

А.С. Гусев

Основы расчетов элементов конструкций на прочность и жесткость

Оглавление.

1. Основные понятия и определения	1.
2. Растяжение и сжатие стержней	4.
3. Механические характеристики	7.
4. Основы расчетов на прочность	8.
5. Расчеты на сдвиг	10.
6. Кручение круглых стержней	11.
7. Кручение тонкостенных стержней	15.
8. Изгиб балок	18.
9. Расчеты на жесткость при изгибе	20.
10. Энергетические теоремы	23.
11. Теория напряжений	26.
12. Статически неопределимые системы изгиба	31.
13. Расчет оболочек	33.
14. Расчет цилиндров	34.
15. Расчет пружин	36.
16. Расчеты на устойчивость	40.
17. Расчеты на усталость	43.
18. Расчеты на удар	50.

1. Основные понятия и задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов – это учебная дисциплина в вузах, в которой изучаются основы инженерных методов расчета прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций. Под элементом конструкции понимается любая деталь машины, устройства или сооружения, которая рассматривается без учета особенностей изготовления, условий работы, качества поверхности и других подобных факторов, и в которой на первый план ставится ее геометрическая форма и вид нагружения. Влияние других факторов на прочность реальных деталей может оказаться решающим, однако учет этих факторов при проектировании и расчете рассматриваются в специальных курсах по конструированию и технологии изготовления конструкций.

Под прочностью понимается способность элементов конструкции не разрушаться под воздействием приложенных нагрузок. Под жесткостью – способность сохранять при этом свои размеры и форму. Под устойчивостью – способность сохранять первоначальную форму равновесия.

Сопротивление материалов строится на ряде допущений (гипотез) о свойствах материалов и на ряде упрощающих принципов, положенных в основу расчетов. Так, принимается гипотеза о сплошности материала, по которой считается, что материал не имеет пустот и других внутренних дефектов. По другой гипотезе (гипотезе изотропности) считается, что свойства материала во всех направлениях одинаковы. В расчетах применяются три основных принципа: принцип независимости действия сил, принцип Сен-Венана и принцип первоначальных размеров. По первому из этих принципов считается, что результат суммарного действия нескольких нагрузок равен сумме результатов действия каждой нагрузки в отдельности. Согласно второму принципу локальные особенности деформирования материала в местах приложения нагрузок быстро затухают по мере удаления от этих мест. Согласно третьему принципу считается, что реакция связей и внутренние усилия в элементах конструкций могут быть достаточно точно определены без учета изменения размеров и форм конструкции при нагружении.

Объектами изучения в сопротивлении материалов являются стержни (балки), оболочки и пластины. Стержень (балка) – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (длина) значительно превышает два других. Форма сечений стержней может быть различной. На рис. 1.1а показаны сечения в виде квадрата, круга, двутавра, швеллера и тавра. Возможны различные комбинации этих элементарных сечений. Оболочка – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (толщина) значительно меньше двух других (рис. 1.1, б). Пластина – оболочка, у которой кривизна равна нулю (рис. 1.1, в).

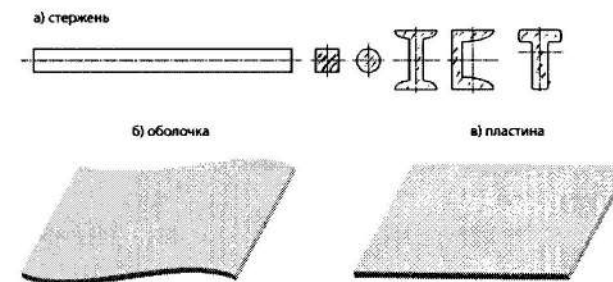


Рис. 1.1

Основным понятием в сопротивлении материалов является понятие о напряжениях. Оно вводится следующим образом. Рассмотрим некоторый элемент конструкции, находящийся под воздействием внешних нагрузок (рис. 1.2, а). Мысленно отделим сечением I-I одну его часть от другой (рис. 1.2, б). Для равновесия каждой из этих частей необходимо, чтобы в сечении возникли такие силы, которые были бы эквивалентны приложенным к ним внешним нагрузкам. При этом в каждой элементарной площадке ΔA сечения возникает элементарная сила ΔF .

Величина

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

называется полным напряжением в точке. Это напряжение измеряется в паскалях – Па или мегапаскалях – МПа:

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \text{МПа} = 10^6 \text{ Па}$$

Полное напряжение в точке (см. точку А на рис. 1.2в) можно разложить на две составляющие: нормальное напряжение σ и касательное τ .

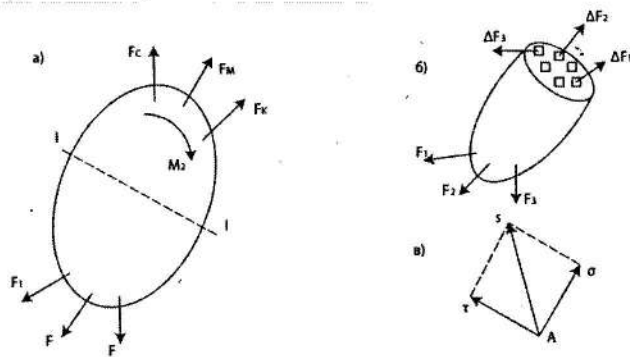


Рис. 1.2

Важнейшим понятием в сопротивлении материалов является понятие о внутренних силовых факторах. Оно вводится с помощью метода сечений, при котором элемент конструкции мысленно рассекается на две части. В каждой из частей все внутренние силы приводятся к одной вектор-силе \vec{F} , приложенной в центре тяжести сечения, и вектор-моменту \vec{M} (рис. 1.3, а). Поместим в центр тяжести сечения систему координат $\{x, y, z\}$ и разложим \vec{F} и \vec{M} на составляющие: $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ (рис. 1.3, б). Эти составляющие называются внутренними силовыми факторами.

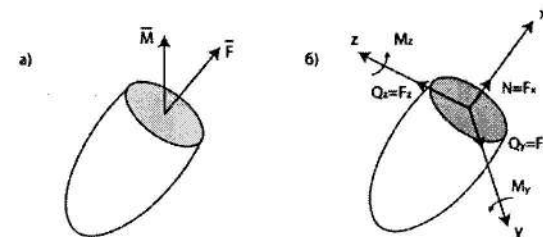


Рис. 1.3

Сила $F_x = N$ называется нормальной силой (силой растяжения или сжатия). Силы $F_y = Q_y$ и $F_z = Q_z$ – силами сдвига. Момент $M_x = M_{кр}$ – крутящим моментом. Моменты M_y и M_z – изгибающими моментами.

Для определения внутренних силовых факторах достаточно составить и решить шесть уравнений равновесия для любой из отсеченных частей элемента конструкции.

Нагружение стержня называется простым, если в его сечениях возникает только один силовой фактор. В противном случае нагружение называется сложным.

Простыми видами нагружения являются: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и изгиб. К сложным нагружениям относятся: изгиб с растяжением, изгиб с кручением и т.п.

2. Растяжение и сжатие стержней

1. Анализ напряженного состояния

Рассмотрим растянутый силами F стержень с переменной площадью сечений A , показанный на рис.2.1а. Сечениями (1-1) и (2-2) разделим его на три части, каждая из которых находится в равновесии под действием внешних сил F и внутренних усилий с интенсивностями (напряжениями)

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} > \sigma_2 = \frac{F}{A_2} \text{ при } A_2 > A_1$$

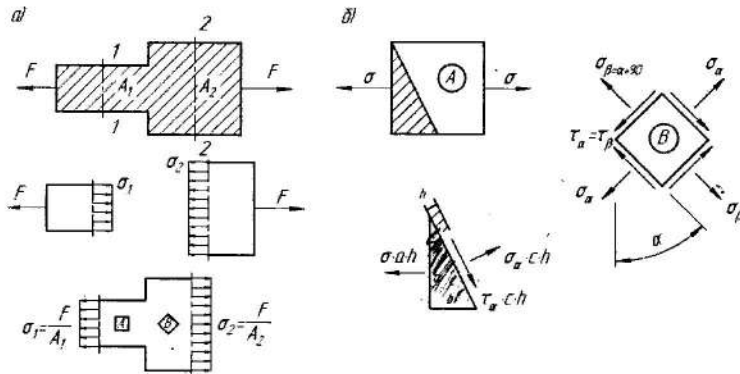


Рис.2.1 Анализ напряженного состояния

Напряженное состояние элементарных разно расположенных квадратов А и В показаны на рис.2.1, б. Определим напряжения $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha, \tau_\beta$ по заданному напряжению σ и углу α .

Элементарная треугольная призма со сторонами a, b, c и толщиной h находится в равновесии под действием сил $\sigma ah, \sigma_\beta ch, \tau_\alpha ch$. Из условий ее равновесия получаем формулы для определения напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha, \tau_\beta$:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \tau_\beta = \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2\alpha, \tau_{max} = \tau_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma$$

2. Законы Гука и Пуассона

Экспериментально установлено, что при растяжении стержня происходит изменение его линейных l, h, b размеров и объема V , т.е. стержень деформируется, схематично так, как это показано на рис.2.2.

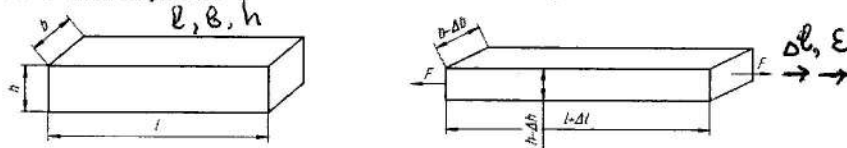


Рис.2.2. Деформации стержня при растяжении

Величины $\Delta l, \Delta h, \Delta b$ называются абсолютными линейными деформациями, ΔV - абсолютной объемной деформацией.

Величины

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}; \epsilon_n = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}; \epsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$$

называются относительной продольной деформацией, относительной поперечной деформацией и относительной объемной деформацией, соответственно.

Экспериментально установлено, что при малых деформациях имеют место следующие зависимости.

Закон Гука: $\sigma = E \cdot \epsilon$ (2.1)

Закон Пуассона: $\epsilon_n = -\mu \epsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}$ (2.2)

Величина E называется модулем упругости, величина μ - коэффициентом Пуассона. **Дополнительно:** $\epsilon_v = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$ (2.3)

Для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,28$.

Для меди $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,33$.

Для алюминия $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,35$.

При нагревании стержня длиной l на t градусов происходит его удлинение на величину $\Delta l_t = \alpha l t$,

где α - коэффициент линейного расширения.

Соответственно изменяются размеры стержня h, b и его объем V .

Для стали $\alpha_{ст} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Для меди $\alpha_m = 1,67 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Для алюминия $\alpha_a = 2,3 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Коэффициент объемного расширения $\beta = 3 \cdot \alpha$.

3. Определение перемещений и потенциальной энергии деформации в растянутом стержне

Рассмотрим заземленный слева стержень с переменной площадью сечения A и переменным модулем упругости E , показанный на рис.2.3.

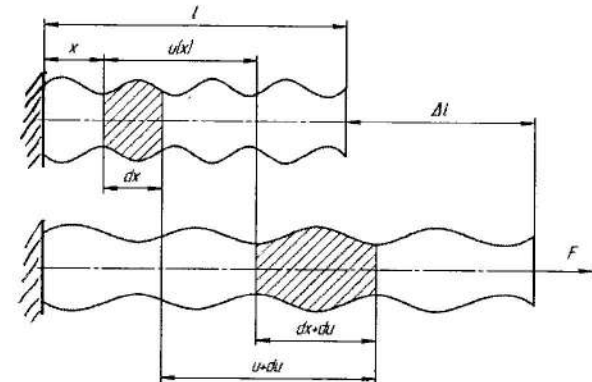


Рис. 2.3 К определению перемещений

Искомое перемещение сечения с координатой x обозначим $u(x)$. Перемещение сечения с координатой $x + dx$ будет $u + du$. Из рисунка и закона Гука видно, что деформацию элемента dx можно определить как

6.

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{EA}$$

Отсюда находим:

$$u(x) = \int_0^x \frac{F}{EA} dx; u(0) = 0; u(l) = \Delta l = \int_0^l \frac{F}{EA} dx$$

Потенциальная энергия деформации $d\Pi$ в элементе длиной dx будет определяться по формуле

$$d\Pi = \frac{1}{2} F du = \frac{F^2 dx}{2EA}$$

а энергии на длинах x и l будут:

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{F^2 dx}{2EA}, \quad \Pi(l) = \int_0^l \frac{F^2 dx}{2EA}$$

Если подынтегральные функции в приведенных формулах есть константы, то имеем:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}; \Pi = \frac{F^2 l}{2EA}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial F} = u(x); \quad \frac{\partial \Pi(x)}{\partial u} = F(x)$$

Первая формула выражает теорему Кастилиано о перемещениях, а вторая - теорему Лагранжа о силах.

В заключение отметим, что приведенные выше формулы относятся к идеальным бездефектным стержням, не имеющим концентраторов напряжений, таких как отверстия и резкие изменения формы, показанные на рис. 2.4.

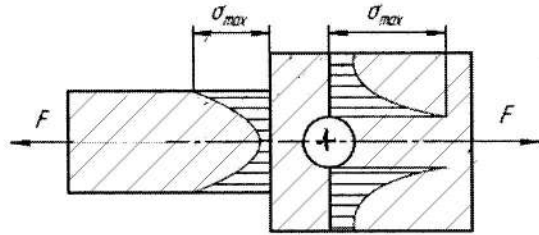


Рис. 2.4. К понятию о концентрации напряжений

Экспериментально установлено, что в этих местах происходит местное увеличение (концентрация) напряжений, которые могут превышать расчетные значения в несколько раз.

Механические характеристика материалов определяются при испытании образцов на растяжение и сжатие. При этом используются специальное испытательные машины, позволяющие одновременно фиксировать нагрузки и соответствующие им деформации образца. После пересчета опытных данных получают зависимость напряжений от деформации $\sigma=f(\varepsilon)$, две из которых показаны на рис.3.1. Диаграмма I относится к малопрочному пластичному материалу, а диаграмма II – к высокопрочному материалу.

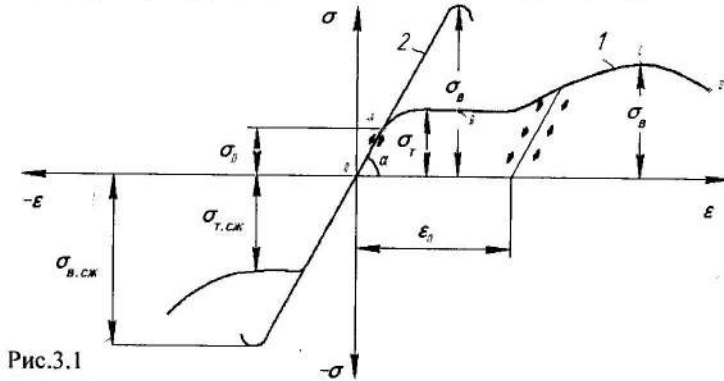


Рис.3.1

Отметим характерные зоны на диаграмме растяжения пластического материала. Зона OA – зона упругости. Здесь выполняется закон Гука: напряжения пропорциональны деформациям. Если в некоторой точке этой зоны прекратить нагружения, а затем уменьшить нагрузку, то разгрузке образца будет происходить по той же линии OA. При нулевой нагрузке все размеры образца возвратятся к первоначальным. Зона АВ – зона общей текучести. Эта зона характеризуется тем, что увеличение деформации происходит почти без увеличения нагрузки. Если остановить нагружение в некоторой точке этой зоны, а затем уменьшить нагрузку, то разгрузке будет происходить по линии, параллельной линии упругости OA. После полного снятия нагрузки образец останется удлиненным на величину остаточной пластической деформации.

Зона BC – зона упрочнения. Она характеризуется тем, что увеличение деформации сопровождается возрастанием напряжений. Если прекратить нагружение в некоторой точке, этой зоны и затем уменьшить нагрузку, то разгрузке будет также происходить по линии, параллельной линии упругости OA. Остаточная пластическая деформация обозначена ε_n . При повторном погружении образца возрастание нагрузки будет происходить по линии разгрузке. В конце стадии упрочнения (в точке C) на образце появляется местное сужение («шейка») – место будущего разрушения. Зона CD – зона местной текучести и разрушения. Удлинение образца в этой зоне носит локальный характер. Оно происходит в основной области «шейки». Точка D соответствует моменту полного разрушения образца.

В зоне упругости выполняется закон Гука $\sigma = \varepsilon E$, где модуль упругости первого рода E определяется как тангенс угла наклона линии упругости к оси ε :

$$E = \text{tg} \alpha \tag{3.1}$$

Отметим основные механические характеристики материалов, определяемые по диаграмме растяжения.

σ_n - предел пропорциональности – наибольшее напряжение, при котором еще сохраняется линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

σ_T – предел текучести – напряжение, при котором рост деформации происходит без заметного увеличения нагрузки.

(если материалы не обладают ярко выраженной зоной текучести (диаграмма II), то за условный предел текучести $\sigma_{0.2}$ (или $\sigma_{0.05}$) принимаются напряжение, при котором остаточная пластическая деформация $\varepsilon_a = 0,2\%$ (или, соответственно, $0,5\%$);

σ_B – предел прочности – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке.

4. Расчеты на прочность и жесткость стержней при растяжении и сжатии

В расчетах на прочность и жесткость стержней используется схематизированная диаграмма растяжения-сжатия, показанная на рис 4.1

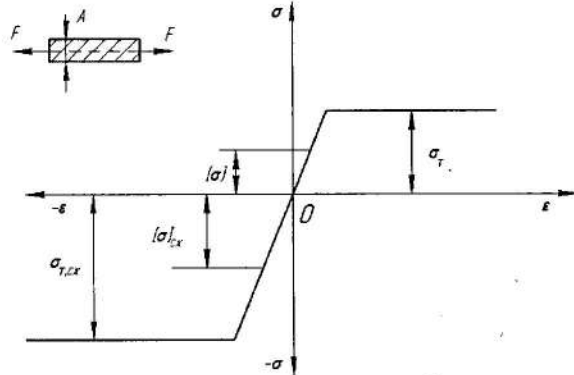


Рис.4.1. Схематизированная диаграмма растяжения сжатия

Здесь σ_T и $\sigma_{T,сж}$ - пределы текучести при растяжении и сжатии. Условие ненаступления в растянутом стержне пластических деформаций имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_T$$

Определяемая из этого условия предельная для стержня сила $F_{np} = \sigma_T A$

Допускаемое для растянутого стержня напряжение определяется по формуле $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$

, где $n_T = 1,5 - 3,0$ – коэффициент запаса прочности.

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

при заданных F и $[\sigma]$ определяется необходимая площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}$$

При заданных $[\sigma]$ и A определяется допустимая для стержня нагрузка

$$[F] \geq A[\sigma]$$

Для расчетов на жесткость используется условие жесткости

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq [\Delta l] = \frac{\Delta l_{np}}{n_j}$$

где Δl_{np} - предельное удлинение стержня, n_j – коэффициент запаса жесткости, Δl - допускаемое удлинение стержня.

Для примера рассмотрим стержневую систему, показанную на рис.4.2

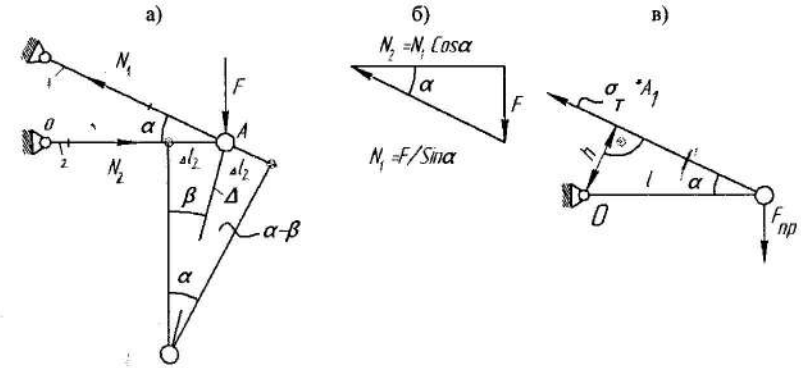


Рис.4.2. К расчету стержневой системы

При заданной силе F , допускаемом напряжении $[\sigma]$ и пределе текучести σ_T , требуется определить площадь поперечных сечений стержней A_1 и A_2 и предельное(разрушающее) для системы F_{np} .

Необходимые для выполнения условной прочности площади сечений стержней будут определяться по формулам:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]}$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]}$$

где $N_1 = F / \sin \alpha$, $N_2 = F \cot \beta$

определены из условия равновесия узла А.

Удлинение стержней будет:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

а полное перемещение Δ узла А и его направление, определяемое углом β , будут определяться из решения следующей системы уравнений

$$\sin \beta = \frac{\Delta l_2}{\Delta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\Delta l_1}{\Delta}$$

На рис.4.2, б показано предельное состояние системы при разрушении первого стержня, в котором предельное усилие равно $\sigma_T A_1$

Из условия равновесия системы

$$\sum M_0 = \sigma_T A_1 h - F_{np} l = 0$$

Находим предельную для нее нагрузку

$$F_{np} = \sigma_T A_1 \sin \alpha$$

5. Расчеты на прочность при сдвиге

Сдвигом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только поперечная сила. В чистом виде сдвиг, как вид нагружения, встречается редко. Характерным примером элемента конструкции, работающего в основном на сдвиг, может служить заклепка в соединении, показанном на рис. 5.1. Определение всех силовых факторов в сечениях заклепки, а также усилий взаимодействий на контактируемых плоскостях представляет собой сложную задачу. Однако, очевидно, что определяющим силовым фактором будет поперечная сила. При этом по плоскости сдвига возникнут касательные напряжения $\tau = F/A$, где A – площадь сечения элемента.

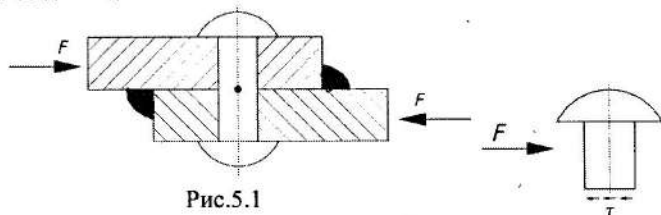


Рис.5.1

Рассмотрим некоторую точку в области сдвига. Представим ее в виде элементарного квадрата, показанного на рис. 5.2,а. Из условия равновесия этого квадрата следует, что на всех его гранях действуют касательные напряжения τ . То есть при сдвиге, так же как и при растяжении, на двух взаимно перпендикулярных площадках возникают касательные напряжения, равные по величине и обратные по направлению созданному ими момента.

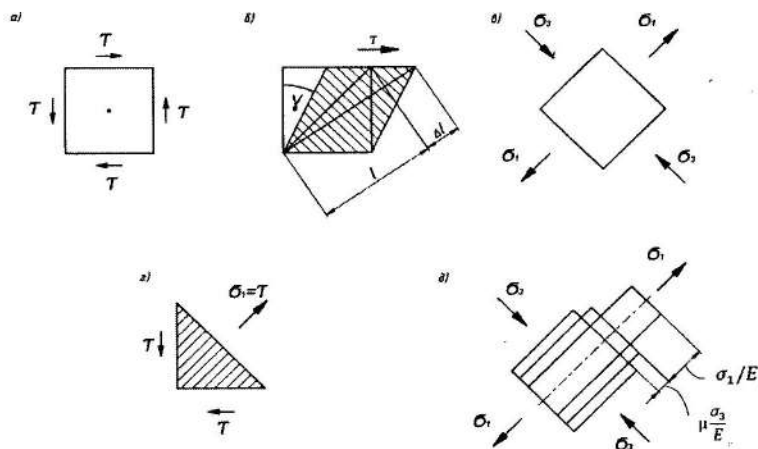


Рис. 5.2

Экспериментально установлено, что в изотропных материалах деформация элементарного квадрата происходит так, как показано на рис. 5.2б.

Угол сдвига обозначается γ . Относительная деформация диагонали рассматриваемого квадрата $\epsilon = \gamma/2$

Выделим теперь малую квадратную область, повернутую относительно заданной на угол 45° (рис. 5.2,в).

Из условий равновесия следует, что материал в этой области находится в состоянии растяжения с напряжением $\sigma_1 = \tau$ и сжатия с напряжением $\sigma_3 = -\tau$ (рис. 5.2,в,г). Индексы 1 и 2 выбраны из условия, что наибольшему по алгебраической величине напряжению дается индекс 1, а наименьшему – 3. Среднему по величине напряжению дается индекс 2. В нашем случае $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$, где σ_2 – напряжение, перпендикулярное плоскости чертежа.

По аналогии с законом Гука при растяжении зависимость угловой деформации γ от величины касательного напряжения τ носит название закона Гука при сдвиге. Для установления этой зависимости вычислим вначале деформацию диагонали рассматриваемого квадрата. Эта деформация обусловлена напряжениями σ_1 и σ_3 . Используя законы Гука и Пуассона, получаем (рис. 5.2д):

$$\epsilon = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \mu) \quad (5.2)$$

Приравняв соотношения (5.1) и (5.2), имеем равенство:

$$\frac{\tau}{E} (1 + \mu) = \frac{\gamma}{2}$$

Отсюда получаем:

$$\tau = G\gamma, \quad (5.3)$$

$$\text{где } G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (5.4)$$

Соотношение (5.3) выражает закон Гука при сдвиге. Коэффициент G называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода. Для стали (при $E=2 \cdot 10^5$ Мпа, $\mu=0,25$) имеем $G=8 \cdot 10^4$ Мпа.

Схематизированная диаграмма деформирования материала при сдвиге показана на рис. 5.3.

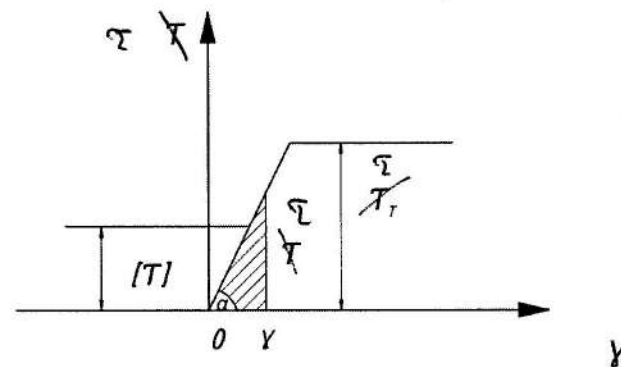


Рис. 5.3 Схематизированная диаграмма при сдвиге.

Здесь τ_T – предел текучести при сдвиге, $[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$ – допускаемое напряжение при сдвиге, n_T – коэффициент запаса прочности при сдвиге, $\text{tg } \alpha = \frac{\tau}{\gamma} = G$ – модуль сдвига.

Удельная (в единице объема) потенциальная энергия деформации при сдвиге будет определяться как площадь заштрихованного на рис. 5.3 треугольника, т.е. как

$$\Pi = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

Условие прочности при сдвиге будет иметь вид:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau]$$

При заданном усилии F и $[\tau]$ необходимая площадь сечения заклёпок:

$$A \geq \frac{F}{[\tau]}$$

Предельная нагрузка заклепочного соединения будет определяться как

$$F_{пр} = A \tau_T$$

где A – площадь сечения всех заклёпок.

Отметим, что при напряженном состоянии чистого сдвига изменения объема не происходит, т.к. при $\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$, в соответствии с (2.3), объемная деформация $\epsilon_v = 0$, так что вычисленная выше потенциальная ϵ_v энергия деформации есть потенциальная энергия деформации «изменения формы». Приравнивая ее значение потенциальной деформации формы при растяжении (2.4) для момента наступления пластических деформаций (т.е. используя энергетическую гипотезу пластичности) получим равенство:

$$\frac{1 + \mu}{3E} \sigma_T^2 = \frac{\tau_T^2}{2G}$$

Отсюда следует, что

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$$

и диаграммы растяжения и сдвига отличаются лишь множителем $\sqrt{3} \approx 1,73$.

Контрольные задачи.

Задача 1. Две пластины закреплены п заклёпками и нагружены так, как это показано на рис. 5.4. Требуется вычислить напряжения в заклёпках.

$$M = \sum r_i \sigma_i A_i = \sum k \cdot r_i^2 A_i \rightarrow$$

$$k = \frac{M}{\sum r_i^2 A_i}$$

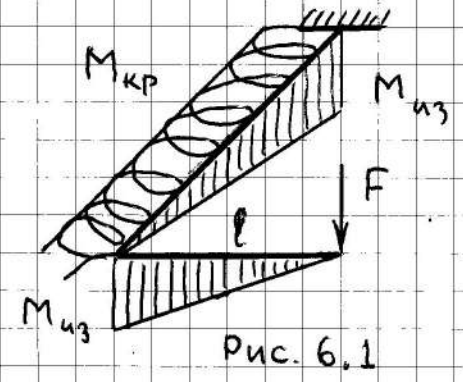
$$\sigma_i = k r_i$$

Рис. 5.4

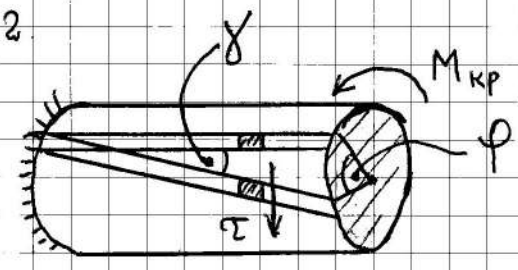
Из условия равновесия следует:
 $M = \dots$ $k = \dots$ $\sigma_i = \dots$

6. Кручение круглых стержней

Рассмотрим элемент конструкции, который находится в состоянии кручения с моментами $M_{кр}$ и изгиба с моментом $M_{из}$ (рис. 6.1).

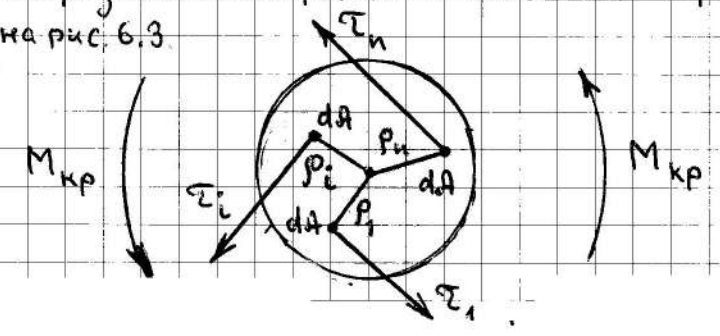


Деформации скрученного стержня показаны на рис. 6.2.



Здесь ϕ – угол закручивания, γ – угол сдвига, τ – касательное напряжение.

Распределение напряжений в сечениях стержня показано на рис. 6.3.



Из условия равновесия любой части стержня следует равенство

$$M_{кр} = \int_{(A)} \rho \tau dA \quad (6.1)$$

Пологая, что напряжения τ пропорциональны расстоянию ρ от центра сечения, т.е., прирав

$$\tau = k \rho \quad (6.2)$$

Из (6.1) получаем:

$$M_{кр} = k J_p, \quad k = M_{кр} / J_p \quad (6.3)$$

где полярный момент инерции сечения в виде круга с диаметром d

$$J_p = \int_{(A)} \rho^2 dA \approx 0,1 d^4 \quad (6.4)$$

Подставив в (6.3) в (6.2) получаем формулу для расчета напряжений

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{J_p} \quad (6.5)$$

Из рис. 6.1 и закона Гука при сдвиге $\tau = G \gamma$ следуют равенства:

$$\ell \gamma = r \varphi = \ell \frac{\tau}{G} = \ell \frac{M_{кр} \rho}{G J_p}$$

Отсюда получаем формулы для определения угла закручивания φ и потенциальной энергии деформации Π :

$$\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{G J_p}; \quad \Pi = \frac{1}{2} M_{кр} \varphi.$$

7. Кручение тонкостенных стержней закрытого профиля

Рассмотрим кручение тонкостенных стержней закрытого профиля ^{любой формы} с переменной толщиной стенки δ , показанного на рис. 7.1 и вырежем из него бесконечно малый элемент, показанный на рис. 7.2.

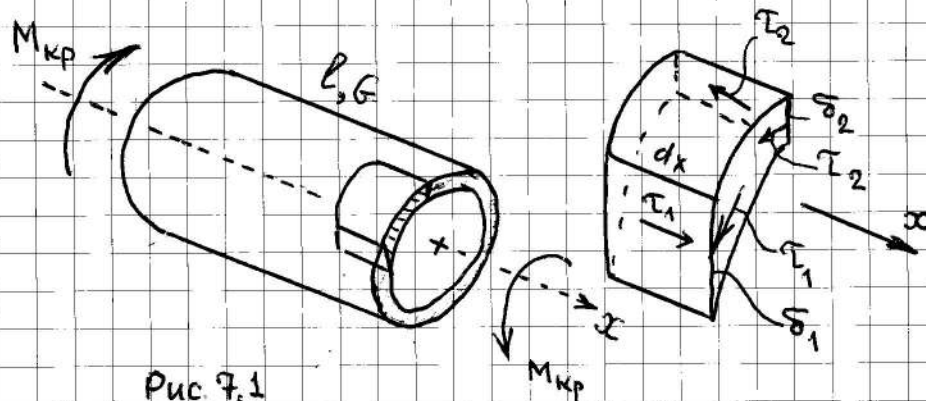


Рис. 7.1

Рис. 7.2

Из условия равновесия этого элемента в виде равенства нулю суммы проекций всех сил в направлении оси x имеем равенство

$$\tau_1 \delta_1 dx = \tau_2 \delta_2 dx$$

где δ_1, δ_2 — толщина стенки.

Отсюда следует, что произведение

$$\tau \delta = \text{const} \quad (7.1)$$

Рассмотрим теперь равновесие любой отсеченной части стержня, показанной на рис. 7.3. Эта часть находится в равновесии под воздействием внешнего момента $M_{кр}$ и моментов внутренних сил в сечении. Из этого условия с учётом

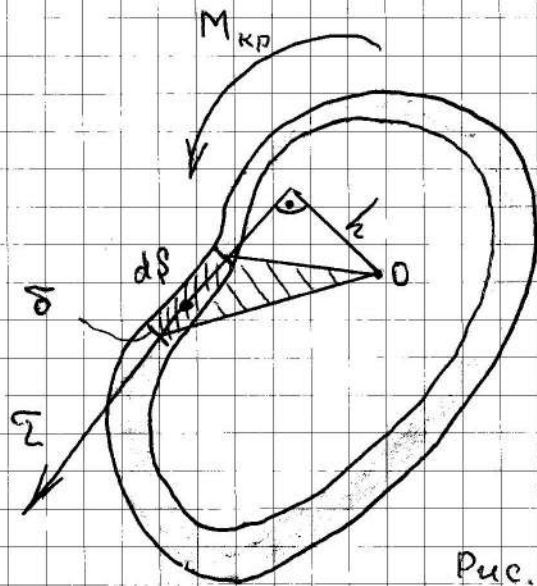


Рис. 7.3

(7.1) получим равенство

$$M_{кр} = \oint \tau \delta h dS = \tau \delta \oint h dS = \tau \delta 2A \quad (7.2)$$

Отсюда следует формула для расчета напряжений

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2A\delta} \quad (7.3)$$

Здесь h — плечо силы ($\tau \delta dS$), A — площадь фигуры, очерченной средней линией контура, $(h \cdot dS)$ — удвоенная площадь заштрихованного треугольника, O — любая точка на плоскости сечения.

При определении угла закручивания стержня φ заметим, что потенциальная энергия деформации в бесконечно малом объеме и во всем стержне будет определяться по формулам:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\tau^2 \delta}{2G} dS \\ \Pi &= \frac{\tau^2 \delta^2 \ell}{2G} \oint \frac{dS}{\delta} \quad (7.4) \end{aligned}$$

Полную энергию можно также вычислить по заданному моменту $M_{кр}$ и углу закручивания φ

$$\Pi = \frac{1}{2} M_{кр} \varphi \quad (7.5)$$

Из соотношений (7.4) и (7.5) следует, что искомый угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{4A^2 G} \oint \frac{dS}{\delta} \quad (7.6)$$

При $\delta = \text{const}$ получаем:

$$\Pi = \frac{M_{кр}^2 \ell S}{3A^2 G \delta}, \quad \varphi = \frac{M_{кр} \ell S}{4A^2 G \delta}$$

где S — длина контура сечения.

8. Прямой жесткий изгиб балок

Рассмотрим балку в состоянии прямого жесткого изгиба, показанную на рис. 8.1.а.

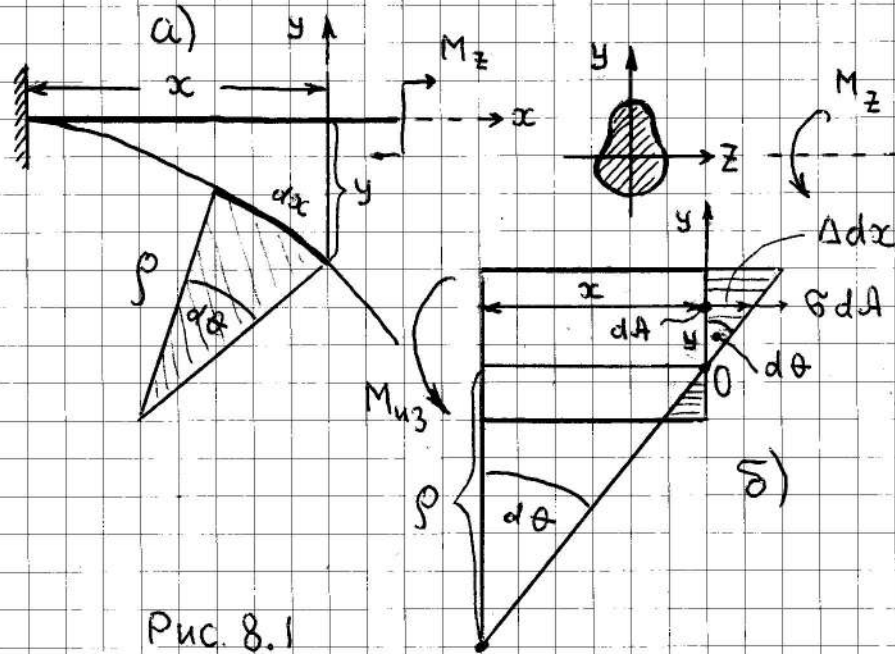


Рис. 8.1

Прогиб балки в т. x обозначим как y , угол поворота сечения $\theta \approx \tan \theta = y' = \frac{dy}{dx}$, радиус кривизны ρ , кривизна

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' \quad (8.1)$$

напряжения в т. (x, y) будет определяться как

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta dx}{dx} = E \frac{y}{\rho} \quad (8.2)$$

Элементарное усилие на площадке dA будет σdA .

Любая часть балки, показанная на рис. 8.1 б находится в равновесии под действием внешнего момента M_z и моментов внутренних сил (σdA)

Отсюда следует равенства:

$$M_z = \int_{(A)} y \sigma dA = \frac{E}{\rho} J_z \quad (8.3)$$

$$\text{где } J_z = \int_{(A)} y^2 dA \quad (8.4)$$

— момент инерции сечения балки относительно оси Z .

Из (8.3) следует главная формула сопротивления для определения кривизны балки при изгибе

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E J_z} = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (8.5)$$

Подставив в (8.5) в (8.2) получаем формулы для расчета напряжений и условие прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z} \quad (8.6) \quad \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

где $W_z = J_z / y_{\max}$ — момент сопротивления,

$[\sigma]$ — допустимое напряжение.

Расположение точки O поворота сечения определяется

$$\text{из условия } S_z = \int_{(A)} y dA = 0. \quad (A)$$

9. Определение перемещений при изгибе

Рассмотрим балку, находящуюся под различными воздействиями и определим перемещение δ в произвольной точке A (рис. 9.1)

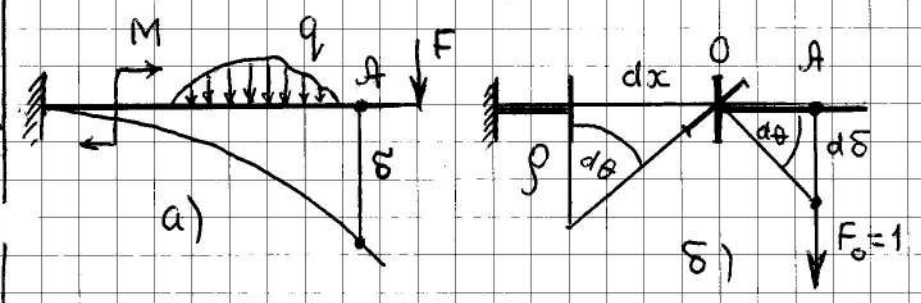


Рис. 9.1

Будем считать, что балка гибкая только на участке dx и абсолютно жёсткая на других участках. Угол поворота сечения в точке A в соответствии с формулой (8.5) будет определяться как

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EJ}$$

а перемещение в этой точке будет

$$d\delta = OA \cdot d\theta = \frac{MM_0 dx}{EJ} \quad (9.1)$$

где $M_0 = F_0 \cdot OA$ - момент от единичной безразмерной силы $F_0 = 1$, приложенной в точке определения перемещения, M - изгибающий момент на участке балки dx .

Из (9.1) следует формула О. Мора для определения перемещений при изгибе

$$\delta = \int_0^L \frac{MM_0}{EJ} dx \quad (9.2)$$

где L - длина балки.

Если вместо суммарной силы F_0 приложить в точке A единичный момент $M_0 = 1$ и повторить вычисления, то формула (9.2) будет давать угол поворота сечения в этом месте балки.

Для примера определим перемещения и угол поворота сечения в точке A криволинейного стержня, показанного на рис. 9.2 и нагруженного силой F .

Точка A перейдет в положение A_1 .

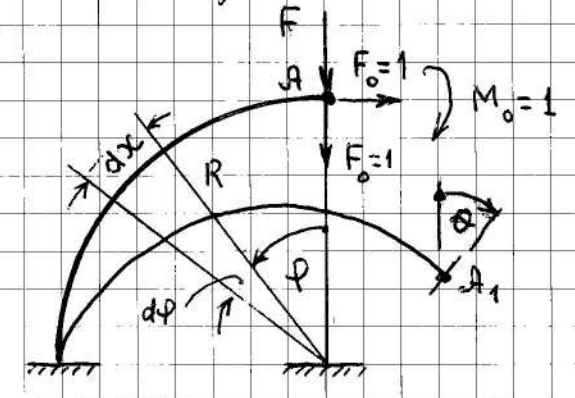


Рис. 9.2

Для определения перемещения т. A вниз прикладываем единичную силу $F_0 = 1$, для определения перемещения вправо прикладываем вправо единичную силу $F_0 = 1$, для определения угла поворота в сечении A прикладываем единичный момент $M_0 = 1$ (см. рис. 9.2).

Во всех трёх случаях $dx = R d\varphi$ и изгибающий момент от силы F в сечении, определенном углом φ ,

$$M = FR \sin \varphi$$

где R — радиус кривизны стержня.

При определении перемещения вниз $M_0 = R \sin \varphi$,
при определении перемещения вправо $M_0 = R(1 - \cos \varphi)$,
при определении угла поворота $M_0 = 1$ при любом угле φ .

После вычисления интегралов в (9.2) находим вертикальное перемещение

$$\delta_v = \frac{\pi}{4} \frac{FR^3}{EJ}$$

горизонтальное перемещение

$$\delta_r = \frac{FR^3}{2EJ}$$

угол поворота сечения $\varphi = \frac{FR^2}{2EJ}$

10. Энергетические теоремы о перемещениях

Рассмотрим элемент конструкции, нагруженный силами F_i ($i=1,2,\dots,n$), моментами M_j ($j=1,2,\dots,m$) и внутренним (или наружным) давлением q , показанный на рис. 10.1

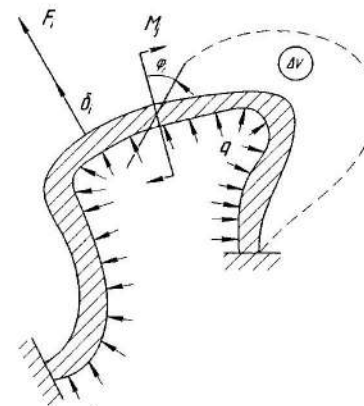


Рис. 10.1

В сечениях элемента конструкции возникают шесть силовых факторов: нормальная сила N , изгибающие моменты M_y и M_z , момент кручения M_{xp} и поперечные силы Q_y и Q_z .

Полная потенциальная энергия системы без учёта малозначимых при определении перемещений сил Q_y и Q_z будет определяться по формуле:

$$\Pi = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + \int_0^l \frac{M_{xp}^2 dx}{2GJ_{xp}} \quad (10.1)$$

где l — длина элемента конструкции.

Обозначим через δ_i — перемещение в точке приложения силы F_i по направлению её действия, φ_j — угол поворота сечения j в направлении действия момента M_j , ΔV — изменение объёма под действием давления q .

Имеем: $F_i = c_i \delta_i$, $M_j = c_j \varphi_j$, $q = c_v \Delta V$, где c_i , c_j , c_v — соответствующие жёсткости.

С учётом этих соотношений, работу A внешних сил можно представить в следующих трёх видах, представляющих теорему Клапейрона:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \varphi_j + \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \delta_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j^2 + \frac{1}{2} (c_v \Delta V)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2}{c_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{M_j^2}{c_j} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c_v} \end{aligned}$$

Полагая $A = \Pi$ и опустив нижние индексы, вычислим производные от Π по F , M и q . Получим формулы Кастigliано для определения перемещений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F} = \delta, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial M} = \varphi, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \Delta V \quad (10.2)$$

Вычислив производные от Π по δ , φ и ΔV , получим формулы Лагранжа для определения внешних воздействий:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = F, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = M, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial (\Delta V)} = q \quad (10.3)$$

Рассмотрим теперь теорему *Бетти* о «взаимности работ» на примере элемента конструкции, нагруженного силами \vec{F}_1 и \vec{F}_2 в точках 1 и 2 (рис. 10.2).

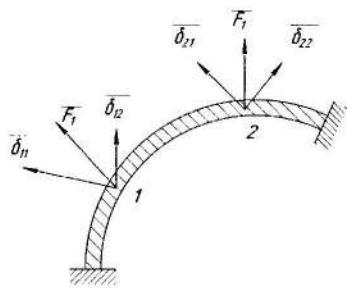


Рис. 10.3

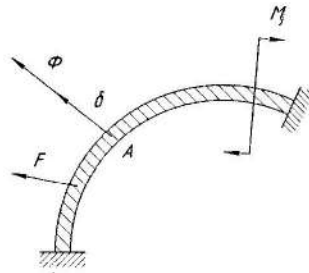


Рис. 10.2

Перемещение в направлении i ($i=1,2$) от единичной безразмерной силы $\vec{F}_0=1$, действующей в направлении j ($j=1,2$), обозначим как $\vec{\delta}_{ij}$.

Вначале приложим силу \vec{F}_1 , а затем силу \vec{F}_2 и вычислим работу A_1 этих сил на соответствующих перемещениях:

$$A_1 = \frac{1}{2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{11} + \frac{1}{2} \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{22} + \vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{12}$$

где точка означает скалярное произведение векторов.

Изменим порядок приложения сил. Теперь вначале приложим силу \vec{F}_2 , а затем силу \vec{F}_1 и вычислим работу A_2 этих сил на соответствующих перемещениях

$$A_2 = \frac{1}{2} \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{22} + \frac{1}{2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{11} + \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{21}$$

Из условия $A_1 = A_2$ получаем равенство:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{\delta}_{12} = \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta}_{21}$$

выражающее теорему *Бетти* о взаимности работ.

В скалярном виде имеем:

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21}$$

где δ_{12} - перемещение в направлении силы F_1 от действия силы F_2 ,

δ_{21} - перемещение в направлении силы F_2 от действия силы F_1 .

Отсюда, при $F_1 = F_2$ получаем теорему *Максвелла* о «взаимности перемещений», выраженную соотношениями:

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad \text{или} \quad \delta_x = \delta_y \quad (10.4)$$

Вместо пары сил F_1 и F_2 приложим силу F и момент M . Теорема о взаимности работ будет выражаться соотношением

$$F \delta_M = M \delta_F \quad (10.5)$$

где δ_M - перемещение в направлении силы F от действия момента M ,

δ_F - перемещение в направлении силы M от действия момента F .

Для пары воздействий F и q имеем равенство:

$$F \delta_q = q (\Delta V)_F \quad (10.6)$$

где δ_q - перемещение в направлении силы F от давления q , $(\Delta V)_F$ - изменение объема под воздействием силы F .

Для определения перемещений в точках, где нет внешних воздействий теорему *Кастилано* применяют для фиктивно приложенной силы Φ , при условии, что $\Phi = 0$ (теорема *Максвелла*), т.е. используют формулу

$$\delta = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=0} \quad \text{где знак } \Big|_{\Phi=0} \text{ означает} \quad (10.7)$$

Силу Φ представляют в виде $\Phi = F_0 \phi$, где $F_0 = 1$ - безразмерная единичная сила. «при условии, внутренние силовые факторы от силы $F_0 = 1$ обозначают с индексами 1 снизу. При учёте только изгибающего и крутящего моментов имеем:»

$$M = M_F + M_1 \Phi; \quad M_{xp} = M_{xpF} + M_{xp1} \Phi \quad (10.8)$$

где M_F и M_{xp} - изгибающий момент и момент кручения от всех внешних сил.

Подставив (10.8) в (10.7), получим формулу *Максвелла* для определения перемещений:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_F M_1}{EJ} dx + \int_0^l \frac{M_{xpF} M_{xp1}}{GJ_k} dx + \dots \quad (10.9)$$

где точки справа указывают возможность аналогичного учёта всех шести внутренних силовых факторов.

Задача Для разрезанного снизу кольца, с жёсткостью сечений на изгиб EJ и кручение GJ_k , показанного на рис. 10.5, определить раскрытие нижнего зазора «из плоскости» под действием двух сил F , приложенных нормально к плоскости кольца.

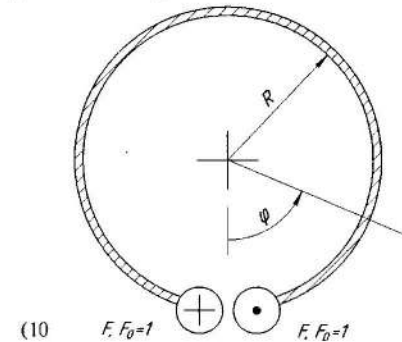


Рис.10.5

В сечении с угловой координатой φ возникает изгибающий момент $M_F = FR \sin \varphi$ и крутящий момент $M_{xp} = FR(1 - \cos \varphi)$. Соответствующие моменты от единичных сил $F_0 = 1$ будут $M_1 = R \sin \varphi$ и $M_2 = R(1 - \cos \varphi)$.

Искомое раскрытие зазора будет вычисляться по формуле

$$\delta = \frac{FR^3}{EJ} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{FR^3}{GJ_k} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \pi \frac{FR^3}{EJ} + 3\pi \frac{FR^3}{GJ_k}$$

Рассмотрим в деформируемом теле бесконечно малый объём материала в виде куба и отметим на его гранях все возможные девять напряжений (рис 11.1). Они будут представлены следующей матрицей значений (тензором напряжений).

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

Из условий равновесия следует, что, если известны эти девять напряжений для какого-либо расположения элементарного куба, то могут быть определены соответствующие девять напряжений и для любого другого расположения этого куба (рис. 11.1, б).

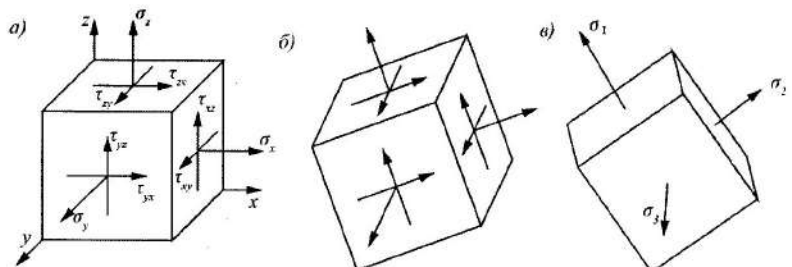


Рис 11.1

Таким образом, тензор напряжений (11.1) полностью характеризует напряженное состояние точки. Можно ещё показать, что существует такое расположение куба, при котором на его гранях действуют только нормальные напряжения (рис. 11.1, в). Эти напряжения называются главными напряжениями, а площадки, в которых они действуют, - главными площадками. Главные напряжения обозначаются через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а индексы для них назначаются таким образом, чтобы напряжение σ_1 было наибольшим, а напряжение σ_3 - наименьшим. Три главных напряжения также полностью характеризуют напряженное состояние в точке.

При этом тензор напряжений (11.1) принимает вид

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

Рассмотрим теперь плоское напряженное состояние, и вместо элементарного куба будем рассматривать бесконечно малый квадрат, на сторонах которого заданы три напряжения: σ_x, σ_y и τ (рис 11.2а). Определим напряжения $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}, \tau_{\alpha}, \tau_{\beta}$ на сторонах квадрата, повернутого против часовой стрелки относительно заданного на произвольный угол α (рис. 11.2б).

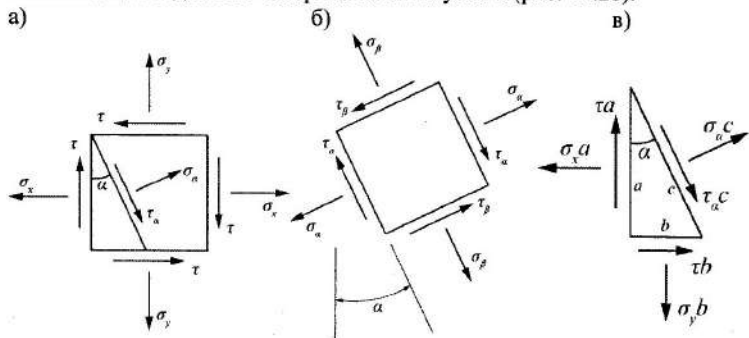


рис.11.2

Для этого рассмотрим треугольную призму с толщиной 1, показанную на рис 11.2в. На её сторонах отметим силы, обусловленные действующими

напряжениями, и составим уравнения равновесия в проекциях всех сил на направления σ_{α} и τ_{α} :

$$\sigma_{\alpha} c + \tau a \sin(\alpha) + \tau b \cos(\alpha) - \sigma_y b \sin(\alpha) - \sigma_x a \cos(\alpha) = 0$$

$$\tau_{\alpha} c + \tau b \sin(\alpha) + \sigma_y b \cos(\alpha) - \sigma_x a \sin(\alpha) - \tau a \cos(\alpha) = 0$$

Отсюда получаем, что

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha) - \tau \sin(2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) - \tau \sin(2\alpha) \quad (11.3)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\alpha) + \tau \cos(2\alpha) \quad (11.4)$$

Для определения σ_{β} и τ_{β} в выражениях (11.3) и (11.4) вместо угла α следует подставить угол $\beta = \alpha + 90^\circ$. Тогда получим следующие формулы:

$$\sigma_{\beta} = \sigma_x \sin^2(\alpha) + \sigma_y + \tau \sin(2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) - \tau \sin(2\alpha) \quad (11.5)$$

$$\tau_{\beta} = \tau_{\alpha} \quad (11.6)$$

Формула (11.6) выражает теорему о парности касательных напряжений: в двух взаимно перпендикулярных площадках возникают одинаковые по величине касательные напряжения.

Из соотношений (11.3) и (11.5) следует, что сумма нормальных напряжений на двух взаимноперпендикулярных площадках всегда остаётся постоянной и, если на какой-либо площадке напряжение достигает максимального значения, то на площадке, перпендикулярной к ней, напряжение будет минимальным:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{max} + \sigma_{min} = const \quad (11.7)$$

Нормальные напряжения принимают экстремальные значения при условии:

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -\frac{d\sigma_{\beta}}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\alpha) - 2\tau \cos(2\alpha) = -2\tau_{\alpha} = 0 \quad (11.8)$$

Из выражений (11.8) и (11.4) следует, что нормальные напряжения достигают экстремальных значений в тех площадках, в которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки будут главными площадками, а экстремальные напряжения в этих площадках $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ главными напряжениями. Эти напряжения обозначаются также через σ_1 и σ_2 , или σ_1 и σ_3 , или σ_2 и σ_3 в соответствии с принятым выше правилом для расстановки индексов.

Расположение главных площадок определяется углом α , вычисляемым из уравнения (11.8). Это уравнение имеет решение:

$$tg(2\alpha) = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (11.9)$$

Значения главных напряжений вычисляются по формулам (11.3) и (11.5) при подстановке их значения угла α из соотношения (11.9). После преобразования получим:

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (11.10)$$

Обобщённый закон Гука

Выше было показано, что напряженное состояние в точке можно задать тремя напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3 . Этим напряжениям соответствуют три главные деформации ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 . Вычислим эти деформации (рис.11.3).

Если действует только напряжение σ_1 , то по закону Гука деформация в направлении напряжения σ_1 будет равна $\frac{\sigma_1}{E}$

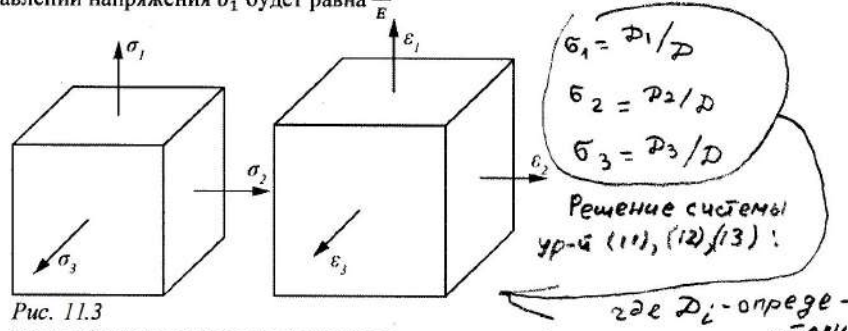


Рис. 11.3

Если действует только напряжения σ_2 или σ_3 , то деформация в направлении напряжения σ_1 согласно закону Пуассона будет равна $-\frac{\mu\sigma_2}{E}$ или $-\frac{\mu\sigma_3}{E}$. Используя принцип независимости действия сил, получаем следующее выражение для определения деформации в направлении напряжения σ_1 :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (11.11)$$

Аналогично определяются деформации в направлении напряжений σ_2 и σ_3 :

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) \quad (11.12)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)) \quad (11.13)$$

Соотношения (11.11)-(11.13) выражают обобщённый закон Гука.

Объёмная деформация $\epsilon_v = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \frac{1-2\mu}{E}$

Теории прочности

Определим теперь условия, при которых в материале могут возникнуть пластические деформации и начаться процессы разрушения.

Поскольку напряжение σ_1 является наибольшим, то условие появления пластических деформаций и условие прочности можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_T, \quad (11.14)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \leq [\sigma], \quad (11.15)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении.

Соотношение (11.15) выражает первую теорию прочности – теорию наибольших нормальных напряжений. По этой теории наличие напряжений σ_2 и σ_3 не оказывает влияния на прочность материала.

По второй теории – теории наибольших деформаций считается, что условие прочности можно записать в виде:

$$\epsilon_{max} = \epsilon_1 \leq [\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \quad (11.16)$$

где наибольшая деформация ϵ_{max} сравнивается с допустимой деформацией $[\epsilon]$ при растяжении.

Подставив в (11.16) соотношение (11.11), получим следующее условие прочности

$$\sigma_3^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (11.17)$$

где σ_3^{II} – эквивалентное (или расчётное) напряжение по второй теории прочности.

По третьей теории прочности (теория наибольших касательных напряжений) считается, что пластические деформации могут наступить при превышении наибольшими касательными напряжениями уровня касательных напряжений, возникающих в растянутом стержне при появлении в нём пластических деформаций, т.е. условие прочности можно записать в виде

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Для определения наибольших касательных напряжений рассмотрим три наклонные площадки, отмеченные на рис.11.4 штриховкой. В соответствии с (11.4) напряжения в этих площадках определяются по формулам:

$$\tau_{\alpha}^{(1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha); \tau_{\alpha}^{(2)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin(2\alpha); \tau_{\alpha}^{(3)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(2\alpha); \quad (11.18)$$

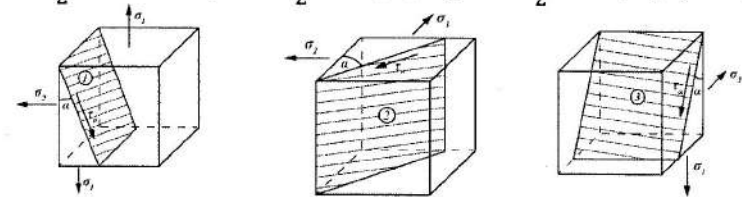


Рис 11.4

Наибольшие касательные напряжения возникают в третьей площадке при $\alpha=45^\circ$. Эти напряжения должны быть меньше наибольших допустимых касательных напряжений при растяжении. Это условие приводит к соотношению, выражающему третью теорию прочности:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

или

$$\sigma_3^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (11.19)$$

где σ_3^{III} – эквивалентное (расчётное) напряжение по третьей теории прочности.

Заметим, что при растяжении в направлении σ_1 с напряжением $[\sigma]$ касательные напряжения в площадках 1 и 3 равны $\frac{[\sigma]}{2}$, а во второй площадке – нулю. Тогда эквивалентность объёмного напряженного состояния и напряженного состояния при растяжении можно выразить соотношением:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2 \left(\frac{[\sigma]}{2} \right)^2, \quad (11.20)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 определяются по формулам (11.18) при $\alpha=45^\circ$.

После преобразований условие (11.20) можно представить в виде четвертой теории прочности:

$$\sigma_3^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma], \quad (11.21)$$

где σ_3^{IV} – эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности.

Для материалов, у которых допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, условие прочности можно выразить следующим образом. Построим в системе координат $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ линию, соединяющую точки с координатами $\{\sigma_1, \sigma_3\} = [\sigma]_p, \sigma_3 = 0$ и $\{\sigma_1, \sigma_3\} = 0, \sigma_3 = -[\sigma]_{сж}$, где $[\sigma]_p, [\sigma]_{сж}$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии, соответственно (рис.11.5).

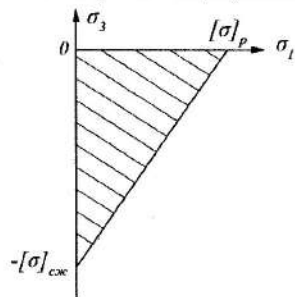


рис.11.5

Считается, что если точки с координатами $\{\sigma_1, \sigma_3\}$, будут расположены в заштрихованной на рис.11.5 области, то разрушения не произойдет. Это условие описывается неравенством:

$$\frac{\sigma_1}{[\sigma]_p} - \frac{\sigma_3}{[\sigma]_{сж}} \leq 1,$$

или

$$\sigma_3 = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p \quad (11.22)$$

где

$$k = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$$

Теория прочности, выраженная соотношением(11.22), предложена О.Мором.

12. Расчет статически неопределимых систем изгиба

Система называется статически неопределимой, если из уравнений равновесия статики нельзя определить все реакции связей или все внутренние силовые факторы. Так, для один раз статически неопределимой балки, показанной на рис. 12.1, а, нельзя из уравнений её равновесия определить все три реакции связей: X_1, X_2, X_3 , а для трижды статически неопределимой рамы, показанной на рис. 12.2, а, нельзя определить все три силовых фактора в сечениях стержней X_1, X_2, X_3 , тогда как две реакции связей R_1 и R_2 легко определяются из двух уравнений равновесия рамы.

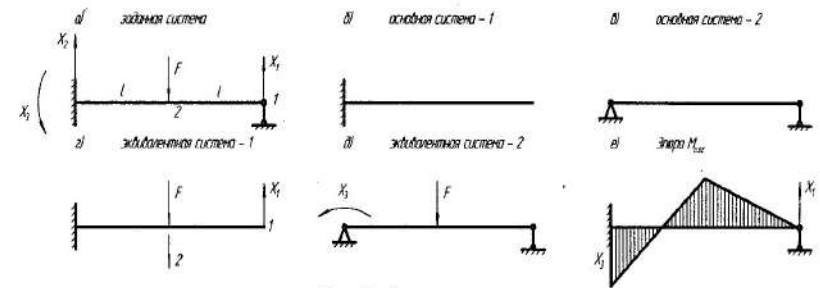


Рис.12.1

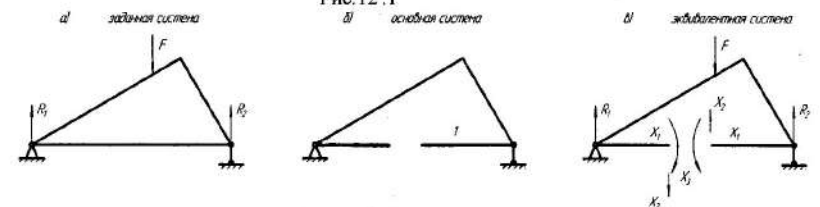


Рис.12.2

Для расчета статически неопределимых систем вначале выбирают для них основные статически определимые системы, которые получают из заданных систем путем отбрасывания в них «лишних» связей и всех внешних сил. Так, для рассматриваемой балки две такие основные системы показаны на рис.12.1, б, в, а для рамы – одна такая система показана на рис.12.2, б.

К основным системам прикладывают отброшенные внешние силы, неизвестные реакции связей и внутренние силовые факторы с тем, чтобы сделать из них системы, эквивалентные заданным. Для балки такие эквивалентные системы показаны на рис.12.1, г, д, а для рамы – одна такая система показана на рис.12.2, в.

Для балки условие эквивалентности систем состоит либо в том, что перемещение на опоре 1 равно нулю, либо в том, что угол поворота в левой заделке равен нулю. Эти условия выражаются уравнениями:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}F = 0$$

$$\delta_{33}X_3 + \delta_{32}F = 0 \quad (12.1)$$

где δ_{ij} – перемещение в направлении i от единичной силы или момента, приложенных в направлении j.

После вычисления из уравнений (12.1) силы X_1 и момента X_2 строим эпюру изгибающих моментов, которая ориентировочно показана на рис. 12.1, е.

Для рамы условие эквивалентности систем, показанных на рис. 12.2, будет состоять в том, что все три перемещения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ в направлениях 1, 2 и 3 (рис. 12.2,б) будут равны нулю, т.е. из уравнений:

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_3 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

Или в матричном виде

$$[\delta] \cdot \vec{X} = -\vec{\delta}_F \quad (12.2)$$

где

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = [X_1, X_2, X_3]^T; \\ \vec{\delta}_F = [\delta_{1F}, \delta_{2F}, \delta_{3F}]^T;$$

После определения всех коэффициентов податливостей из решения уравнений (12.2) находим искомые силовые факторы в виде

$$\vec{X} = -[\delta]^{-1} \cdot \vec{\delta}_F$$

При этом эквивалентная система, показанная на рис. 12.2 в, будет статически определенной системой с уже известными воздействиями X_1, X_2, X_3, F , которая решается известными методами.

Контрольная задача

Для рамы, показанной на рис. 12.3, а требуется построить эпюры изгибающих моментов в её элементах.

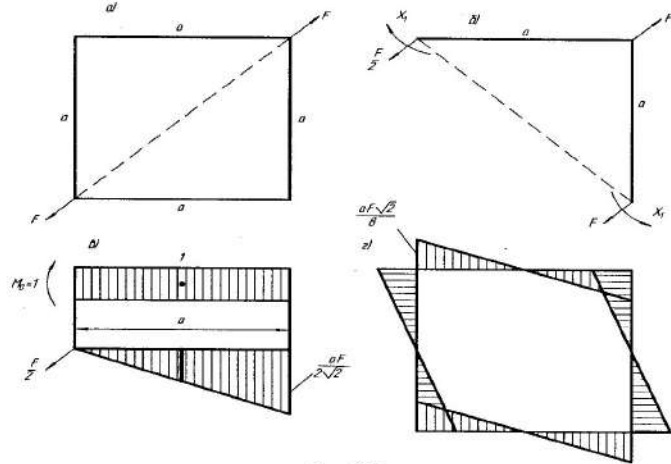


Рис. 12.3

Отсеченная по диагонали часть рамы, показанная на рис. 12.3,б, находится в равновесии под действием силы F , двух сил $\frac{F}{2}$ и неизвестного изгибающего момента X_1 в сечении, которое не поворачивается. Из этого условия получаем уравнение для определения момента X_1 :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0$$

где δ_{11} - угол поворота в направлении X_1 при $X_1=1$, δ_{1F} - угол поворота в направлении X_1 от силы F .

13. Расчет тонкостенных оболочек

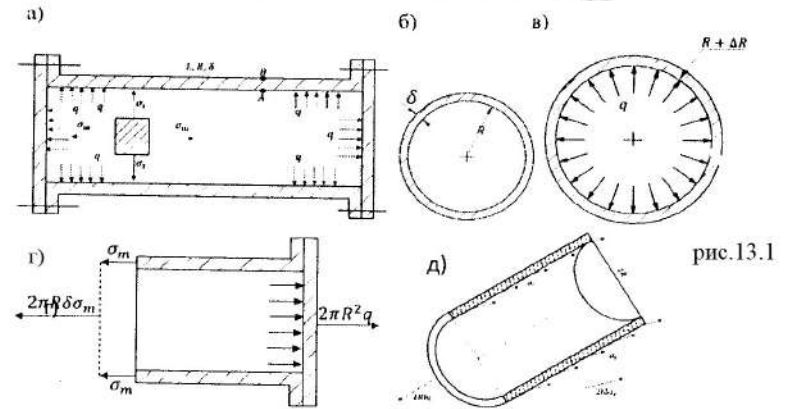


рис. 13.1

Рассмотрим тонкостенную цилиндрическую оболочку, находящуюся под воздействием внутреннего давления q , показанную на рис. 13.1а.

В оболочке возникает меридиональное напряжение σ_m и тангенциальное напряжение σ_t . Напряжение σ_m определяется из условия равновесия отсеченной части оболочки, показанное на рис. 13.1г, а напряжение σ_t - из условия равновесия части оболочки, показанной на рис. 13.1д. Из этих условий получаем формулы:

$$\sigma_m = \frac{qR}{2\delta}; \quad \sigma_t = \frac{qR}{\delta},$$

т.е. напряжение σ_t в два раза превышает напряжение σ_m и предопределяет возможное разрушение (появление трещин) вдоль оболочки.

Напряженное состояние на внутренней поверхности оболочки (в т.А) отличается от напряженного состояния на её наружной поверхности (в т.В). Для этих точек оно показано на рис.13.2

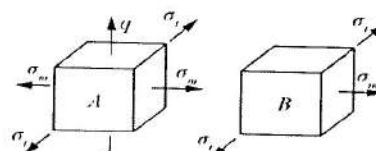


Рис. 13.2

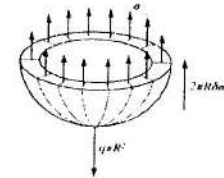


Рис. 13.3

Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_3^{III} = \sigma_t + q \leq [\sigma].$$

Напряжения в сферической оболочке определяется из условия равновесия её части, показанной на рис. 13.3

$$\text{Имеем } \sigma_t = \sigma_m = \sigma = \frac{qR}{2\delta}.$$

14. Расчет толстостенных цилиндров

Рассмотрим толстостенный цилиндр, находящийся под воздействием наружного P_H и внутреннего P_B давлений. Внутренний радиус цилиндра обозначим как r_B , а наружного - r_H (рис. 14.1 а)

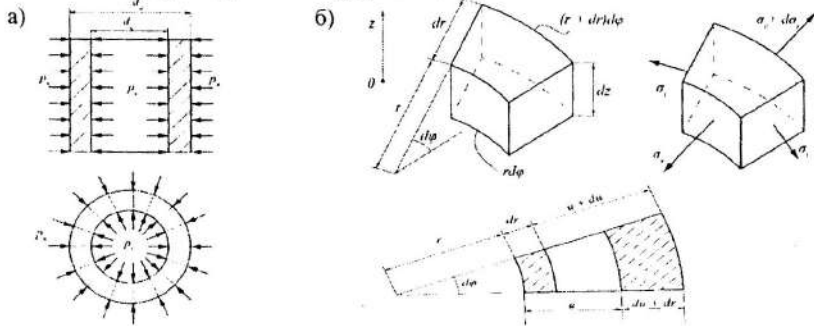


Рис. 14.1

В бесконечно малом объеме ($r d\varphi$, $(r + dr)d\varphi$, dz) с радиальной координатой r возникают напряжения σ_r , $\sigma_r + d\sigma_r$ и σ_t (рис. 14.1 б). Уравнение равновесия для бесконечно малого объема получаем в виде равенства суммы всех сил в направлении r .

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi dz - \sigma_r r d\varphi dz - \sigma_t dr d\varphi = 0$$

или

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (14.2)$$

Радиальная ϵ_r и тангенциальная деформация ϵ_t рассматриваемого бесконечно малого объема будут вычисляться по формулам:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \epsilon_t = \frac{u}{r}$$

где u – радиальное перемещение точки с координатой r .

Отсюда получаем уравнение совместности деформаций ϵ_r и ϵ_t .

$$\epsilon_r = \frac{d(r\epsilon_t)}{dr} = r \frac{d\epsilon_t}{dr} + \epsilon_t \quad (14.3)$$

В соответствии с обобщением закона Гука имеем:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) \end{aligned} \quad \epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_t)] \quad (14.4)$$

Подставляя (14.4) в (14.3), получаем уравнение совместности деформаций, выраженное в напряжениях

$$-r \frac{d\sigma_t}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (14.5)$$

Для определения напряжений σ_r и σ_t получили систему уравнений (14.2) и (14.5).

Вычтем из уравнения (14.2) уравнение (14.5), а затем сложим его с этим уравнением. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\sigma_r + \sigma_t) &= 0 \\ r \frac{d}{dr}(\sigma_r - \sigma_t) + 2(\sigma_r - \sigma_t) &= \frac{d}{dr}(r^2(\sigma_r - \sigma_t)) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда имеем систему уравнений

$$\sigma_r + \sigma_t = c_1 \rightarrow \epsilon_z = \text{const}, \text{ сечения остаются плоскими!}$$

$$\sigma_r - \sigma_t = c_2/r^2 \quad (14.6)$$

где константы c_1 и c_2 определяются из граничных условий: $r = r_B, \sigma = -P_B$; при $r = r_H, \sigma = -P_H$.

Решив систему уравнений (14.6), получим формулы для расчета искоемых напряжений:

$$\sigma_{r,t} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2r^2}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2} &= \frac{P_B r_B^2 - P_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \\ \frac{c_2}{2} &= \frac{P_B - P_H}{r_H^2 - r_B^2} r_H^2 r_B^2 \end{aligned}$$

Таким образом, задача о расчете напряжений для толстостенных цилиндров решена.

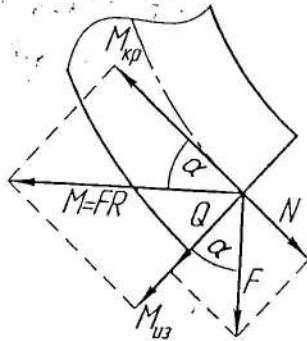
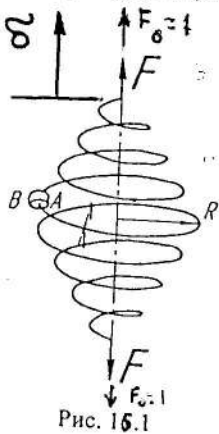
15 Расчет пружины - версия N2

Стержень, изогнутый по винтовой линии, называется пружиной. По характеру нагружения пружины подразделяются на пружины растяжения, сжатия, изгиба и кручения. Сечение проволоки, из которой изготавливаются пружины, может быть круглым, овальным, кольцевым и т. д. Форма пружины — цилиндрической, конической, параболической и т. п.

Рассмотрим вначале пружины растяжения (рис. 15.1) и вычислим внутренние силовые факторы в её сечениях (рис. 15.2). Разложив вектор-момент и вектор-силу в сечении витков пружины на составляющие, получим:

$$\begin{aligned} M_{кр} &= M \cos \alpha = FR \cos \alpha; M_{из} = FR \sin \alpha; \\ Q &= F \cos \alpha; N = F \sin \alpha, \end{aligned} \quad (15.1)$$

где R — радиус пружины, соответствующий рассматриваемому сечению, α — угол поворота винтовой линии.



По формулам (15.1) проводятся расчеты на прочность с учётом кручения, изгиба, сдвига и растяжения, которые здесь не приводятся (см. л. 2, 5, 6, 8).

Определим теперь удлинение пружины δ при её растяжении. Для этого воспользуемся формулой Максвелла (10.9) и приложим к пружине ещё единичную силу $F_0=1$. От её действия определяем ВСФ:

$$M_{кр,1} = R \cdot \cos \alpha, M_{из,1} = R \cdot \sin \alpha; Q_1 = 1 \cdot \cos \alpha, N_1 = 1 \cdot \sin \alpha \quad (37)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^l \left\{ \frac{M_{кр} \cdot M_{кр,1}}{G J_p} + \frac{M_{из} \cdot M_{из,1}}{E J} + \frac{Q \cdot Q_1}{G A} + \frac{N \cdot N_1}{E A} \right\} dS = \\ &= F \int_0^l \left\{ \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{G J_p} + \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{E J} + \frac{\cos^2 \alpha}{G A} + \frac{\sin^2 \alpha}{E A} \right\} dS \end{aligned}$$

где l — длина проволоки, из которой сделана пружина.

Для цилиндрической пружины с постоянным сечением витков и малым углом поворота винтовой линии $\alpha \approx 0$ ($\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx 0$) получаем приближённую формулу для определения удлинения пружины

$$\delta = F \cdot \frac{R^2 l}{G J_p} = F / C$$

где жёсткость пружины

$$C = \frac{G J_p}{R^2 l} \quad [H/M]$$

Потенциальная энергия в пружине будет

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \delta$$

Растяжение пружины сопровождается ее закручиванием. Угол закручивания можно вычислить по методу Максвелла — Мора, описанному в лекции 10. В соответствии с этим методом приложим к пружине единственный безразмерный вектор-момент $M_0 = 1$ и вычислим в сечениях витка пружины соответствующий изгибающий момент и момент кручения (рис. 15.3).

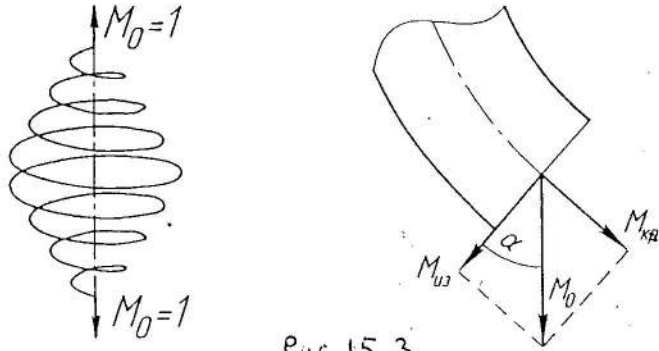


Рис. 15.3

Имеем: $M_{из,1} = 1 \cdot \cos \alpha$; $M_{кр,1} = 1 \cdot \sin \alpha$.

С учётом (15.1) получаем формулу для определения угла закручивания цилиндрической витой пружины

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_{из} \cdot M_{из,1} ds + \frac{1}{GJ_p} \int_0^l M_{кр} \cdot M_{кр,1} ds = \frac{1}{2} FRl \sin 2\alpha \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p} \right).$$

Рассмотрим теперь пружину кручения, находящуюся под воздействием момента кручения \vec{M} и единичного безразмерного момента $M_0 = 1$ и вычислим в её сечениях соответствующие изгибающие моменты и моменты кручения (рис. 15.6, а).

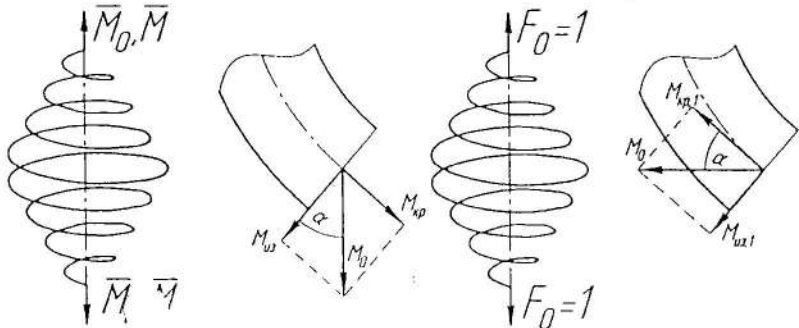


Рис. 15.6

Имеем: $M_{из} = M \cdot \cos \alpha$; $M_{кр} = M \cdot \sin \alpha$; $M_{из,1} = 1 \cdot \cos \alpha$; $M_{кр,1} = 1 \cdot \sin \alpha$.

Для определения угла закручивания пружины получаем формулу

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_{из} \cdot M_{из,1} ds + \frac{1}{GJ_p} \int_0^l M_{кр} \cdot M_{кр,1} ds = \frac{Ml}{EJ} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{Ml}{GJ_p} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Кручение пружины сопровождается изменением её длины. Для определения этого изменения приложим к ней единичную безразмерную силу $F_0 = 1$ и вычислим соответствующий изгибающий и крутящий моменты (рис. 15.6, б).

Имеем: $M_{из,1} = R \cdot \sin \alpha$; $M_{кр,1} = R \cdot \cos \alpha$.

Для определения удлинения пружины кручения получаем формулу

$$\delta = \frac{1}{2} MRl \sin 2\alpha \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p} \right)$$

Рассмотрим теперь пружину изгиба, находящуюся под воздействием момента \vec{M} и вычислим в сечениях её витков изгибающий и крутящий моменты (рис. 15.7).

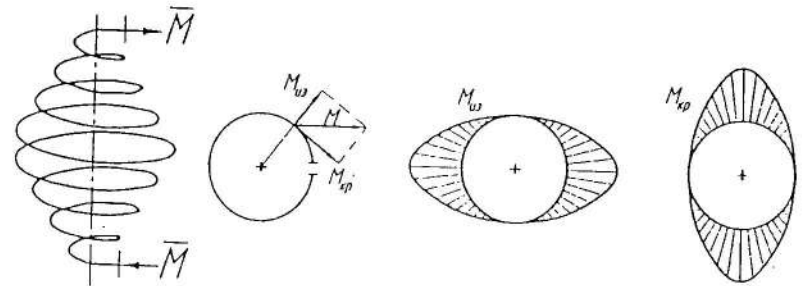


Рис. 15.7

Имеем: $M_{из} = M \cdot \cos \varphi$; $M_{кр} = M \cdot \sin \varphi$.

Эпюры этих моментов показаны на рис. 15.7. Дальнейшие вычисления теперь можно сделать по аналогии рассмотренных выше расчётов пружин растяжения и кручения.

16. Расчеты на устойчивость

40

Устойчивость - способность конструкций сохранять при нагружении первоначальную форму равновесия. Нагрузки, при которых появляются новые формы равновесия, называются критическими и обозначаются как $F_{кр}$. Определение этих нагрузок является основной задачей расчета конструкций на устойчивость.

Для примера рассмотрим жесткий стержень, упруго закрепленный в заделке и нагруженный силой F (рис. 16.1, а).

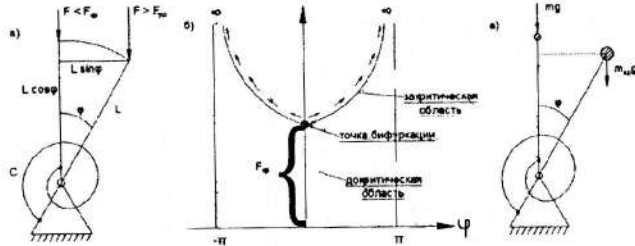


Рис.16.1 К понятию об устойчивости конструкций

При малых нагрузках стержень сохраняет первоначальную вертикальную форму равновесия, а при критической нагрузке $F_{кр}$ он поворачивается и появляется новая наклонная форма равновесия. Для определения этой нагрузки можно использовать различные методы.

1. Метод уравнений равновесия.

Условие равновесия стержня в момент потери устойчивости можно записать как $F l \sin \varphi = c \varphi$,

где c - жёсткость пружины.

При малом $\varphi \neq 0$ (т.е. при потере устойчивости) получаем

$$F_{кр} = \frac{c}{l}$$

При $F > F_{кр}$ имеем

$$F = F_{кр} \frac{\varphi}{\sin \varphi}$$

(или Эйлера)

График этой функции представлен на рис. 16, б. При $F < F_{кр}$ имеет докритическое нагружение стержня, при $F > F_{кр}$ - закритическое его нагружение, при котором угол наклона стержня возрастает. Точка перехода в новое положение равновесия называется точкой бифуркации.

2. Энергетический метод

При повороте стержня сила F совершает работу, равную энергии деформации пружины. Отсюда получаем равенства:

$$F_{кр} l (1 - \cos \varphi) \approx F_{кр} l \frac{\varphi^2}{2} = \frac{c \varphi^2}{2}$$

Отсюда следует, что

$$F_{кр} = \frac{c}{l}$$

3. Динамический метод

Свободные колебания расположенной сверху массы m описывается уравнением (рис. 16.1, в)

$$J \ddot{\varphi} = m l^2 \ddot{\varphi} = M = (mgl - c) \varphi$$

$$\text{или } \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

где квадрат частоты свободных колебаний
 J - момент инерции массы m относительно т. О.

$$\omega_0^2 = \frac{mgl - c}{m l^2}$$

$$\omega_0^2 = 0$$

Из условия $\omega_0^2 = 0$, т.е. из условия потери устойчивости, находим критическую массу $m_{кр}$ и соответствующую ей силу $F_{кр} = \frac{c}{l}$

Все три метода расчета привели к одинаковым результатам по определению критических сил.

4. Устойчивость гибких стержней

Рассмотрим теперь гибкий упругий стержень длиной l и жёсткостью EJ , нагруженный силой F и показанный на рис. 16.2, а.

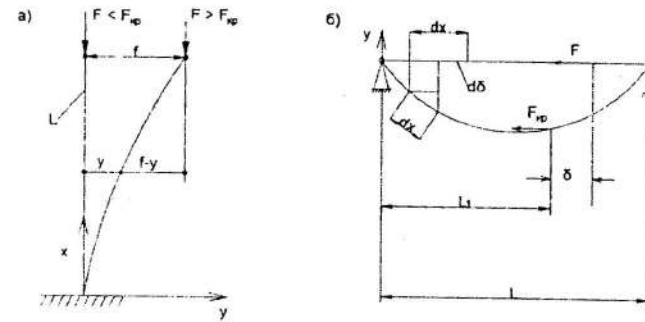


Рис.16.2. К расчету упругих стержней на устойчивость

При $F > F_{кр}$ стержень перейдет к новой форме равновесия - изгибу.

Для момента потери устойчивости дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$EJ y'' = M = F_{кр}(l - y)$$

$$\text{или } y'' + k^2 y = k^2 f$$

$$\text{где } k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ}$$

(16.1),

Решение уравнения (16.1) имеет вид

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx + f$$

41

$$y(x) = f(1 - \cos kx)$$

Из граничного условия $y(0) = f$ находим:

$$\cos k\ell = 0, k\ell = 2(2n-1)\pi, \text{ где } n=1,2,3,\dots$$

$$k\ell = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{4\ell^2} \text{ при } n=1$$

Для определения критических сил в сложных случаях нагружения стержня используется энергетический метод расчета.

Решим этим методом задачу, представленную на рис. 16.2, б. Смещение силы $F_{кр}$ при потере устойчивости обозначим как δ . Работа этой силы будет равна потенциальной энергии изгиба стержня. Отсюда имеем равенства:

$$F_{кр} \delta = \int_0^{\ell} \frac{M^2 dx}{2EJ} \quad (16.2)$$

где $M = EJy''$; $\delta = \int_0^{\ell} (1 - \cos y'') dx = \int_0^{\ell} (1 - \cos y'') dx = \int_0^{\ell} (1 - (1 - \frac{y'^2}{2})) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (y')^2 dx$

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (y')^2 dx$$

Подставив выражения для M и δ в формулу (16.2), найдем

$$F_{кр} = \frac{\int_0^{\ell} EJ (y'')^2 dx}{\int_0^{\ell} (y')^2 dx} \quad (16.3)$$

Если ориентировочно принять $y = \sin \frac{\pi}{2} x$, то при $\ell = \frac{\pi}{2}$ получим

$$F_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{\ell^2}$$

Основная трудность в практическом использовании формулы (16.3) состоит в определении функции $y = f(x)$, которая в расчетах ориентировочно принимается в виде полинома

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

в котором $a_n = 1$, а остальные n констант определяются из n граничных условий.

Применительно к конструкции, показанной на рисунке 16.3, граничные условия указаны над ее опорами.

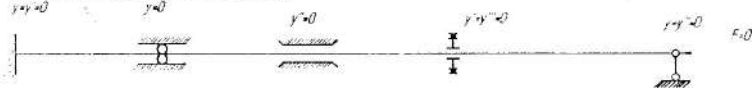


Рис. 16.3 К определению граничных условий

17. Расчеты на сопротивление усталости

1. Характеристики сопротивления усталости и их определение

Усталость материала – явление, состоящее в его постепенном разрушении при циклических воздействиях. Сопротивление усталости – способность металла не разрушаться при таких воздействиях в течение определенного времени.

Характеристики сопротивления усталости выявляются на образцах металла при их циклическом нагружении с различной интенсивностью. Испытания проводятся до появления трещин или полного разрушения. Интенсивность нагружения характеризуется напряжениями циклов: максимальным σ_{max} , минимальным σ_{min} , амплитудным σ_a и средним σ_m . Коэффициент асимметрии цикла нагружения R определяется как

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

При симметричных циклах нагружения $R = -1$. При отнулевых положительных (пульсирующих) циклах $R = 0$ (рис. 17.1)

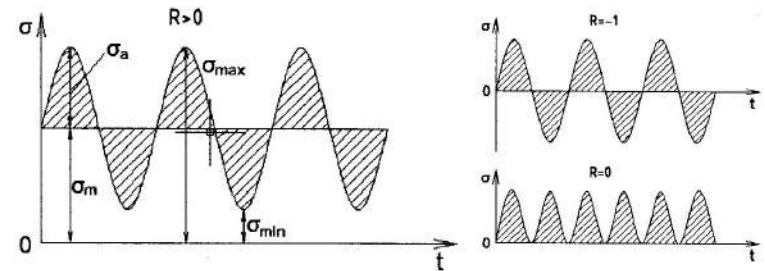


Рис. 17.1 Процессы нагружения с различной асимметрией циклов.

Результаты испытаний при заданном значении R представляются в виде зависимостей кривых усталости $\sigma = f(N)$, где $\sigma = \sigma_{max}$ или $\sigma = \sigma_a$, N - число циклов до появления усталостной трещины, либо до полного разрушения (рис. 17.2).

Чем выше уровень напряжений, тем меньше число циклов до разрушения. Испытания прекращаются при напряжении σ_R , соответствующих некоторому базовому числу циклов нагружения N_0 из диапазона значений от 2 до 10 млн. циклов.

Напряжение σ_R называется пределом выносливости при коэффициенте асимметрии циклов R . При симметричных циклах нагружения предел выносливости обозначается через σ_{-1} , при пульсирующих через σ_0 . Для описания кривых усталости используется уравнение

$$N = \begin{cases} N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma} \right)^m, & \sigma \geq \sigma_{-1} \\ \infty, & \sigma < \sigma_{-1} \end{cases} \quad \text{или} \quad N = N_0 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^m \cdot z \cdot e^{\beta \epsilon} \left(\frac{\sigma_R}{\sigma} \right) \quad (17.1)$$

где N_0 - число циклов до разрушения, принятое при определении σ_{-1} , m - параметр.

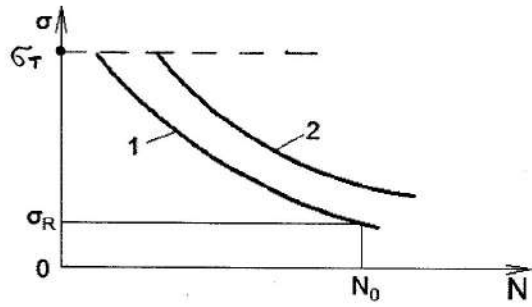


Рис. 17.2. Кривые усталости, определенные по моментам появления трещины (1) и полного разрушения (2).

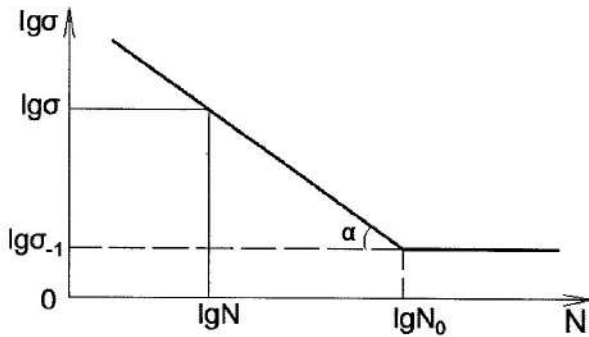


Рис. 17.3. Кривые усталости в двойных логарифмических координатах

В двойных логарифмических координатах $\{\lg \sigma, \lg N\}$ уравнение (17.1) при $\sigma \geq \sigma_{-1}$ описывает прямую линию, наклоненную к оси N под углом α , определяемым из соотношения:

$$\operatorname{ctg} \alpha = m = \frac{\lg N_0 - \lg N}{\lg \sigma - \lg \sigma_{-1}} \quad (17.2)$$

Экспериментальное определение кривых усталости в полном объеме при несимметричных циклах нагружения и определение соответствующих пределов выносливости σ_R представляет собой сложную и чрезвычайно трудоемкую задачу. Поэтому обычно ограничиваются испытанием только при симметричных циклах нагружения с определением предела выносливости σ_{-1} , а пересчет кривых усталости на несимметричные циклы нагружения и построение соответствующих схематизированных поверхностей усталости, т.е. графиков функций $N = N(\sigma_a, \sigma_m)$, производится с использованием имеющихся данных о пределе прочности σ_B при

этому обычно ограничиваются испытанием только при симметричных циклах нагружения с определением предела выносливости σ_{-1} , а пересчет кривых усталости на несимметричные циклы нагружения и построение соответствующих схематизированных поверхностей усталости, т.е. графиков функций $N = N(\sigma_a, \sigma_m)$, производится с использованием имеющихся данных о пределе прочности σ_B при растяжении и пределах текучести при растяжении $\sigma_{T,p}$ и сжатии $\sigma_{T,cж}$. При этом используется следующая закономерность: при увеличении среднего уровня действующих растягивающих напряжений для сохранения того же числа циклов до разрушения, необходимо уменьшать значения амплитуд напряжений. При сжимающих напряжениях σ_m вначале допустимый уровень амплитуд напряжений несколько повышается, а затем вновь понижается.

По имеющимся данным вначале строится схематизированная диаграмма предельно допустимых амплитуд, которая в системе координат $\{\sigma_a, \sigma_m\}$ ограничивается прямыми, проходящими через точки с координатами (рис.5.)

$$\begin{aligned} & \{(\sigma_a = \sigma_{-1}, \sigma_m = 0) (\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_B)\}, \\ & \{(\sigma_a = \sigma_T, \sigma_m = 0) (\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_{T,p})\}, \\ & \{(\sigma_a = \sigma_{T,cж}, \sigma_m = 0) (\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_{T,cж})\} \end{aligned}$$

Первая прямая является границей, определяемой по появлению усталостных трещин, а две другие – границами, определяемыми появлением пластических деформаций и поэтому являющимися условными.

Если точка с координатами $\{\sigma_a, \sigma_m\}$, характеризующая интенсивность процесса нагружения, находится внутри области, ограниченной указанными тремя прямыми, то усталостного разрушения не произойдет. Если эта точка находится в заштрихованной на рис. 17.4.а) области, то

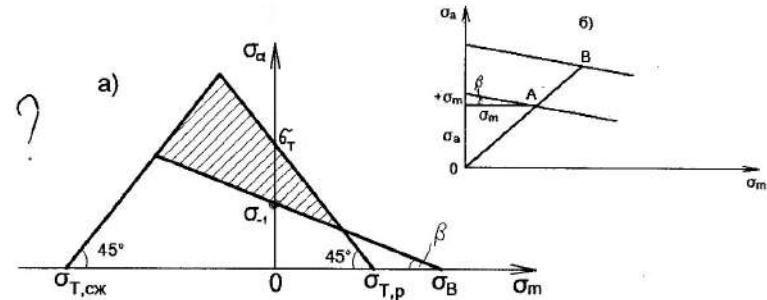


Рис. 17.4. Схематизированная диаграмма предельных амплитуд

будет происходить процесс постепенного накопления усталостных повреждений, заканчивающийся появлением макротрещины или полным разрушением конструк-

ции. Если эта точка находится вне указанных двух областей, то произойдет либо немедленное статическое разрушение, либо разрушение произойдет при небольшом числе циклов нагружения, характерном для циклического упругопластического деформирования.

Построенная диаграмма предельных амплитуд позволяет определить запас сопротивления усталости и построить схематизированную поверхность усталости. Так, если цикл нагружения характеризуется некоторой точкой А (рис.17.4) то на продолжении линии ОА отмечается предельная для данного сочетания напряжений $\{\sigma_a, \sigma_m\}$ точка В и коэффициент запаса сопротивления при $\sigma_{max} < \sigma_{Tp}$ определяется как (см. рис.17.4.б))

$$n = \frac{OB}{OA} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi\sigma_m}, \quad (17.2)$$

где $\psi = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = tg\beta$

Так как при симметричных циклах нагружения уравнение кривой усталости (17.1.) можно представить в виде:

$N = N_0 n^m$, где коэффициент запаса сопротивления усталости при симметричных

циклах нагружения $n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}$,

то в соответствии с (17.2.) для циклов, которые характеризуются точками из заштрихованной на рис.17.4. области, ориентировочное уравнение поверхности

усталости можно записать в виде:

$$N = N(\sigma_a, \sigma_m) = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi\sigma_m} \right)^m$$

2. Расчеты на сопротивление усталости при кручении и при изгибе с кручением

Расчеты на сопротивление усталости при кручении производятся аналогично описанным выше расчетам на циклическое растяжение и изгиб. При этом предел выносливости при симметричных циклах нагружения обозначается

через τ_{-1} , а запас прочности определяется как $n_t = \frac{\tau_{-1}}{\tau}$, где $\tau_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{-1}$, τ -

заданный уровень амплитуд касательных напряжений.

При определении запаса прочности при циклическом изгибе с кручением исходят из четвертой теории прочности, при которой эквивалентное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Коэф-т запаса устал-й прочности вычисляется по формуле

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}$$

Число циклов до разрушения будет определяться по формуле:

$$N = N_0 n^m = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} \right)^m$$

(17.4)

3. Расчеты на усталость при нерегулярных процессах нагружения

Рассмотрим процесс нагружения состоящий из различных по интенсивности циклов нагружения (рис. 17.7.).

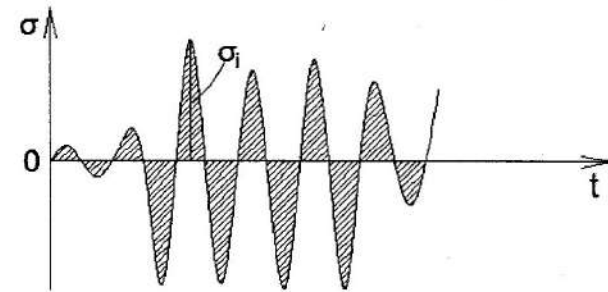


Рис.17.7. Пусть α_i - от-

носительное содержание циклов с амплитудами σ_i , а N_i - искомое число циклов до разрушения. Тогда число циклов с напряжениями σ_i будет определяться как $n_i = \alpha_i N$, где $\sum \alpha_i = 1$.

Усталостное повреждение за один цикл нагружения с напряжением σ_i определяется как:

$$v_i = \frac{1}{N_i}$$

где $N_i = N(\sigma_i)$ определяется по уравнению кривой усталости (17.1)

Тогда условие того, что сумма усталостных напряжений достигнет единицы, т.е. 100% будет записываться как

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = 1,$$

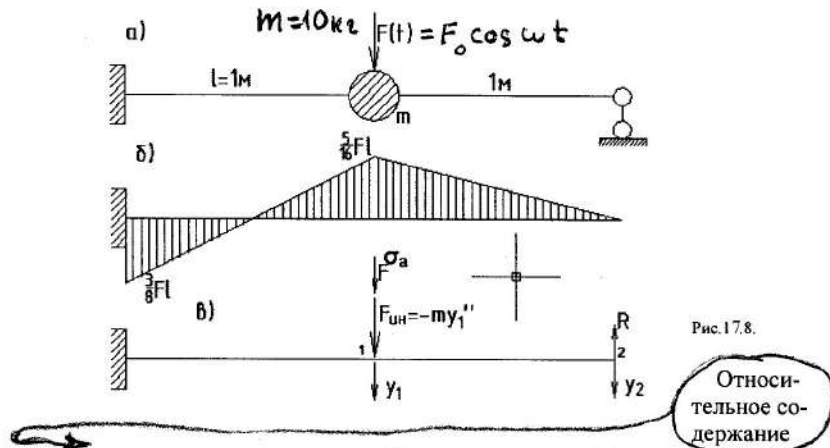
а искомое число циклов до разрушения будет определяться по формуле

$$N = \frac{N_0 \sigma_{-1}^m}{\sum_{i=1}^k \alpha_i \sigma_i^m} \quad (17.5)$$

где k - число различных уровней амплитуд напряжений

4. Контрольная задача

Пусть требуется оценить усталостную долговечность балки с сосредоточенной массой $m = 10 \text{ кг}$, на которую действует гармоническая сила $F = F_0 \cos \omega t$ с частотой ω ($F_0 = 1 \text{ кН}$, рис. 17.8а). Сечение балки - прямоугольник ($6 \times 3 \text{ см}^2$) с $J = 13,5 \text{ см}^4$, $W = 9 \text{ см}^3$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Уравнение кривой усталости имеет вид: $N = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma} \right)^m$, где $N_0 = 2 \cdot 10^6$ циклов, $\sigma_{-1} = 100 \text{ МПа}$, $m = 4$.



циклов в процессе нагружения $\sigma(t)$ с частотой $\omega_1 = 0,4\omega_0$; $\alpha_1 = 0,7$, с частотой $\omega_2 = 0,6\omega_0$; $\alpha_1 = 0,2$, с частотой $\omega_3 = 0,8\omega_0$; $\alpha_3 = 0,1$, где ω_0 - частота собственных колебаний системы.

Эпюра изгибающих моментов при статическом нагружении балки показана на рис. 17.8.б). Наибольшее статическое напряжение в заделке

$$\sigma_{ст} = 41,7 \text{ МПа}. \text{ При этом } EJS_{11} = \frac{1}{3} \text{ м}^3, EJS_{22} = \frac{8}{3} \text{ м}^3, EJS_{12} = \frac{5}{6} \text{ м}^3.$$

Расчетная схема для динамического расчета показана на рис. 17.8.в). В соответствии с методом сил имеем следующие соотношения для определения перемещений y_1 и y_2 в точках 1 и 2:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}(F - my_1'') - \delta_{12}R \\ y_2 = \delta_{21}(F - my_1'') - \delta_{22}R \end{cases}$$

где R - реакция на правой опоре
Из второго уравнения следует что

$$R = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}(F - my_1'')$$

Первое уравнение принимает вид

$$y_1'' + \omega_0^2 y_1 = f(t), \text{ где}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m \left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}} \right)}; \quad f(t) = \frac{F}{m \left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}} \right)}$$

Отсюда получаем $\omega_0 = 53,5 \text{ рад/сек}$, а коэффициент динамичности

$$K_d = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$$

С учетом коэффициента динамичности и концентрации напряжений получаем для первого режима $\sigma_1 = 50 \text{ МПа}$, для второго режима $\sigma_2 = 75 \text{ МПа}$, для третьего $\sigma_3 = 115 \text{ МПа}$.

По формуле (17.5) находим число циклов нагружения до разрушения

$$N_* = \frac{N_0 \sigma_{-1}^m}{\alpha_1 \sigma_1^m + \alpha_2 \sigma_2^m + \alpha_3 \sigma_3^m} = 7,8 \cdot 10^6 \text{ циклов}$$

Долговечность в часах работы:

$$T = \frac{2\pi N_*}{3600 \cdot \omega_0 (0,4\alpha_1 + 0,6\alpha_2 + 0,8\alpha_3)} = 500 \text{ час}.$$

18. Расчеты на ударные воздействия.

Упругая система называется линейной, если перемещения в ней пропорциональны приложенным силам, т.е. если выполняется равенство:

$$F=C\delta$$

где F-сила, δ -перемещение, C-коэффициент жесткости.

Все рассмотренные ниже упругие системы (стержни, пружины и т.п.) являются примерами таких линейных систем. Они отличаются лишь значениями коэффициентов жесткости. В дальнейшем все упругие системы будут изображаться в виде пружин. Действительное конструктивное исполнение реальной упругой системы может быть при этом любым.

Удар-это явление, состоящее в кратковременном силовом взаимодействии двух объектов.

Рассмотрим удар по упругой системе абсолютно твердого тела весом G, движущегося под углом α с высоты h без трения по наклонной плоскости с начальной скоростью V_0 (рис. 18.1).

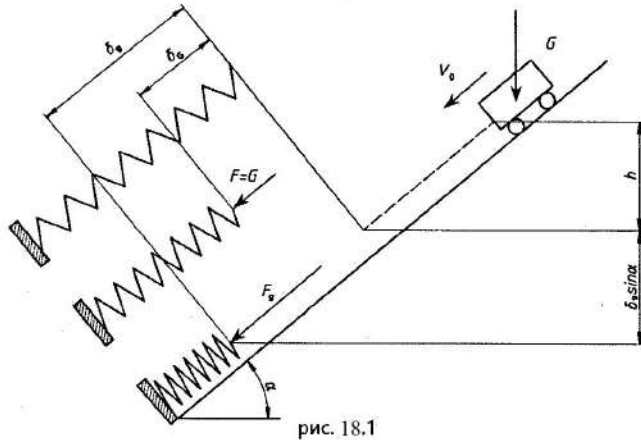


рис. 18.1

Максимальное динамическое усилие и деформацию обозначим через F_g и δ_g . Деформацию пружины, соответствующую силе веса падающего груза при $F=G$, обозначим через δ_0 .

Коэффициент динамичности определяются как:

$$K_g = \frac{F_g}{G} = \frac{\delta_g}{\delta_0} \tag{18.2}$$

Будем считать, что энергия груза, состоит в начальный момент из кинетической и потенциальной энергии, во время удара полностью переходит в потенциальную энергию сжатия пружины. Отсюда следует равенство:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + G(h + \delta_g \sin\alpha) = \frac{1}{2}F_g \delta_g \tag{18.3}$$

Используя соотношение (18.2), используем квадратное уравнение для определения коэффициента динамичности:

$$K_g^2 - 2K_g \sin\alpha - \left(\frac{2h}{\delta_0} + \frac{T}{\Pi}\right) = 0 \tag{18.4}$$

Где $T=mV_0^2/2$ -кинетическая энергия груза в начальный момент, $\Pi=G\delta_0/2$ -потенциальная энергия пружины при нагрузке, равной весу движущегося груза.

Решив уравнение (18.4), получим формулу для определения коэффициента динамичности:

$$K_g = \sin\alpha \pm \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2h}{\delta_0} + \frac{T}{\Pi}} \tag{18.5}$$

При $\alpha=0$ и $h=0$ имеет место горизонтальный удар. В этом случае

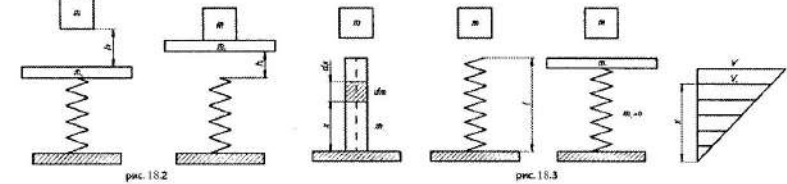
$$K_g = \sqrt{T/\Pi} \tag{18.6}$$

При $\alpha=90^\circ$ и $V_0=0$ ($T=0$) имеет место вертикальный удар. В этом случае

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} \tag{18.7}$$

где знак минус опущен, а величина δ_0 заменена на перемещение от статической нагрузки $\delta_{ст}$.

Учтем теперь массу упругой системы. Рассмотрим случай вертикального удара. Пусть масса упругой системы m_n сосредоточена в ее верхней части (рис. 18.2а), а остальная часть системы остается невесомой.



Будем считать, что отскока при ударе не происходит и после удара обе массы m и m_n движутся совместно. Сведем решение поставленной задачи к рассмотренному выше случаю удара по невесомой упругой системе (рис.18.2б), т.е. будем считать, что оба груза подняты над невесомой упругой системой на некоторую высоту h_1 , которую определим из условия что кинетическая энергия в момент удара двух грузов равна кинетической энергии груза с массой m при его падении с высоты h :

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}(m + m_n)V_1^2 \tag{18.8}$$

где V и V_1 – скорости соударения грузов с упругой системой для двух рассматриваемых случаев.

Так как $V^2=2gh$ и $V_1^2=2gh_1$, то из соотношения (18.8) следует, что

$$h_1 = \frac{mh}{m+m_n} \tag{18.9}$$

Подставим (18.9) в (18.7), получим:

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hm}{\delta_{ст}(m+m_n)}} \tag{18.10}$$

Рассмотрим теперь случай, когда масса упругой системы m_0 распределена по длине стержня равномерно (рис. 18.3а,б). Сведем решение этой задачи к предыдущей, когда вся масса системы сосредоточена в ее верхней части (рис.18.3в). Эту массу назовем приведенной массой и обозначим через m_n , определим ее значение из условия равенства кинетических энергий в системах «а» и «в». При этом будем считать распределение скоростей по длине стержня линейным (рис.18.3г): $V_x=VX/l$, где V -максимальное значение скорости.

Из указанных условий получаем равенства:

$$\frac{m_n V^2}{2} = \frac{1}{2} \int V_x^2 dm_0 = \frac{\rho A V^2}{2l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{6} m_0 V^2$$

где ρ - плотность материала, A - площадь сечения.

Отсюда получаем $m_n=m_0/3$. Для этого случая из соотношения (18.10) следует, что

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hm}{(m + \frac{1}{3}m_0)\delta_{ст}}}$$