении отказ одного элемента приводит к отказу всей системы в целом. При параллельном соединении отказ системы возможен лишь при отказе всех ее элементов, т.е. в этом случае все элементы системы, кроме одного, являются резервными. Примером системы с последовательно соединенными элементами может служить статически определимая

стержневая система, в которой разрушение одного стержня приводит к отказу всей системы.

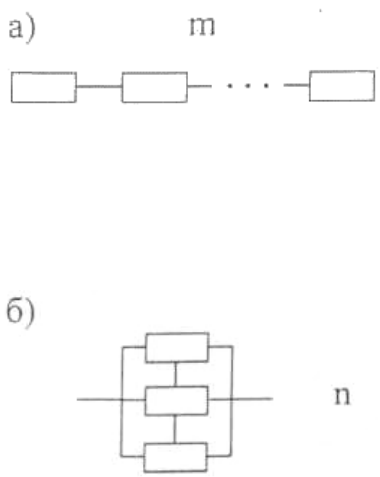


Рис. 4.7

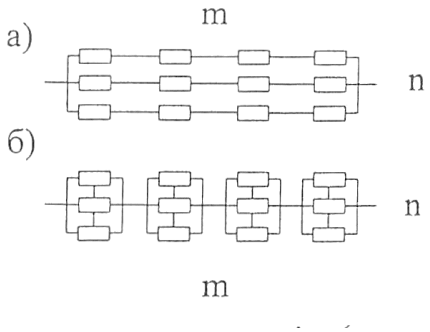


Рис. 4.8

Следует отметить, что статически неопределимые системы в строительной механике не могут быть отнесены ни к системе с последовательными, ни параллельно соединенными элементами, т.к. при разрушении одного из элементов происходит перераспределение усилий по элементам. Этот случай требует специального рассмотрения.

Пусть элементы системы статистически независимы и имеют надежность (вероятность безотказной работы) $P_1,\ P_2, \ldots$ Тогда, в соответствии с теоремой об умножении вероятностей, надежность системы из m последовательно соединенных элементов будет определяться как

$$P = \prod_{k=1}^{m} P_k \qquad (4.14)$$

Из (4.14) следует, что надежность системы с последовательно соединенными элементами (кроме случая, когда $P_1 = P_2 = \cdots = P_m = 1$) меньше надежности каждого элемента и при $m \to \infty$ $P \to 0$.

Используя вновь теорему об умножении вероятностей, получаем следующее выражение для определения степени риска использования системы с n параллельно соединенными элементами

$$1 - P = \prod_{k=1}^{n}(1 - P_k)$$

Отсюда надежность системы с параллельно соединенными элементами будет определяться как

$$P = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - P_k) \quad (4.15)$$

Из (4.15) следует, что надежность системы с параллельно соединенными элементами (кроме случая, когда $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 1$) выше надежности каждого из элементов, и при $n \to \infty$ $P \to 1$.

Комбинируя последовательно и параллельно соединенные элементы, приходим к сложным системам. На рис 4.8а показана система с общим резервированием. Для нее

$$P = 1 - \left(1 - \prod_{k=1}^{m} P_k\right)^n$$

Для системы с раздельным резервированием, показанной на рис. 4.8 б имеем

$$P = \prod_{k=1}^{m}(1 - (1 - P_k)^n).$$

Лекция 5. Математическое описание случайных процессов.

Процесс $x(t)$ называется случайным, если в любой момент времени t величина x является случайной. Это означает, что если при первой реализации случайного процесса величина x имела значение $x^{(1)}(t)$, то при второй реализации этого же процесса величина x может иметь значения $x^{(2)}(t)$, отличающееся от первых; таких различных реализаций может быть бесконечно много (рис. 5.1)

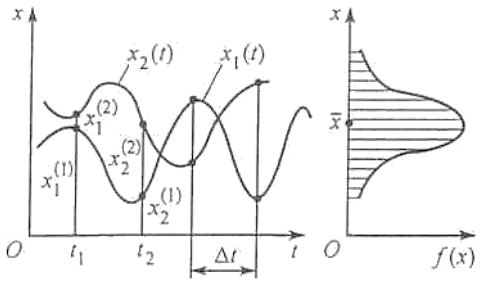


Рис. 5.1

$$\langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Самым важным видом случайных процессов является нормальный (гауссов) стационарный процесс. Он полностью определяется своим средним значением (далее будем считать, что оно равно нулю) и корреляционным моментом второго порядка, который называется также корреляционной функцией случайного процесса второго порядка. Его можно вычислить как

$$K_x(t_1, t_2) = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle \tag{5.1}$$

При заданном наборе случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ значения корреляционной функции можно получить только при конечном числе точек отсчета. В случае стационарных процессов начало отсчета t_1 можно принять произвольным, тогда корреляционная функция будет симметричной функцией только одной переменной $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_x(\tau) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle. \tag{5.2}$$

Значения этой функции в точках отсчета можно вычислить по формуле

$$K_x(m\Delta t) = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^{n-m} x_i x_{i+m}$$

где $\Delta t = t/n$ – шаг квантования; $m = 0, 1, 2, \dots$

По полученным таким образом оценкам значений корреляционный функции $K_0 = K_x(0)$, $K_1 = K_x(\Delta t)$, $K_2 = K_x(2\Delta t), \dots$ подбирают аналитическое выражение для этой функции. При этом часто используют выражение вида (рис. 5.2)

$$K_x(\tau) = K_0 \exp(-\alpha|\tau|) \cos \beta\tau,$$

где параметры α и β вычисляют, например, по методу наименьших квадратов.

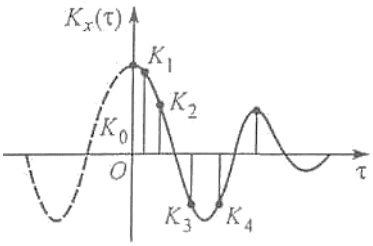


Рис. 5.2

В теоретических исследованиях значения процесса $x(t)$ могут приниматься комплексными, поэтому наряду с этим процессом рассматривают комплексно-сопряженный. При этом в расчетах используют только действительную часть получаемых выражений, а оператор вычисления действительной части этих выражений, как правило, не указывают. В данном случае вместо соотношения (5.1) для определения корреляционной функции применяют выражение

$$K_x(t_1, t_2) = \langle x^*(t_1)x(t_2)\rangle, \tag{5.3}$$

где * – знак комплексно-сопряженной величины.

Представим процессы $x(t)$ и $x^*(t)$ в виде интегралов (трансформант) Фурье:

$$x^*(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(\omega_1)e^{-i\omega_1 t_1}\, d\omega_1;$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_2)e^{i\omega_2 t_2}\, d\omega_2,$$

где комплексные амплитудные спектры $\Phi^*(\omega_1)$ и $\Phi(\omega_2)$ процессов $x^*(t_1)$ и $x(t_2)$ определяются соответственно по формулам

$$\Phi^*(\omega_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t_1)e^{i\omega_1 t_1}dt_1;$$

$$\Phi(\omega_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_2)e^{-i\omega_2 t_2}dt_2\,.$$

Поскольку процесс $x(t)$ является случайным, то функция $\Phi(\omega)$ – также случайная. Вычислим ее корреляционную функцию по формуле

$$K_\Phi(\omega_1, \omega_2) = \langle \Phi^*(\omega_1)\Phi(\omega_2)\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}K_x(t_1, t_2)dt_1 dt_2.$$

Приняв $t_1 = t, t_2 = t + \tau,$ получим

$$K_{\Phi}(\omega_1\omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_2, t)e^{it(\omega_1-\omega_2)}dt,$$

где $S_x(\omega_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2\tau}K_x(t, t+\tau)d\tau$ – спектральная плотность (энергетический спектр) процесса $x(t)$ в момент времени t.

В случае, когда процесс $x(t)$ является стационарным, его корреляционная функция и спектральная вероятность не зависят от момента времени t. Тогда (теорема Винера)

$$K_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) = S_x(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2); \tag{5.4}$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{5.5}$$

Здесь индекс «2» при ω_2 опущен.

Из (5.4) следует, что амплитудные спектры стационарных случайных процессов являются дельта-коррелированными, или стохастически ортогональными, а функцию $S_x(\omega)$ можно вычислить как преобразование Фурье от корреляционной функции.

Определим по формуле (5.3) корреляционную функцию:

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\Phi^*(\omega_1)\Phi(\omega_2)\rangle e^{i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}d\omega_1 d\omega_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\delta(\omega_1 - \omega_2)e^{i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}d\omega_1 d\omega_2.$$

Тогда при $\tau = t_2 - t_1$, для стационарных процессов получим

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{5.6}$$

т. е. преобразование Фурье спектральной плотности определяет корреляционную функцию случайного процесса.

Формулы (5.5) и (5.6) связывающие корреляционные функции и спектральные плотности случайных процессов, называются формулами Винера-Хинчина.

В технической литературе спектральные плотности определяются только для положительных частот (рис. 5.3). Далее они

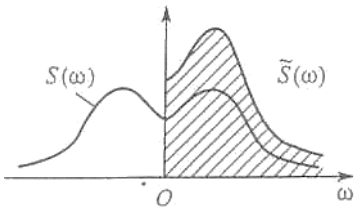


Рис. 5.3

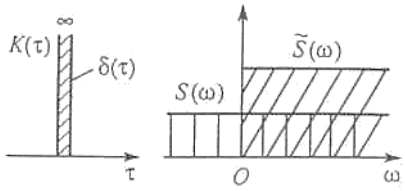


Рис. 5.4

Будут обозначены волнистой чертой сверху. С учетом этого можно записать:

$$\widetilde{S}\,(\omega) = 2S(\omega), K_x(\tau) = \int_0^\infty \tilde{S}\,(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega,$$

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (5.7)$$

Рассмотрим несколько примеров по определению корреляционных функций и спектральных плотностей.

Пример 1.

Теоретическая модель случайного процесса с бесконечной дисперсией, определяемая корреляционной функцией (рис. 5.4)

$$K(\tau) = k_0\delta(\tau),$$

где k_0 – интенсивность процесса, называемого белым шумом. Его спектральная плотность определяется соотношениями:

$S(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}$; $\tilde{S}(\omega) = \frac{k_0}{\pi}$

Пример 2.

Пусть случайный процесс характеризуется корреляционной функцией

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

В этом случае спектральная плотность имеет вид

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int e^{-\tau(\alpha+i\omega)}d\tau = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

По аналогии с (5.1) для пары случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ определим взаимную корреляционную функцию:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \langle x(t_1)y(t_2)\rangle.$$

Случайные процессы называются стационарно связанными, если их взаимная корреляционная функция зависит только от интервала $\tau = t_2 - t_1$. В этом случае

$$K_{xy}(\tau) = \langle x(t)t(t+\tau)\rangle.$$

По аналогии с (5.5) найдем взаимную спектральную плотность процессов $x(t)$ и $y(t)$:

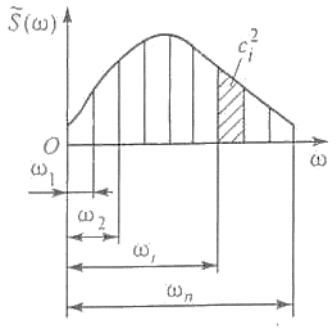
$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

При этом амплитудные спектры процессов $x(t)$ и $y(t)$ также являются дельта-коррелированными, т. е. выполняется условие

$$\langle \Phi_x^*(\omega_1)\Phi_y(\omega_2)\rangle = S_{xy}(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2).$$

В результате обратного преобразования Фурье спектральной плотности получаем взаимную корреляционную функцию

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega.$$



Траекторию гауссова стационарного процесса с заданной спектральной плотностью $\tilde{S}(\omega)$ можно смоделировать графиком функции

$$x(t) = \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \cos(\omega_i t + \alpha_i) \quad (5.8)$$

где n – число гармоник, учитываемых при моделировании; $c_i^2 = \tilde{S}(\omega_i)\Delta\omega$, $\omega_i = i\Delta\omega$; $\Delta\omega$ – шаг квантования спектральной плотности; α_i – случайные величины, равномерно распределенные в интервале $(0, 2\pi)$.

Рис. 5.5

Тогда корреляционная функция процесса (5.8) вычисляется как

$$K(\tau) = \langle x(0)x(\tau)\rangle = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_i c_k \langle cos\alpha_i \cos(\omega_k\tau + \alpha_k)\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 cos\omega_i\tau.$$

При $n \to \infty$ имеем

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega,$$

что в соответствии с (5.6) действительно определяет $K(\tau)$ по $S(\omega)$.

Лекция 6. Функциональные преобразования случайных процессов

Рассмотрим теперь случай, когда процесс $y(t)$ получается путём линейного преобразования процесса $x(t)$ вида

$$y(t) = \underset{(t)}{L}\{x(t)\}$$

где линейный дифференциальный оператор

$$\underset{(t)}{L} = a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ – детерминированные величины, $p = \frac{d}{dt}, \dots, p^n = \frac{d^n}{dt^n}$ – операторы дифференцирования.

Корреляционная функция процесса $y(t)$ будет определяться по формуле

$$K_y(t_1, t_2) = \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \underset{(t_1)}{L} \ \underset{(t_2)}{L} \ K_x(t_1, t_2)$$

где $K_x\ (t_1, t_2)$ – корреляционная функция процесса $x(t)$.

Для стационарных процессов имеем

$$K_y(\tau) = \underset{(\tau)}{L} \ \underset{(-\tau)}{L} \ K_x(\tau)$$

где $\tau = t_1 - t_2$, $K_x(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega$, $S_x(\omega)$ – спектральная плотность процесса $x(t)$.

При $L = \frac{d}{dt}\big(y(t) = \dot{x}(t)\big)$ имеем:

$$K_y(\tau) = K_{\dot{x}}(\tau) = -\ddot{K}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

где $S_x(\omega)$, $S_{\dot{x}}(\omega)$ – спектральные плотности процессов $x(t)$ и $\dot{x}(t)$.

Отсюда получаем равенства:

$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$; $S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$; $S_{\dddot{x}}(\omega) = \omega^6 S_x(\omega)$ и т. д.

где точками указан порядок производной.

Для интегрального преобразования

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

имеем

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_2 - \tau_1)\, d\tau_1 d\tau_2$$

$$K_y(t, t) = S_y^2(t) = 2\int_0^t (t - \tau)K_x(\tau)d\tau$$

При $K_x(\tau) = k_0\delta(\tau)$ получаем

$$S_y^2(t) = k_0 t$$

Для суммы гауссовских стационарных процессов $x(t)$ и $y(t)$

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

имеем:

$$K_z(\tau) = \langle z(0)z(\tau)\rangle = K_x(\tau) + K_y(\tau) + K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)$$

Лекция 7. Математическое описание механических систем

Колебания механических систем с конечным числом n степеней свободы можно описать уравнением

$$M\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{f}(t), \tag{7.1}$$

где $M = [m_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}]$ – матрицы масс, коэффициентов демпфирования и жесткостей соответственно; $\vec{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}^T$ – вектор внешних воздействий; $\vec{q}(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}^T$ – вектор обобщенных координат системы; T – знак транспонирования; $i, j = 1,2, \dots, n$.

Уравнение (7.1) можно представить в операторной форме:

$$L\vec{q}(t) = \vec{f}(t), \tag{7.2}$$

если принять, что $L(p) = [L_{ij}] = Mp^2 + Bp + C -$ матрица линейных операторов, где

$p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$; $p = \frac{d}{dt}$. Функция $L(i\omega)$ называется импедансом механической системы.

Формальное решение уравнения (7.2) можно записать как

$$\vec{q}(t) = W\vec{f}(t), \tag{7.3}$$

где $W = [W_{ij}] = L^{-1} = (Mp^2 + Bp + C)^{-1} -$ оператор, обратный L.

В развернутой форме уравнения (7.2) и (7.3) принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij} q_j(t) = f_i(t); \tag{7.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ij} f_i(t) = q_i(t), i = 1,2, \dots, n. \tag{7.5}$$

Помимо уравнений (7.1) – (7.5) механическую систему с конечным числом степеней свободы также можно описать матрицей функций Грина $G = [g_{ij}(t - \tau)]$ или соответствующей ей матрицей передаточных функций $H = [H_{ij}(i\omega)]$, где $g_{ij}(t - \tau) -$ реакция системы по -й координате в момент времени t на воздействие в виде дельта-функции по координате j в момент времени τ (рис. 7.1); $H_{ij} -$ комплексная амплитуда реакции системы по -й координате на гармоническое воздействие с единичной амплитудой по j-й координате (рис. 7.2).

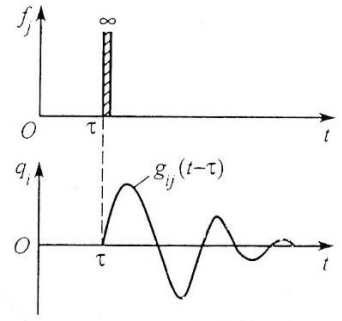


Рис. 7.1

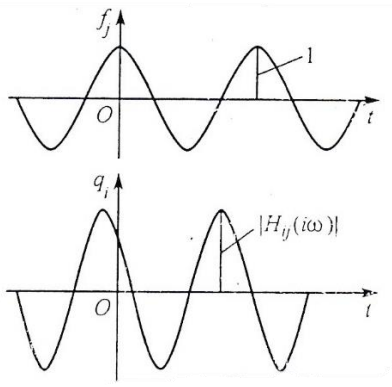


Рис. 7.2

В соответствии с соотношением (7.5)

$$g_{ij}(t-\tau) = W_{ij}\{\delta(t-\tau)\}; \tag{7.6}$$

$$H_{ij}(i\omega) = e^{-i\omega t} W_{ij}\{e^{i\omega t}\}. \tag{7.7}$$

Поскольку

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega,$$

то для стационарных систем из уравнений (7.6) и (7.7) получаем

$$g_{ij}(t-\tau) = W_{ij}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(i\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega. \tag{7.8}$$

Из соотношения (7.8) следует, что функция Грина является преобразованием Фурье передаточной функции. Обратное преобразование Фурье определяет передаточную функцию по функции Грина:

$$H_{ij}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{ij}(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{7.9}$$

Введем амплитудные спектры $\vec{\Phi}_f(\omega)$ и $\vec{\Phi}_q(\omega)$ процессов $\vec{f}(t)$ и $\vec{q}(t)$ соответственно. Тогда

$$\vec{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\Phi}_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \;\; \vec{q}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\Phi}_q(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega. \tag{7.10}$$

Подставив выражения (7.10) в уравнение (7.1), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [-\omega^2 M + i\omega B + C]\vec{\Phi}_q(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\Phi}_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{\Phi}_q(\omega) = H_{ij}(i\omega)\vec{\Phi}_f(\omega);$$

$$\Phi_{qi}(\omega)d\omega = \sum_{j=1}^{n} H_{ij}(i\omega)\Phi_{fj}(\omega), \tag{7.11}$$

где

$$H(i\omega) = \left[H_{ij}(i\omega)\right] = [-\omega^2 M + i\omega B + C]^{-1} \tag{7.12}$$

является матрицей передаточных функций.

Подставив (7.11) в (7.10), имеем

$$\vec{q}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)\vec{\Phi}_f\,(\omega)e^{i\omega t};$$

$$\vec{q}_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} H_{ij}(i\omega)\vec{\Phi}_{fj}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Лекция 8. Метод спектральных представлений Фурье в статистической динамике линейных систем

Рассмотрим механическую систему, описываемую уравнением (7.1), с матрицей передаточных функций $[H_{ij}(i\omega)]$, на входе которой задан векторный стационарный процесс воздействия $\vec{f}(t)$ с матрицей спектральных плотностей $\left[S_{f_i f_j}(\omega)\right]$, где

$$S_{f_i f_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{f_i f_j}\, e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{8.1}$$

Здесь $K_{f_i f_j}(\tau) -$ элементы матрицы корреляционных функций входного процесса воздействий $\vec{f}(t)$.

Задача состоит в определении для процесса на выходе $\vec{q}(t)$ матрицы спектральных плотностей $\left[S_{q_i q_j}(\omega)\right]$ и матрицы корреляционных функций $\left[K_{q_i q_j}(\tau)\right]$ с элементами, вычисляемыми как

$$K_{q_i q_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_i q_j}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{8.2}$$

Представим процессы на входе и выходе системы в виде интегралов Фурье:

$$f_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{f_j}(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega; \qquad q_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{q_j}(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega, \tag{8.3}$$

где в соответствии с формулами Винера-Хинчина амплитудные спектры являются дельта-коррелированными, т.к. выполняются соотношения

$$\langle \Phi^*_{f_j}(\omega_1) \Phi^*_{f_i}(\omega_2) \rangle = S_{f_i f_j}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1); \tag{8.4}$$

$$\langle \Phi^*_{q_j}(\omega_1) \Phi^*_{q_i}(\omega_2) \rangle = S_{q_i q_j}(\omega_2) \delta(\omega_2 - \omega_1). \tag{8.5}$$

В соответствии с определением передаточной функции имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{q_i}(\omega_1) &= \sum_{\alpha=1}^{n} H_{i\alpha}(i\omega_1) \Phi_\alpha(\omega_1); \\ \Phi_{q_j}(\omega_2) &= \sum_{\beta=1}^{n} H_{j\beta}(i\omega_2) \Phi_\beta(\omega_2). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Подставив (8.6) в (8.5), с учетом (8.4) имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} H_{i\alpha}(-i\omega_1)H_{j\beta}(-i\omega_2)\, S_{f_\alpha f_\beta}(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1) = S_{q_\alpha q_\beta}(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1).$$

Проинтегрировав это соотношение по ω_2 и обозначив ω_1 через ω, получим формулу для определения элементов матрицы спектральных плотностей на выходе динамической системы по элементам матрицы спектральных плотностей процесса на входе и элементам матрицы передаточных функций:

$$S_{q_i q_j}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} H_{i\alpha}(-i\omega)H_{j\beta}(-i\omega)\, S_{f_\alpha f_\beta}(\omega).$$

Применительно к системе с одной степенью свободы имеем

$$S_q(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_f(\omega),$$

где $S_f(\omega)$, $S_q(\omega)$ – спектральные плотности процесса $\vec{f}(t)$ на входе и процесса $\vec{q}(t)$ на выходе динамической системы; $H(i\omega)$ – передаточная функция системы.

Так, для системы, описываемой уравнением вида

$$L_1\vec{q}(t) = L_2\vec{f}(t)$$

с дифференциальными операторами L_1 и L_2 получаем

$$S_q(\omega) = \left|\frac{b_m(i\omega)^m + \ldots + b_1(i\omega) + b_0}{a_m(i\omega)^m + \ldots + a_1(i\omega) + a_0}\right|^2 S_f(\omega).$$

Взаимную спектральную плотность $S_{qf}(\omega)$ процессов на входе и на выходе динамической системы можно определить следующим образом.

Поскольку

$$\Phi_q(\omega) = H(i\omega)\Phi_f(\omega),$$

то с учетом того, что амплитудные спектры случайных процессов являются дельта-коррелированными, имеем

$$\langle \Phi_q^*(\omega_1)\Phi_f(\omega_2)\rangle = S_{qf}(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1) = H^*(i\omega_1)\langle \Phi_f^*(\omega_1)\Phi_f(\omega_2)\rangle$$
$$= H^*(i\omega_1)S_f(\omega_1)(\omega_2-\omega_1).$$

Отсюда получаем соотношения:

$$S_{qf}(\omega) = H^*(i\omega)S_f(\omega);$$

$$S_{fq}(\omega) = H^*(i\omega)S_f(\omega);$$

$$S_{fq}(\omega) = S_{qf}^*(\omega);$$

$$S_{fq}(\omega) + S_{qf}^{*}(\omega) = 2ReS_{fq}(\omega) = 2ReS_{qf}(\omega).$$

Поскольку

$$K_{fq}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{fq}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega;$$

$$K_{qf}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{qf}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{fq}(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega,$$

то

$$K_{fq}(\tau) = K_{qf}(-\tau).$$

В случае, когда после рассмотренного выше преобразования $f(t)$ в $q(t)$ с передаточной функцией $H_{fq}(i\omega)$ проводится преобразование $q(t)$ в $x(t)$ с передаточной функцией $H_{qx}(i\omega)$, это последовательное преобразование процессов можно заменить на одно преобразование с передаточной функцией, определяемой как (рис. 8.1)

$$H_{fx}(i\omega) = H_{fq}(i\omega)H_{qx}(i\omega).$$

Это соотношение следует из соотношений для амплитудного спектра $\Phi_x(\omega)$ процесса $x(t)$:

$$\Phi_x(\omega) = H_{qx}(i\omega)\Phi_q(\omega) = H_{qx}(i\omega)H_{fq}(i\omega)\Phi_f(\omega) = H_{fx}(i\omega)\Phi_f(\omega).$$

В случае, когда входное воздействие $f(t)$ двумя параллельными системами с передаточными функциями $H_{fq_1}(i\omega)$ и $H_{fq_2}(i\omega)$ преобразуется в процессы $q_1(t)$ и $q_2(t)$ соответственно, формирование процесса $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ можно рассматривать в эквивалентной системе с передаточной функцией, определяемой как (рис. 8.2)

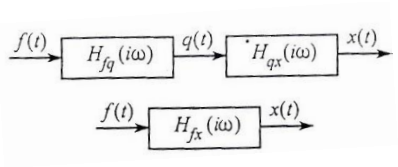


Рис. 8.1

$$H_{fq}(i\omega) = H_{fq_1}(i\omega) + H_{fq_2}(i\omega).$$

Это соотношение следует из равенств:

$$\Phi_{q_1}(\omega) = \Phi_{q_2}(\omega) = \left(H_{fq_1}(i\omega) + H_{fq_2}(i\omega)\right)\Phi_f(\omega) = H_{fq}(i\omega)\Phi_f(\omega).$$

Передаточную функцию системы с обратной связью, вырабатывающей сигнал управления $u(t)$, можно вычислить по формуле (рис. 8.3)

$$H_{fq}(i\omega) = \frac{H_1(i\omega)}{1 + H_1(i\omega)H_2(i\omega)}. \tag{8.7}$$

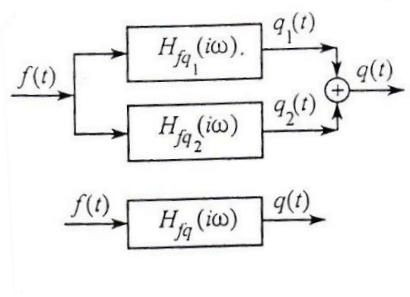


Рис. 8.2

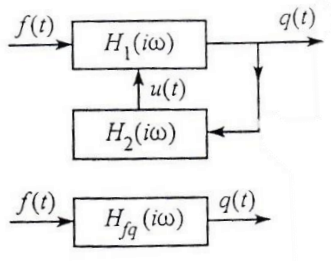


Рис. 8.3

Формулу (8.5) можно получить из равенств

$$\Phi_f(\omega) = \frac{\Phi_q(\omega)}{H_{fq}(i\omega)} = \frac{\Phi_q(\omega)}{H_1(i\omega)} + \Phi_u(\omega) = \Phi_q(\omega)\left(\frac{1}{H_1(i\omega)} + H_2(i\omega)\right),$$

где $\Phi_u(\omega)$ – амплитудный спектр процесса $u(t)$.

Пример 1.

Рассмотрим преобразование $f(t)$ в $q(t)$ вида

$$a \cdot q(t) = f(t),$$

где a – константа, $S_f(\omega)$ – спектральная плотность процесса $f(t)$.

Передаточная функция от $f(t)$ к $q(t)$

$$H_{fq}(\omega) = \frac{1}{a}$$

Спектральная плотность процесса $q(t)$

$$S_q(\omega) = \frac{1}{a^2} S_f(\omega)$$

Взаимная спектральная плотность процессов $f(t)$ и $q(t)$

$$S_{fq}(\omega) = \frac{1}{a} S_f(\omega)$$

Коэффициент корреляции между $f(t)$ и $q(t)$

$$K_{fq} = \frac{1}{a} S_f^2 = a \cdot S_q^2,$$

где S_f^2 и S_q^2 – дисперсия процессов $f(t)$ и $q(t)$.

Нормированный коэффициент корреляции

$$r_{fq} = \frac{K_{fq}}{S_q S_f} = 1$$

Пример 2.

Рассмотрим случай, когда первая производная является случайным процессом

$$\dot{q}(t) = f(t)$$

Передаточная функция в этом случае

$$H(i\omega) = \frac{1}{i\omega}$$

Спектральная плотность процесса $q(t)$

$$S_q(\omega) = \frac{1}{\omega^2} S_f(\omega) = \frac{1}{\omega^2} S_{\dot{q}}(\omega),$$

где $S_f(\omega)$ – спектральная плотность процесса $f(t)$.

Отсюда следует правило дифференцирования стационарных случайных процессов

$$S_{\dot{q}}(\omega) = \omega^2 S_q(\omega); S_{\ddot{q}}(\omega) = \omega^4 S_q(\omega); S_{\dddot{q}}(\omega) = \omega^6 S_q(\omega), \ldots$$

Взаимная спектральная плотность процесса и его производной оказывается мнимой функцией

$$S_{fq}(\omega) = S_{\dot{q}q}(\omega) = \frac{1}{i\omega} S_f(\omega)$$

Для коэффициента корреляции между производными имеем

$$r_{q\dot{q}} = r_{q\ddot{q}} = \ldots = 0;\ r_{q\ddot{q}} \neq 0;\ r_{qq^{(4)}} \neq 0, \ldots$$

Пример 3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{q} + \alpha q = f(t),$$

где $f(t)$ – стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_f(\omega)$, α – константа.

Передаточная функция этого уравнения

$$H(i\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

Спектральная функция процесса $q(t)$

$$S_q(\omega) = \frac{S_f(\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Пример 4. Система с одной степенью свободы.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением (7.1) при $n = 1$, и где процесс $f(t)$ задается спектральной плотностью $S_f(\omega)$.

Передаточная функция системы определяется

$$H(i\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ni\omega}.$$

Дисперсия процесса $q(t)$

$$S_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega)d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \approx \frac{\pi}{2n\omega_0^2} S_f(\omega_0).$$

Случайные параметрические колебания.

Рассмотрим динамическую систему, колебания в которой описывается стохастическим уравнением Матье-Хилла

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2\big(1 + \mu\varepsilon(t)\big)q = kf(t)$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = p(t),$$

где спектральные плотности процессов $\varepsilon(t), f(t), p(t), q(t)$ вычисляются по формулам

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{k_\varepsilon}{2\pi}; S_f(\omega) = \frac{k_f}{2\pi}$$

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\big(k^2 k_\varepsilon + \mu^2\omega_0^4 S_q^2 k_f\big);$$

$$S_q(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_p(\omega).$$

где k_ε , k_f – интенсивности процессов $\varepsilon(t)$ и $f(t)$.

Дисперсия процесса $q(t)$ будет определяться по формуле

$$S_q^2 = \frac{k^2}{\omega_0^2(4n - \mu^2\omega_0^2)}.$$

Система будет устойчива при любом малом k , если имеем $\mu^2\omega_0^2 < 4n$.

Если параметрическое воздействие $\varepsilon(t)$ не является белым шумом и имеет некоторую спектральную плотность $S_\varepsilon(\omega)$, то его (в соответствии с понятием о главном параметрическом резонансе) приближенно можно заменить на белый шум с интенсивностью $2\pi S_\varepsilon(2\omega_0)$. В этом случае условие устойчивости принимает вид

$$\pi\omega_0^2\mu^2 S_\varepsilon(2\omega_0) < 2n.$$

Лекция 9. Метод главных координат в статистической динамике линейных систем

Рассмотрим механическую систему, функционирование которой описывается уравнением

$$M\ddot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{P}(t), \tag{9.1}$$

где $M, C -$ матрицы масс и коэффициентов жесткости; $\vec{P}(t) -$ вектор внешних воздействий с заданной матрицей спектральных плотностей $\left[S_{P_\alpha P_\beta}(\omega)\right], \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$; $\vec{q} -$ вектор обобщенных координат с матрицей спектральных плотностей $\left[S_{q_i q_j}(\omega)\right]$, которую необходимо определить; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Решение соответствующего (9.1) однородного уравнения находим в виде

$$\vec{q}(t) = \vec{V} cos\omega t. \tag{9.2}$$

Подставив (9.2) в (9.1), получаем

$$[C - \omega^2 M]\vec{V} = 0. \tag{9.3}$$

Это уравнение имеет ненулевые решения, если

$$|C - \omega^2 M| = 0. \tag{9.4}$$

Из решения алгебраического уравнения (9.4) находим спектр частот свободных колебаний ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$, каждой из которых соответствует вектор форм $\overrightarrow{V_k}$. В результате получаем матрицу форм свободных колебаний: $V = \left[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\right] = \left[V_{jk}\right]$, $j, k = 1,2, \dots, n$.

Запишем уравнение (9.3) для -й и j-й форм колебаний:

$$[C - \omega_k^2 M]\vec{V}_k = 0;$$

(9.5)

$$\left[C - \omega_j^2 M\right]\vec{V}_j = 0.$$

Умножив первое уравнение (9.5) слева на $\vec{V}_j^T$, а второе уравнение слева на $\vec{V}_k^T$ (Т-знак транспонирования), и сложив, получим

$$\vec{V}_k^T M \vec{V}_j \left(\omega_j^2 - \omega_i^2\right) = 0.$$

Это означает, что две разные формы колебаний ортогональны, т.е.

$$\vec{V}_k^T M \vec{V}_j = \vec{V}_j^T M \vec{V}_k = 0. \tag{9.6}$$

От координат $\vec{q}$ перейдем к главным координатам $\vec{u}$, и определяемым из соотношения

$$\vec{q} = V\vec{u}. \tag{9.7}$$

Подставив (9.7) в (9.1) и умножив полученный результат слева V^T, в соответствии с (9.6) имеем

$$m\ddot{\vec{u}} + \lambda\vec{u} = \vec{F}(t), \tag{9.8}$$

где

$$m = V^T MV = diag(m_k, k = 1, 2, \dots, n);$$

$$\lambda = V^T CV = diag(\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n);$$

$$\vec{F}(t) = V^T\vec{P}(t). \tag{9.9}$$

Демпфирование в системе можно учесть с помощью «тангенса потерь», определяемого через логарифмический декремент колебаний δ как $\eta = \frac{\delta}{\pi}$. При этом величины λ_k заменяют на $(1 + i\eta)\lambda_k$, и тогда уравнение (9.8) распадается на систему независимых уравнений:

$$\ddot{u}_k + (1 + i\eta)\omega_k^2 u_k = f_k(t), \tag{9.10}$$

где $\omega_k^2 = \frac{\lambda_k}{m_k}; f_k(t) = \frac{F_k(t)}{m_k}$.

Элементы матрицы спектральных плотностей процесса $\vec{f}(t)$ определяют через элементы матрицы спектральных плотностей внешних воздействий $\vec{P}(t)$ по формуле

$$S_{f_i f_j}(\omega) = \frac{1}{m_i m_j}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} V_{i\alpha}V_{j\beta}S_{P_\alpha P_\beta}(\omega). \tag{9.11}$$

Амплитудные спектры процессов $u_i(t), u_j(t), f_i(t)$ и $f_j(t)$ обозначают соответственно через $\Phi_{u_i}(\omega), \Phi_{u_j}(\omega), \Phi_{f_i}(\omega)$ и $\Phi_{f_j}(\omega)$, а передаточную функцию уравнения (9.9) – через $H_k(i\omega)$. Тогда имеем равенство

$$\Phi_{u_i}(\omega_1) = H_i(i\omega_1)\Phi_{f_i}(\omega_1); \quad \Phi_{u_j}(\omega_2) = H_j(i\omega_2)\Phi_{f_j}(\omega_2);$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi^*{}_{u_i}(\omega_1)\Phi_{u_j}(\omega_2)\rangle &= S_{u_i u_j}(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2) = \\ &= H_i^*(i\omega_1)H_j(i\omega_2)\,\langle \Phi_{f_i}(\omega_1)\Phi_{f_j}(\omega_2)\rangle = \\ &= H_i^*(i\omega_1)H_j(i\omega_2)S_{f_i f_j}(\omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_2),\end{aligned} \tag{9.12}$$

где $S_{u_i u_j}(\omega)$ – элементы матрицы спектральных плотностей процесса $\vec{u}(t)$;

$$H_i^*(i\omega) = \frac{1}{(1 - i\eta)\omega_i^2 - \omega^2}; \quad H_j(i\omega) = \frac{1}{(1 - i\eta)\omega_j^2 - \omega^2}.$$

Из (9.12) следует, что

$$S_{u_i u_j}(\omega) = H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) S_{f_i f_j}(\omega).$$

Поскольку $q_i(t) = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} u_j(t)$, то для искомых элементов матрицы спектральных плотностей процесса $\vec{q}(t)$ получаем

$$S_{q_i q_j}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} V_{i\alpha} V_{j\beta} S_{u_\alpha u_\beta}(\omega).$$

Лекция 10. Метод статистической линеаризации в динамике нелинейных систем

Рассмотрим метод статистической линеаризации для расчета нелинейных систем при случайных внешних воздействиях на примере системы, описываемой уравнением

$$L\{q(t)\} + \varphi(q) = f(t), \tag{10.1}$$

где $L -$ линейный дифференциальный оператор; $\varphi(q) -$ нелинейная составляющая жесткости упругого элемента (рис. 10.1); $f(t) -$ гауссов стационарный процесс воздействий со средним значением, равным нулю.

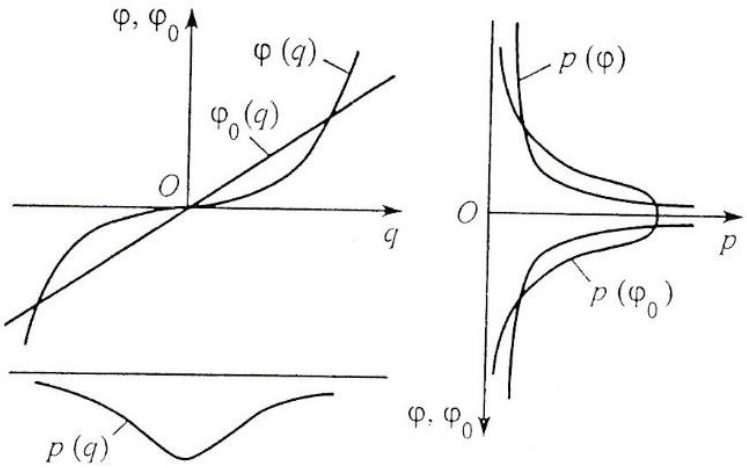


Рис. 10.1

В силу нелинейности упругой характеристики процесс на выходе рассматриваемой динамической системы $q(t)$ уже не является нормальным (гауссовым). Однако в инженерных расчетах полагают, что он мало отличается от нормального процесса и задача состоит лишь в определении его неизвестных параметров. Выбор такого подхода обусловлен возможностью использования основной предельной теоремы вероятностей. Она утверждает, что сумма большого числа случайных величин в пределе стремится к нормальному закону распределения вероятностей. В рассматриваемом случае процесс $q(t)$ получается в результате интегрирования случайных процессов.

Заменим в (10.1) нелинейную функцию $\varphi(q)$ на линейную $\varphi_0(q) = kq$ так, чтобы при этом решение уравнения (10.1) изменилось незначительно. При этом параметр k зависит от интенсивности воздействий и его необходимо найти. Этот параметр можно определить, например, из условий равенства дисперсий функций $\varphi(q)$ и $\varphi_0(q)$, т.е. из равенства

$$\langle \varphi^2(q) \rangle = k^2 \langle q^2 \rangle. \tag{10.2}$$

Соответствующие этому равенству плотности распределений вероятностей $p(\varphi)$ и $p(\varphi_0)$ также показаны на рис. 10.1.

Из (10.2) находим

$$k = \sqrt{\frac{\langle \varphi^2(q) \rangle}{\langle q^2 \rangle}}. \tag{10.3}$$

Параметр k также можно определить по критерию минимума квадрата отклонений функции $\varphi(q)$ и $\varphi_0(q)$, т.е. из условия

$$\langle |\varphi(q) - kq|^2 \rangle = J = \min \ .$$

Отсюда находим:

$$k = \frac{\langle q\varphi(q) \rangle}{\langle q^2 \rangle} \tag{10.4}$$

Пусть процесс $q(t)$ характеризуется плотностью распределения вероятностей $p(q, s)$, где s – параметр, который необходимо определить. Тогда из соотношений (10.3) и (10.4) можно найти зависимость $k = k(s)$. Использовав ее в решении уравнения (10.1), получаем следующее уравнение для определения неизвестного параметра s:

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega) d\omega}{|L(i\omega) + k(s)|^2}, \tag{10.5}$$

где $S_f(w)$ – спектральная плотность процесса $f(t)$.

Рассмотрим теперь нелинейное дифференциальное уравнение

$$L\{q(t)\} + \varphi_1(\dot{q}) + \varphi_2(q) = f(t)$$

где L – линейный дифференциальный оператор, $\varphi_1(\dot{q})$ – нелинейная составляющая функции демпфирования, $\varphi_2(q)$ – нелинейная составляющая жесткости упругого элемента, $f(t)$ – гауссов стационарный процесс с нулевым средним значением и спектральной плотностью $S_f(\omega)$.

Заменим нелинейные функции $\varphi_1(\dot{q})$ и $\varphi_2(q)$ на линейные $k_1(s)\dot{q}$ и $k_2(s)q$, где s^2 – искомая дисперсия процесса $q(t)$.

Получаем линейное дифференциальное уравнение

$$L\{q(t)\} + k_1(s)\dot{q} + k_2(s)q = f(t)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{L(i\omega) + k_1(s)i\omega + k_2(s)}$$

Дисперсии S_q^2 и $S_{\dot{q}}^2$ процессов $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ будут определяться по формулам

$$S_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega$$

$$S_{\dot{q}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega\,.$$

После вычисления интегралов последние два равенства будут представлять собой систему двух связанных алгебраических уравнение для определения S_q и $S_{\dot{q}}$.

Пример 1.

Пусть $L = \frac{d^2}{dt^2} + 2n\frac{d}{dt} + \omega_0^2$; $\varphi(q) = q^3$ (величина q имеет нормальный закон распределения вероятностей со средним значением, равным нулю, и дисперсией s^2); $f(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $S_f(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} = const$.

В соответствии с (2.10) имеем

$$\langle \varphi^2(q) \rangle = \langle q^6 \rangle = 15s^6;$$

$$\langle q\omega(q)\rangle = \langle q^4\rangle = 3s^4.$$

Отсюда следует, что $k = \alpha s^2$, где при использовании соотношения (10.3) получаем $\alpha = \sqrt{15}$, а $(10.4) - \alpha - 3$. После вычислений из (10.5) находим

$$s^2 \approx \frac{k_0}{4n\omega_0^2}\left(1 - \frac{\alpha k_0}{4n\omega_0^4}\right). \tag{10.6}$$

Поправка на нелинейность системы определяется вторым слагаемым в (10.6).

Пример 2.

Заменим в примере 1 белый шум на воздействие со спектральной плотностью $S_f(\omega) = \frac{1}{2}k_0\delta(|\omega| - \omega_*)$.

Подставив это выражение в (10.5) и вычислив интеграл, найдем что дисперсия s^2 процесса $q(t)$ определяется из решения следующего кубического уравнения:

$$s^2(\alpha s^2 + \omega_0^2 - \omega_*^2)^2 + 4\omega_*^2 s^2 - k_0 = 0, \tag{10.7}$$

из которого в зависимости от соотношения параметров для s^2 можно получить одно действительное и два комплексных значений или три действительных. В первом случае решение задачи окажется однозначным. Три решения $s_1^2 > s_2^2 > s_3^2$ во втором случае соответствуют двум устойчивым решениям (при s_1^2 и s_3^2) и одному s_2^2 неустойчивому решению, которое не реализуется. Выбор в пользу дисперсии s_1^2 и s_3^2 в рамках рассматриваемого решения поставленной задачи сделан быть не может. Итоговый результат зависит от истории нагружения: если выход на режим $\omega = \omega_*$ происходит с частоты $\omega < \omega_*$, то следует принять значение s_1^2, если же выход на этот режим осуществляется с частоты $\omega > \omega_*$ то принимают значение s_3^2.

Пример 3.

Рассмотрим уравнение

$$L\{q(t)\} + C_1 sign(\dot{q}) + C_2 sign(q) = f(t)\,,$$

где C_1 и C_2 – параметры.

При линеаризации по критерию равенства дисперсий получаем уравнение

$$L\{q(t)\} + C_1 k_1 \dot{q} + C_2 k_2 q = f(t),$$

где $k_1 = \frac{1}{S_{\dot{q}}}$, $k_2 = \frac{1}{S_q}$

Систему уравнений для определения дисперсий процессов $q(t)$ получаем в виде

$$S_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega)d\omega}{\left|L(i\omega) + \frac{C_1}{S_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{S_q}\right|^2}$$

$$S_{\dot{q}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 S_f(\omega)d\omega}{\left|L(i\omega) + \frac{C_1}{S_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{S_q}\right|^2}$$

Подставив $S_f(\omega) = \frac{1}{2} k_0 \delta(|\omega| - \omega_*)$ получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения S_q и $S_{\dot{q}}$

$$\begin{cases} S_q^2 = \dfrac{k_0}{\left|L(i\omega) + \frac{C_1}{S_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{S_q}\right|^2} \\ S_{\dot{q}}^2 = \dfrac{\omega_*^2 k_0}{\left|L(i\omega) + \frac{C_1}{S_{\dot{q}}} i\omega + \frac{C_2}{S_q}\right|^2} \end{cases}$$

Лекция 11. Особенности статистической динамики систем с кинематическими воздействиями

Ключевой вопрос при оценке вибронагруженности элементов конструкций мобильных динамических систем при их движении по дорогам со случайными неровностями состоит в определении вероятностных характеристик кинематических воздействий $\vec{f}(t)$, интенсивность которых зависит от профиля пути $y(x)$, скорости движения v, сглаживающих свойств деформируемых шин колеса и ряда других факторов. Пример такой системы показан на рис. 11.1.

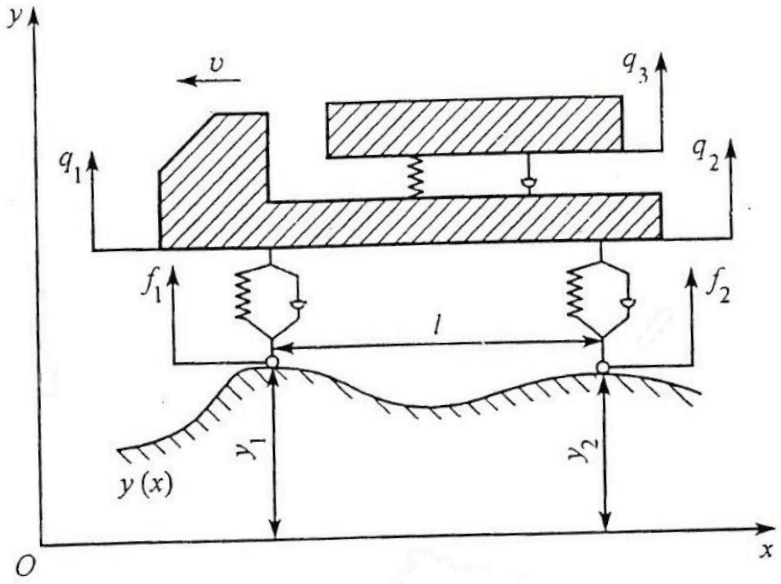


Рис. 11.1

Будем считать, что рассматриваемая система описывается уравнением

$$L\{\vec{q}(t)\} = \vec{f}(t)$$

где $L -$ матрица линейных дифференциальных операторов; $\vec{q}(t) -$ вектор обобщенных координат, вероятностные характеристики которого можно определить по вероятностным характеристикам процесса $\vec{f}(t)$ методами, описанными в лекциях 8 и 9.

Размерность n процесса $\vec{f}(t)$ зависит от числа контактов колес машины с дорогой. Далее примем $n = 2$.

Корреляционную функцию неровностей дороги обозначим $K_y(x)$, а соответствующую спектральную плотность $-S_y(\theta)$, где $x -$ «путевая» координата; $\theta -$ «путевая» частота. Задача состоит в определении матрицы спектральных плотностей кинематических воздействий

$$\begin{bmatrix} S_{f_1}(\omega) & S_{f_1 f_2}(\omega) \\ S_{f_2 f_1}(\omega) & S_{f_2}(\omega) \end{bmatrix}.$$

При постоянной скорости v и времени τ имеем $x = v\tau$. Тогда получаем

$$K_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta) e^{i\theta x} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta) e^{i\theta v\tau} d\theta = K_f(\tau, v),$$

где $K_f(\tau, v) -$ корреляционная функция кинематического воздействия, соответствующая скорости v.

Спектральные плотности кинематических воздействий (опустив индексы 1 и 2) определяются как

$$S_f(\omega, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau, v) e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau(\omega - \theta v)} d\tau \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta) \delta(\omega - \theta v) d\theta = \frac{1}{v} S_y\left(\frac{\omega}{v}\right), \qquad (11.1)$$

где $\delta(\cdot) -$ дельта функция.

Для примера рассмотрим преобразование спектральной плотности, определенной при $v = 1$, $S_f(\omega, v = 1) = 1$, $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$, в спектральную плотность, получаемую при $v = 2$. В соответствии с (11.1) имеем

$S_f(\omega, v = 2) = \frac{1}{2}$ при $\omega_1 \le \frac{\omega}{2} \le \omega_2$, т.е. при $2\omega_1 \le \omega \le 2\omega_2$. Полученный результат проиллюстрирован на рис. 11.2.

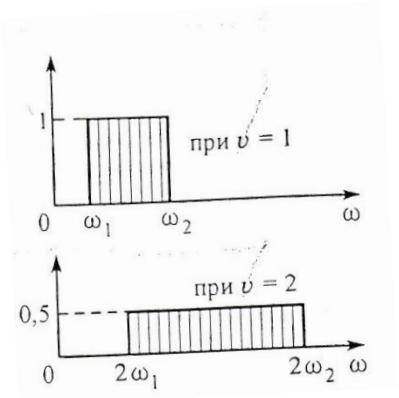


Рис. 11.2

Обозначим расстояние между точками контакта колес l . Тогда взаимную корреляционную функцию соответствующих неровностей дороги можно найти по формуле

$$K_{y_1y_2}(x) = \langle y_1(0)y_2(x)\rangle = \langle y_1(0)y_2(l+x)\rangle = K_y(l+x) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta)e^{i\theta(l+v\tau)}d\theta = K_{f_1f_2}(\tau, v),$$

где $K_{f_1f_2}(\tau, v)$ – взаимная корреляционная функция кинематических воздействий $f_1(t)$ и $f_2(t)$, зависящая от скорости движения v.

Взаимную спектральную плотность процессов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяют как

$$S_{f_1f_2}(\omega, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{f_1f_2}(\tau, v)e^{-i\omega\tau}d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau+i\theta(l+v\tau)}d\tau\right)d\theta =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta)e^{i\theta l}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau(\omega-v\theta)}d\tau\right)d\theta =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\theta)e^{i\theta l}\delta(\omega-\theta v)d\theta = \frac{1}{v}e^{\frac{il\omega}{v}}S_y\left(\frac{\omega}{v}\right) = e^{\frac{il\omega}{v}}S_f(\omega, v).$$

При $l = 0$ вновь получаем формулу (11.1).

В общем случае скорость движения $v(t)$ является случайной функцией времени, поэтому соответствующие корреляционные функции и спектральные плотности кинематических воздействий также будут случайными функциями времени. При этом наибольшее практическое значение имеет учет рассеивания скорости движения как случайной величины. Тогда корреляционные функции и спектральные плотности кинематических воздействий будут функциями случайного аргумента и все их вероятностные характеристики можно будет определить с помощью методов теории вероятностей.

Так, для ожидаемого значения спектральной плотности процесса $f(t)$ получаем

$$\langle S_f(\omega)\rangle = \int_0^{\infty} f(v)S_y\left(\frac{\omega}{v}\right)\frac{dv}{v},$$

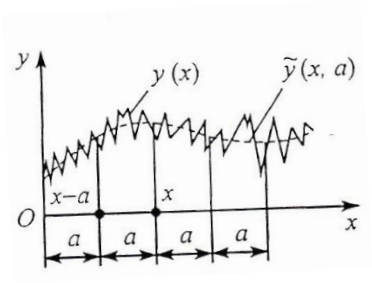
где $\langle\cdot\rangle$ – знак математического ожидания; $f(v)$ – плотность вероятности скорости v.

В случае если скорость движения v представляет собой вероятностную смесь n скоростей движения v_i со статистическими весами $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$, т.е. если

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta(v - v_i), \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

то ожидаемое значение спектральной плотности процесса $f(t)$ получаем в виде

$$\langle S_f(\omega) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{v_i} S_y\left(\frac{\omega}{v}\right), \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$



Размеры колес, упругие свойства материалов, из которых они изготовлены, давление в шинах и ряд других факторов оказывают определенное влияние на интенсивность кинематических воздействий. При этом в качестве обобщенной характеристики сглаживающих свойств колеса можно принять ширину отпечатка шины на дороге a, а сглаживание заменить на усреднение высот неровностей, выраженное соотношением

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{a} \int_{x-a}^{x} y(t) dt, \qquad (11.2)$$

где черта сверху указывает на сглаженный профиль дороги.

Рис. 11.3

Продифференцировав (11.2), получим

$$\dot{\tilde{y}}(x) = \frac{1}{a}\big(y(x) - y(x - a)\big).$$

Отсюда следует, что сглаженный профиль пути можно определить из решения уравнения

$$a\dot{\tilde{y}}(x) + \tilde{y}(x) = y(x)$$

с передаточной функцией $H(i\theta) = \frac{1}{ai\theta + 1}$.

В соответствии с этой функцией спектральная плотность сглаженного профиля дороги определяется по спектральной плотности исходного профиля по формуле

$$S_{\tilde{y}}(\theta) = \frac{S_y(\theta)}{a^2\theta^2 + 1}.$$

Отсюда следует, что эффективность сглаживания зависит от величины a и при $a = 0$ сглаживания профиля не происходит.

Лекция 12. Статистическая динамика распределенных систем

В соответствии с основными законами сопротивления материалов и понятием о распределенной силе инерции колебания ряда распределенных систем можно описать уравнением

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + CV = q, \tag{12.1}$$

где $\mu -$ распределенная масса или момент инерции; $V = V(x,t) -$ перемещение точки с координатой x в момент времени t; $C -$ упругий оператор системы; $q = q(x,t) -$ заданная распределенная нагрузка.

Оператор C можно определить следующим образом:

для изгибных колебаний $C = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$;

для крутильных колебаний $C = -\frac{\partial}{\partial x}\left(GI_k\frac{\partial}{\partial x}\right)$;

для продольных колебаний $C = -\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial}{\partial x}\right)$;

для колебаний натянутой нити $C = -\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Здесь $E, G -$ модули упругости; $I, I_k -$ моменты инерции; $A -$ площадь сечения; $N -$ усилие натяжения нити.

Начальные условия задаются функциями $V_0(x) = V(x,0)$ и

$\dot{V}_0(x) = \dot{V}(x,0)$.

При $q = 0$ уравнение (12.1) описывает свободные колебания, при этом перемещения получаем в виде

$$V(x,t) = \varphi(x)cos\omega t, \tag{12.2}$$

где форму $\varphi(x)$ и частоту колебаний ω необходимо определить.

Подставив (12.2) в (12.1), получим уравнение

$$(C - \mu\omega^2)\varphi = 0. \qquad (12.3)$$

При $C = -EA\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и граничных условиях $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(l) = 0$ из (12.3) находим

$$\varphi_k(x) = sin\frac{\pi(2k-1)}{2}\frac{x}{l};$$

$$\omega_{0,k} = \frac{\pi(2k-1)}{2l}\sqrt{\frac{EA}{\mu}}.$$

Аналогично в теории колебаний определяют форму и частоту свободных колебаний при других упругих операторах и граничных условиях.

Напомним, что скалярное произведение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на интервале $(0, l)$ находят как

$$\big(\varphi(x), \psi(x)\big) = \int_0^l \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Для ортогональных функций это произведение равно нулю.

Запишем уравнение (12.3) для двух форм колебаний $\varphi_k(x)$ и $\varphi_j(x)$:

$$(C - \mu\omega_k^2)\varphi_k = 0;$$

$$\big(C - \mu\omega_j^2\big)\varphi_j = 0.$$

Умножим первое уравнение скалярно на $\varphi_j(x)$, а второе – на $\varphi_k(x)$ и вычтем из второго уравнения первое. В результате этого получаем

$$\big(\omega_k^2 - \omega_j^2\big)\big(\varphi_k, \varphi_j\big) = 0.$$

При $k \neq j$ имеем $(\varphi_k, \varphi_j) = 0$, т.е. две различные формы колебаний ортогональны.

Умножив уравнение (12.3) скалярно на φ, получим формулы Релея для определения спектра частот свободных колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{(C\varphi, \varphi)}{(\mu\varphi, \varphi)} = \frac{\lambda}{m};$$

$$\omega_{0,k}^2 = \frac{(C\varphi_k, \varphi_k)}{(\mu\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\lambda_k}{m_k},$$

где m_k , $\lambda_k -$ обобщенные масса и жесткость, соответствующие k-й форме колебаний.

Решение уравнения (12.1) можно найти в виде разложения по формам свободных колебаний (в этом состоит суть приближенности рассматриваемого решения):

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) u_k(t), \tag{12.4}$$

где $u_k(t) -$ функции, которые необходимо определить.

Подставив (12.4) в (12.1), имеем

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \ddot{u}_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) C\varphi_k(x) = q(x,t). \tag{12.5}$$

Умножив (12.5) скалярно на $\varphi_k(x)$, с учетом ортогональности форм колебаний получим следующую систему независимых уравнений:

$$m_k \ddot{u}_k + \lambda_k u_k = Q_k(t) = \big(q(x,t), \varphi_k(x)\big), \tag{12.6}$$

где $Q_k(t) -$ обобщенная сила, соответствующая -й форме колебаний.

Уравнения (12.6) также можно представить в виде

$$\ddot{u}_k + \omega_{0,k}^2 u_k = f_k(t) = \frac{Q_k(t)}{m_k}. \qquad (12.7)$$

Таким образом, задача сведена к задаче, рассмотренной в лекции 9. Некоторые особенности ее решения состоят лишь в определении обобщенных сил $f_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, где $n -$ число форм колебаний, учитываемых в расчете.

В качестве примера проведем анализ вынужденных колебаний балки, показанной на рис. 12.1. Для этого в уравнении (12.1) величину μ следует заменить на $(\mu + \mu_0)$, где $\mu_0 = m_0\delta(x - x_0)$; величину $\ddot{V} -$ на $\left(\ddot{V} - \ddot{Y}\right)$, где $\ddot{Y} = \ddot{Y}_1 \frac{l-x}{l} + \ddot{Y}_2 \frac{x}{l}$; функцию $q(x,t) -$ на $\left(q_{\text{ин}} + q_0 + q_{\text{д}} + q_F + q_m\right)$, где сила инерции $q_{\text{ин}} = -(\mu + \mu_0)\left(\ddot{V} - \ddot{Y}\right)$; $q_0 = q_0(x,t)$; сила демпфирования

$q_{\text{д}} = -b\dot{V}$ (здесь $b -$ заданный параметр); $q_F = F(t)\delta(x - x_1)$;

$q_m = -M(t)\delta'(x - x_2)$.

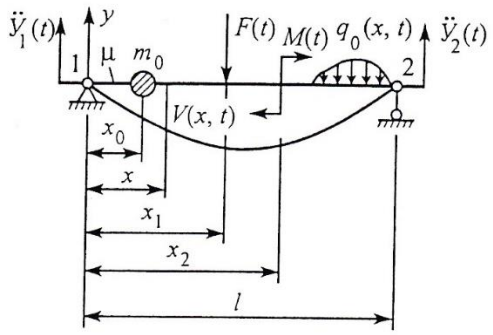


Рис. 12.1

В результате этого получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = -(\mu - \mu_0)\left(\ddot{V} - \ddot{Y}\right) - b\dot{V} +$$

$$+F\delta(x - x_1) - M\delta'(x - x_2) + q_0(x,t). \qquad (12.8)$$

Решение этого уравнения найдем в виде соотношения (12.4).

Подставив (12.4) в (12.8), имеем

$$(\mu-\mu_0)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\ddot{u}_k(t)-\ddot{y}\right)+b\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\dot{u}_k(t)+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)(EJV'')''=$$

$$=q_0(x,t)+F\delta(x-x_1)-M\delta'(x-x_2). \qquad (12.9)$$

Умножив скалярно соотношение (12.9) на $\varphi_k(x)$, получим систему независимых уравнений:

$$m_k\ddot{u}_k+b_k\dot{u}_k+\lambda_k u_k=Q_k(t), \qquad (12.10)$$

где для рассматриваемой балки

$$\varphi_k(x)=\sin\frac{\pi kx}{l};$$

$$\lambda_k=((EJ\varphi_k'')'',\varphi_k)=EJ\frac{\pi^4k^4}{2l^3};$$

$$b_k=b(\varphi_k,\varphi_k)=\frac{bl}{2};$$

$$m_k=\big((\mu+\mu_0)\varphi_k,\varphi_k\big)=\frac{m}{2}+m_0\sin\frac{\pi kx_0}{l};$$

$$Q_k=Q_{q_0,k}+Q_{\ddot{y},k}+Q_{F,k}+Q_{m,k};$$

$$Q_{q_0,k}=\big(q_{0(x,t)},\varphi_k\big);$$

$$Q_{F,k}=\big(F\delta(x-x_1),\varphi_k(x)\big)=F(t)\sin\frac{\pi kx_1}{l};$$

$$Q_{m,k}=-\big(M(t)\delta'(x-x_2),\varphi_k(x)\big)=M(t)\frac{\pi k}{l}\sin\frac{\pi kx_2}{l}.$$

Уравнение (12.10) также можно представить в виде

$$\ddot{u}_k+2n_k\dot{u}_k+\omega_{0,k}^2u_k=f_k(t), \qquad (12.11)$$

где $2n = \frac{b_k}{m_k}$; $\omega_{0,k}^2 = \frac{\lambda_k}{m_k}$; $f_k(t) = \frac{Q_k(t)}{m_k}$.

Передаточные функции для уравнения (12.11) имеют вид

$$H_k(i\omega) = \frac{1}{\omega_{0,k}^2 - \omega^2 + 2n_k i\omega}.$$

Амплитудный спектр $\Phi_{u_k}(\omega)$ процесса $u_k(t)$ будет определяться через амплитудный спектр $\Phi_{f_k}(\omega)$ процесса $f_k(t)$ по формуле

$$\Phi_{u_k}(\omega) = H_k(i\omega)\Phi_{f_k}(\omega)$$

В соответствии с теоремой Винера имеем равенства

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_{u_i}^*(\omega_1)\Phi_{u_j}(\omega_2)\rangle = S_{u_i u_j}(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2) = \\ &= \langle H_i^*(i\omega_1)H_j(i\omega_2)\Phi_{f_i}(\omega_1)\Phi_{f_j}(\omega_2)\rangle = \\ &= H_i^*(i\omega_1)H_j(i\omega_2)S_{f_i f_j}(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2), \end{aligned} \tag{12.12}$$

где $S_{u_i u_j}(\omega)$ и $S_{f_i f_j}(\omega)$ – взаимные спектральные плотности процессов $u_i(t)$ и $u_j(t)$ и процессов $f_i(t)$ и $f_j(t)$.

Из соотношений (12.12) следует, что

$$S_{u_i u_j}(\omega) = H_i^*(i\omega)H_j(i\omega)S_{f_i f_j}(\omega).$$

Напряжения в балке будут определяться по формуле

$$\sigma(x,t) = \frac{EJ}{W}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k''(x).$$

Спектральные плотности для напряжений будут определяться как

$$S_{\sigma(x)}(\omega) = \left(\frac{EJ}{W}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} S_{u_i u_j}(\omega)\varphi_i''(x)\,\varphi_j''(x).$$

Заключение

В учебном пособии рассмотрены теоретические основы решения задач динамики и надежности механических систем, находящихся в эксплуатации под воздействием случайных нагрузок. Оно включает математическое описание вероятностного рассеивания значений случайных величин в виде их статических характеристик и в виде плотностей интегральных и характеристических функций распределения вероятностей.

Описаны основы расчетов параметрической надежности элементов конструкций, как определение вероятностей того, что параметры качества их функционирования в течение определенного времени ни разу не выйдут за пределы допустимых значений.

В учебном пособии использована корреляционная теория непрерывных случайных процессов, в основе которой лежит теорема Н. Винера о стохастической ортогональности амплитудных спектров таких процессов.

Сформулированы и решены основные задачи статистической динамики механических систем, состоящие в определении вероятностных характеристик реакций этих систем на внешние случайные воздействия, заданные своими вероятностными характеристиками – корреляционными функциями и энергетическими спектрами.

В качестве основных методов решения поставленных задач использованы методы стохастических дифференциальных уравнений, метод функций Грина и метод спектральных представлений Фурье. Рассмотрены также методы решения задач о случайных параметрических колебаниях.

Нелинейные задачи статической динамики решаются методом линеаризации, методом малого параметра Пуанкаре и методом стохастических дифференциальных уравнений.

Заключительная часть учебного пособия состоит в решении задач структурного анализа траекторий случайных процессов. Описаны задачи об определении числа нулей, экстремумов и точек перегиба траекторий, об определении законов распределения вероятностей для максимумов, амплитуд и средних значений циклов, а также задача об абсолютном максимуме случайного процесса. Информация о структуре случайных процессов может быть использована в расчетах на усталостную долговечность и живучесть элементов конструкций с трещинами при нерегулярных случайных воздействиях.

Литература

Гусев А.С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 223 с.

Гусев А.С., Найденов С.О. Об устойчивости функционирования механических систем // Известия вузов. Машиностроения. 2012. № 3. С. 4-7.

Гусев А.С., Найденов С.О. Методы сглаживания траекторий случайных процессов // Известия вузов. Машиностроения. 2012. № 3. С. 8-10.

Гусев А.С., Стародубцева С.А. Случайные колебания стержней в жидкости // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 2. С. 25-28.

Гусев А.С., Стародубцева С.А., Щербаков В.И. Надежность транспортной системы при движении по дорогам с неровностями // Ассоциация автомобильных инженеров. 2013. № 3. С. 41-44.

Гусев А.С., Стародубцева С.А., Щербаков В.И. Оценка вибронагруженности длинномерного груза // Автомобильная промышленность. 2014. № 2. С. 6-8.

Гусев. А.С., Щербаков В.И. Расчеты на долговечность конструкций // Вестник машиностроения. 2015. № 2. С. 3-8.

Гусев А.С., Даниленко К.Б. Вероятностная оценка появления в элементах конструкций усталостных повреждений // Известия вузов. Машиностроение. 2016. № 3. С. 3-7.

Гусев А.С., Стародубцева С.А. Оценка вибрационной нагруженности сооружений на платформах // Известия вузов. Машиностроение. 2016. № 12. С. 28-32.

Гусев А.С. Введение в динамику машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 30 с.

Место для формулы.