

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

**А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко**

**ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ  
(ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ) СИЛ**

*Рекомендовано Научно-методическим советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия по курсам  
«Основы прикладной теории механических колебаний»,  
«Теория устойчивости движения механических систем»*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2013

УДК 531(075.8)  
ББК 22.213  
Г96

**Гуськов А.М.**

Г96 Особенности динамики механических систем под действием неконсервативных (циркуляционных) сил : учеб. пособие по курсам «Основы прикладной теории механических колебаний», «Теория устойчивости движения механических систем» / А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 53, [3] с.; ил.

ISBN 978-5-7038-3656-9

Рассмотрены особенности аналитического и численного анализа устойчивости положений равновесия механических систем на основе изучения бифуркаций Пуанкаре – Андронова – Хопфа при различных параметрах нагрузки.

Для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающихся по специальности «Прикладная механика».

УДК 531(075.8)  
ББК 22.213

ISBN 978-5-7038-3656-9

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013

## Предисловие

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающихся по специальности «Прикладная механика».

В пособии рассмотрены особенности аналитического и численного анализа устойчивости положений равновесия механических систем под действием неконсервативных сил на основе изучения бифуркаций Пуанкаре – Андронова – Хопфа при различных параметрах нагрузки. В случае неконсервативного нагружения потеря устойчивости может сопровождаться возбуждением автоколебаний в отличие от случая действия консервативных сил, когда потеря устойчивости проявляется в виде монотонного перехода к новому устойчивому положению равновесия.

При изложении материала авторы базируются на рассмотрении механической системы, представляющей собой перевернутый плоский двухзвенный маятник, шарнирно закрепленный на неподвижном основании (в первом приближении такая система описывает динамику ракеты под действием силы тяги двигателя). Выбор данной системы в качестве базовой связан с тем, что на ее основе в наиболее доступной и наглядной форме можно продемонстрировать и изучить основные особенности анализа устойчивости состояния равновесия механических систем под действием неконсервативных сил.

В пособии с необходимой степенью детализации описаны вывод нелинейных дифференциальных уравнений движения двухзвенного маятника и их приведение к безразмерной форме. Для исследования устойчивости тривиального решения, соответствующего положению равновесия – вертикальному положению звеньев маятника, использован первый метод Ляпунова. Условия устойчивости сформулированы на основе критериев Рауса – Гурвица. Изложена методика построения бифуркационных диаграмм Пуан-

каре – Андронова – Хопфа, что позволяет исследовать поведение системы в случае потери устойчивости при критических и закритических значениях параметров нагрузки.

Кроме того, в пособии проанализировано дестабилизирующее действие сил внутреннего трения в системах с циркуляционными силами (так называемый парадокс Циглера).

Пособие может быть полезно также аспирантам и преподавателям, желающим более глубоко изучить специальные вопросы нелинейных колебаний и устойчивости динамических систем.

Издание подготовлено на основе результатов, полученных при выполнении проектов аналитической ведомственной целевой программы Министерства образования и науки Российской Федерации № 2.1.1/5248 и № 2.1.2/5277, грантов РФФИ № 07-08-00253-а, № 07-08-00592-а, гранта CRDF НОЦ-018.

# 1. Основные сведения об устойчивости положений равновесия механических систем. Определение циркуляционных сил

Для обеспечения механической надежности элементов конструкций и деталей машин кроме условий прочности и жесткости необходимо соблюдать и условия устойчивости. Под устойчивостью упругих систем подразумевают их способность сохранять определенную (исходную) форму равновесия под действием заданной нагрузки.

Когда внешние силы достигают своего *критического значения*, происходит *разветвление* форм равновесия (*бифуркация*). Потеря устойчивости может проявляться по-разному в зависимости от свойств системы: в одних случаях система приобретает новую смежную форму равновесия, сколь угодно близкую к исходной форме, или несмежную форму равновесия (при статической потере устойчивости); в других случаях система из состояния покоя переходит к колебательному движению (при так называемой динамической потере устойчивости). В первом случае критические состояния системы можно определять, не рассматривая ее динамику, тогда как во втором случае анализ устойчивости необходимо проводить с помощью динамических методов.

Форма равновесия и тип потери устойчивости зависят от вида нагрузок (обобщенных сил), действующих в системе.

Уравнения движения механической системы с конечным числом степеней свободы могут быть представлены в виде уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_j} = Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (1)$$
$$j = 1, \dots, n, \quad \mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_n\}^T, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt},$$

где  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  – кинетическая энергия системы<sup>1</sup>;  $t$  – время;  $\{Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), q_j, \dot{q}_j \mid j=1, \dots, n\}$  – обобщенные силы, координаты и скорости;  $n$  – число степеней свободы.

В ряде случаев обобщенные силы можно представить в виде суммы составляющих, каждая из которых зависит только от обобщенных координат и/или обобщенных скоростей:

$$Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = Q'_j(\mathbf{q}) + Q''_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (2)$$

Силы  $Q'_j(\mathbf{q})$ , зависящие только от обобщенных координат, называются *позиционными*.

Если позиционные силы удовлетворяют условиям взаимности

$$\frac{\partial Q'_j(\mathbf{q})}{\partial q_k} = \frac{\partial Q'_k(\mathbf{q})}{\partial q_j}, j, k = 1, \dots, n, \quad (3)$$

то такие силы называют *консервативными*. Соотношения (3) эквивалентны условию равенства нулю работы, совершенной позиционными силами на произвольном замкнутом пути в пространстве конфигураций:

$$\oint \sum_{j=1}^n Q'_j dq_j = 0. \quad (4)$$

Примерами таких сил являются «мертвые» силы веса, силы упругости и др. Соотношение (3) или (4) позволяет ввести понятие потенциальной энергии  $U(\mathbf{q})$ , зависящей от обобщенных координат:

$$U(\mathbf{q}) : Q'_j = - \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_j}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Матричные векторы и матрицы, привязанные к выбранному арифметическому пространству, будем обозначать прямым полужирным символом, физические векторы, как инвариантные объекты, – прямым полужирным символом со стрелкой сверху.

Следует отметить, что существует класс сил, зависящих также от обобщенных скоростей и позволяющих ввести понятие обобщенной потенциальной энергии в следующем виде [1, с. 31]:

$$Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j}.$$

В случае линейных позиционных сил их можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{Q}' = -\mathbf{C}\mathbf{q}. \quad (6)$$

Для консервативных сил матрица  $\mathbf{C}$  симметричная ( $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ ) и потенциальная энергия имеет вид квадратичной формы:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + \text{const.}$$

Матрица  $\mathbf{C}$  называется матрицей жесткости. В случае, когда соотношение (3) или (4) не выполняется, т. е.

$$\frac{\partial Q'_j(\mathbf{q})}{\partial q_k} \neq \frac{\partial Q'_k(\mathbf{q})}{\partial q_j}, \quad j, k = 1, \dots, n \Leftrightarrow \oint \sum_{j=1}^n Q'_j dq_j \neq 0,$$

позиционные силы называются *циркуляционными*. (Иногда для этих сил используют термин «неконсервативные» [2], но его чаще ассоциируют с силами диссипации, поэтому в дальнейшем будем говорить о «циркуляционных» силах.) При этом отсутствует понятие потенциала сил или потенциальной энергии сил (5).

В общем случае для линейной зависимости (6) матрица  $\mathbf{C}$  несимметричная ( $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}^T$ ). Если в матрице  $\mathbf{C}$  выделить симметричную  $\mathbf{K}$  и антисимметричную  $\mathbf{N}$  части:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^T): \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^T, \quad \mathbf{N} = -\mathbf{N}^T, \quad (7)$$

то матрица  $\mathbf{K}$  является матрицей жесткости консервативных сил, а матрица  $\mathbf{N}$  – матрицей циркуляционных сил. При этом выполняются следующие соотношения:

$$\oint \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n K_{kj} q_j \right) dq_k = \oint (dq^T) \mathbf{K} \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q}^T \mathbf{N} \mathbf{q} = 0, \quad (8)$$

т. е. циркуляционные силы ортогональны вектору обобщенных координат. Собственно, именно это свойство и дало название «циркуляционные» силы. В работе [3] циркуляционными называются позиционные силы, удовлетворяющие свойству

$$\mathbf{q}^T \mathbf{Q}'(\mathbf{q}) = 0. \quad (9)$$

Из соотношений (7)–(9) следует, в частности, что понятие циркуляционных сил может быть введено только для механических систем с двумя и более степенями свободы:  $n \geq 2$ . Для  $n = 2$  матрица  $\mathbf{N}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{N} = a \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда очевидно, что условие (9) выполняется:

$$\{q_1 \ q_2\} a \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \{q_1 \ q_2\} a \begin{Bmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{Bmatrix} = a(-q_1 q_2 + q_2 q_1) = 0.$$

Устойчивость положений равновесия механических систем при действии только консервативных сил можно исследовать с помощью теоремы Лагранжа – Дирихле, не рассматривая динамику системы. Иногда для поиска критических значений нагрузки достаточно использовать критерий Эйлера:  $\det(\mathbf{K}) = 0$  или  $\det(\mathbf{C}) = 0$ , при этом вопрос об устойчивости соответствующих критических состояний системы должен решаться с привлечением дополни-



тельной информации. Присутствие циркуляционных сил приводит к необходимости рассматривать задачу об устойчивости положений равновесия, используя первый или второй метод Ляпунова. При этом возможна как статическая бифуркация Эйлера<sup>2</sup>, так и динамическая бифуркация Пуанкаре – Андронова – Хопфа. В аэроупругих задачах с динамической бифуркацией при действии циркуляционных сил связывают понятие флаттера.

Примером циркуляционных сил являются следящие силы, для реализации которых необходима система управления<sup>3</sup>. Отметим, что проблема устойчивости механических систем при их нагружении циркуляционными силами впервые была рассмотрена в 1926 г. Е.Л. Николаи [4, 5].

Наиболее характерными примерами механических систем, в которых возникают циркуляционные силы, являются:

- конструкции, взаимодействующие с внешними потоками жидкости или газа (лопатки турбин и компрессоров, воздушные винты, крылья и панели летательных аппаратов, антенны, твэлы и др.), в которых возникают, например, аэродинамические силы, пропорциональные углу атаки крыла и приводящие к возбуждению автоколебаний;
- трубопроводы с протекающей жидкостью, в которых в результате ее истечения возникают следящие силы, пропорциональные углу наклона деформированной оси трубопровода к ее недеформированному положению;
- летательные аппараты (ракеты) с реактивными двигателями, сила тяги которых приводит к возбуждению колебаний корпуса;
- вращающиеся валы различных роторных систем (центрифуги, турбины, насосы и др.), неустойчивое вращение которых обусловлено наличием внутреннего трения или гидродинамического трения в подшипниках скольжения;
- протяженные вращающиеся элементы, нагруженные следящими поперечными силами и крутящими моментами;
- системы автоматического регулирования со следящими силами (силы радиальной коррекции в гироскопических системах и пр.).

<sup>2</sup> Иногда статическую бифуркацию называют *дивергенцией*.

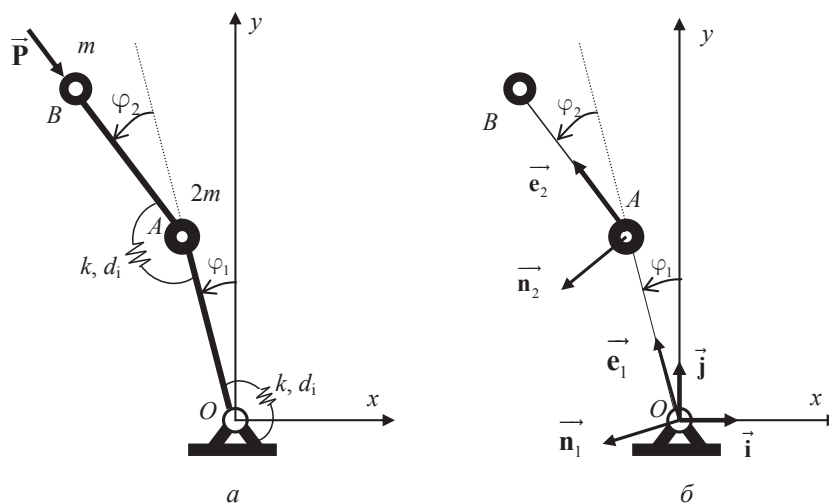
<sup>3</sup> Здесь имеется в виду ситуация, когда направление действия нагрузок изменяется в зависимости от деформации механической системы, вызываемой этими же нагрузками.

Анализу различных проблем устойчивости неконсервативных систем посвящена обширная отечественная и зарубежная литература [1, 2, 6–8]. Тем не менее ряд экспериментальных наблюдений не всегда адекватно описывается существующими расчетными моделями [8].

В дальнейшем исследуются устойчивость положения равновесия и закритическое поведение механической системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием циркуляционных сил.

## 2. Расчетная схема и вывод дифференциальных уравнений движения двухзвенного маятника

В качестве базовой будем рассматривать механическую систему, представляющую собой перевернутый плоский двухзвенный маятник, шарнирно закрепленный на неподвижном основании (рис. 1, а). Верхнее звено ( $AB$ ) нагружено сосредоточенной силой, направление которой всегда совпадает с продольной осью звена, т. е. внешняя сила следит за возможным изменением положения звена в плоскости. В первом приближении такая система описывает динамику ракеты под действием силы тяги двигателя.



**Рис. 1.** Принципиальная схема стойки Циглера (а) и направления единичных векторов (б)

Подобная модель впервые была рассмотрена Г. Циглером в 1951 г. [6], поэтому такую систему часто называют *стойкой Циглера*.

Стойка представляет собой плоский двухзвенный маятник, состоящий из жестких невесомых элементов  $OA$ ,  $AB$  одинаковой длины  $l$ , имеющих сосредоточенные массы  $2m$ ,  $m$  в узлах  $A$  и  $B$  (см. рис. 1,  $a$ ). Сочленения  $O$  и  $A$  представляют собою линейные упруговязкие плоские шарниры с коэффициентом угловой жесткости  $k$  и коэффициентом демпфирования  $d_i$ . Положение системы однозначно определяется двумя углами, которые можно принять за обобщенные координаты.

Угол  $\varphi_1$  отсчитывается против хода часовой стрелки от положительного направления оси  $Oy$  прямоугольной системы координатных осей  $xOy$  с ортами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , начало которой совмещено с осью шарнира закрепления всей системы; угол  $\varphi_2$  отсчитывается против хода часовой стрелки от оси звена  $OA$ . Единичные векторы  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  направлены вдоль соответствующих звеньев (рис. 1,  $b$ ). Единичные векторы  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  ортогональны векторам  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ :  $\vec{e}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$ ,  $\vec{e}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0$ . В соответствии с рис. 1,  $b$  устанавливаются следующие геометрические соотношения между единичными векторами и правила дифференцирования:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= -(\sin(\varphi_1))\vec{i} + (\cos(\varphi_1))\vec{j}; \\
\vec{e}_2 &= -(\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\vec{i} + (\cos(\varphi_1 + \varphi_2))\vec{j}; \\
\vec{n}_1 &= -(\cos(\varphi_1))\vec{i} - (\sin(\varphi_1))\vec{j}; \\
\vec{n}_2 &= -(\cos(\varphi_1 + \varphi_2))\vec{i} - (\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\vec{j}; \\
\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \cos(\varphi_2); \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{n}_1 = \sin(\varphi_2); \\
\dot{\vec{e}}_1 &= \dot{\varphi}_1 \vec{n}_1; \quad \dot{\vec{e}}_2 = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \vec{n}_2; \\
\dot{\vec{n}}_1 &= -\dot{\varphi}_1 \vec{e}_1; \quad \dot{\vec{n}}_2 = -(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Положения  $\vec{r}$  и скорости  $\vec{v}$  сосредоточенных масс определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_A &= l\vec{e}_1; \quad \vec{r}_B = l(\vec{e}_1 + \vec{e}_2); \\
\vec{v}_A &= l\dot{\varphi}_1 \vec{n}_1; \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + l(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \vec{n}_2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Система нагружена сосредоточенной сжимающей силой  $\vec{P} = -P\vec{e}_2$ , следящей за направлением звена (см. рис. 1, а).

Для вывода уравнений движения используем уравнения Лагранжа второго рода (1):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} = Q_i, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} 2m(\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A) + \frac{1}{2} m(\vec{v}_B \cdot \vec{v}_B). \quad (13)$$

После подстановки в (13) соотношений (11) получим

$$T = \frac{1}{2} ml^2 [2\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_1^2 + (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + 2\dot{\phi}_1(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos(\phi_2)]. \quad (14)$$

Частные производные от кинетической энергии (14) вычислим как

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \phi_1} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \phi_2} &= -ml^2 \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin(\phi_2); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} &= ml^2 [(4 + 2 \cos(\phi_2)) \dot{\phi}_1 + (1 + \cos(\phi_2)) \dot{\phi}_2]; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} &= ml^2 [(1 + \cos(\phi_2)) \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2]. \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения обобщенных сил  $Q_1, Q_2$  рассмотрим виртуальную работу  $W_\delta$  приложенных к системе сил: сил упругости и линейного демпфирования в шарнирах и следящей силы  $\vec{P} = -P\vec{e}_2$ . При этом учтем, что виртуальное перемещение  $\delta \vec{r}_B$  точки  $B$

$$\delta \vec{r}_B = l[\delta \phi_1 \vec{n}_1 + (\delta \phi_1 + \delta \phi_2) \vec{n}_2]. \quad (16)$$

При вычислении вариации (16) использованы соотношения (10), из которых следует, что

$$\delta \vec{e}_1 = \delta \varphi_1 \vec{n}_1; \quad \delta \vec{e}_2 = \delta(\varphi_1 + \varphi_2) \vec{n}_2.$$

Тогда с учетом линейных сил упругости (коэффициент  $k$ ) и демпфирования (коэффициент  $d_i$ ) в шарнирах виртуальную работу вычислим следующим образом:

$$\begin{aligned} W_\delta = & -(\dot{\varphi}_1 \delta \varphi_1) d_i - (\dot{\varphi}_2 \delta \varphi_2) d_i - (\varphi_1 \delta \varphi_1) k - (\varphi_2 \delta \varphi_2) k - \\ & - P \vec{e}_2 \cdot \delta \vec{r}_B; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\vec{e}_2 \cdot \delta \vec{r}_B = l \delta \varphi_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{n}_1 + l(\delta \varphi_1 + \delta \varphi_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{n}_2 = l \delta \varphi_1 \sin(\varphi_2).$$

Из определения обобщенных сил виртуальная работа

$$W_\delta = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2,$$

и из соотношений (8) следует

$$Q_1 = -d_i \dot{\varphi}_1 - k \varphi_1 - Pl \sin(\varphi_2);$$

$$Q_2 = -d_i \dot{\varphi}_2 - k \varphi_2.$$

Если добавить внешнее трение, пропорциональное абсолютной скорости масс и направленное против их движения, получим обобщенные силы в виде

$$\begin{aligned} Q_1 = & -d_i \dot{\varphi}_1 - d_e l^2 [(3 + 2 \cos(\varphi_2)) \dot{\varphi}_1 + (1 + \cos(\varphi_2)) \dot{\varphi}_2] - \\ & - k \varphi_1 - Pl \sin(\varphi_2); \end{aligned} \quad (18)$$

$$Q_2 = -d_i \dot{\varphi}_2 - d_e l^2 [(1 + \cos(\varphi_2)) \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2] - k \varphi_2,$$

где  $d_e$  – коэффициент внешнего линейного вязкого трения.

В уравнениях для определения обобщенных сил (18) выделим позиционные составляющие

$$\begin{aligned} Q'_1 = & -k \varphi_1 - Pl \sin(\varphi_2); \\ Q'_2 = & -k \varphi_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Для того чтобы убедиться в том, что обобщенные позиционные силы  $\{Q'_1, Q'_2\}$ , связанные со следящей силой  $\vec{P} = -P\vec{e}_2$ , не обладают потенциалом, достаточно проверить выполнение необходимых условий (3). Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q'_1}{\partial \varphi_2} &= \frac{\partial[-k\varphi_1 - Pl \sin(\varphi_2)]}{\partial \varphi_2} = -Pl \cos(\varphi_2); \\ \frac{\partial Q'_2}{\partial \varphi_2} &= \frac{\partial(-k\varphi_2)}{\partial \varphi_2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q'_1}{\partial \varphi_2} \neq \frac{\partial Q'_2}{\partial \varphi_1}. \quad (20)$$

При  $P = 0$  соотношения (20) удовлетворяют условиям (3):

$$\frac{\partial Q'_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial(-k\varphi_1)}{\partial \varphi_2} = 0; \quad \frac{\partial Q'_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial(-k\varphi_2)}{\partial \varphi_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q'_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial Q'_2}{\partial \varphi_1}.$$

Отметим, что в случае консервативной сжимающей силы, сохраняющей свое направление в пространстве ( $\vec{P} = -P\vec{j}$ ), позиционные составляющие обобщенных сил

$$\begin{aligned} Q'_1 &= -k\varphi_1 - Pl[\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]; \\ Q'_2 &= -k\varphi_2 - Pl \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned} \quad (21)$$

В этом случае из уравнений (21) следует, что условия (3) выполняются:

$$\frac{\partial Q'_1}{\partial \varphi_2} = -Pl \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \quad \frac{\partial Q'_2}{\partial \varphi_1} = -Pl \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow \frac{\partial Q'_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial Q'_2}{\partial \varphi_1}.$$

Подставив уравнения (15), (18) в уравнение (12), получим уравнения движения в явном виде:

$$\begin{cases}
ml^2[(4 + 2 \cos(\varphi_2))\ddot{\varphi}_1 + (1 + \cos(\varphi_2))\ddot{\varphi}_2] - \\
-ml^2(\sin(\varphi_2))(2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) + d_i\dot{\varphi}_1 + \\
+d_e l^2[(3 + 2 \cos(\varphi_2))\dot{\varphi}_1 + (1 + \cos(\varphi_2))\dot{\varphi}_2] + \\
+k\varphi_1 + Pl \sin(\varphi_2) = 0; \\
ml^2[(1 + \cos(\varphi_2))\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2] + ml^2(\sin(\varphi_2))\dot{\varphi}_1^2 + d_i\dot{\varphi}_2 + \\
+d_e l^2[(1 + \cos(\varphi_2))\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2] + k\varphi_2 = 0.
\end{cases} \quad (22)$$

Таким образом, в общем случае динамика стойки со следящей силой описывается двумя нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (22), куда входят следующие шесть физических параметров:

$$\{m, l, d, d_e, k, P\}. \quad (23)$$

Приведение уравнений движения стойки (22) к безразмерному виду позволяет сократить число существенных параметров до трех. Для этого введем безразмерное время  $\tau = t / T_*$  и используем следующие обозначения (безразмерные комплексы):

$$\begin{aligned}
T_* &= l \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad (\dots)' = \frac{d(\dots)}{d\tau}; \\
\alpha &= \frac{Pl}{k}; \quad \zeta_i = \frac{d_i}{2l\sqrt{mk}}; \quad \zeta_e = \frac{d_e l}{2\sqrt{mk}}.
\end{aligned} \quad (24)$$

Система уравнений (22) примет вид

$$\begin{cases}
[(4 + 2 \cos(\varphi_2))\varphi_1'' + (1 + \cos(\varphi_2))\varphi_2''] - \\
-\sin(\varphi_2)(2\varphi_1'\varphi_2' + (\varphi_2')^2) + \dots \\
\dots + 2\zeta_i\varphi_1' + 2\zeta_e[(3 + 2 \cos(\varphi_2))\varphi_1' + (1 + \cos(\varphi_2))\varphi_2'] + \\
+\varphi_1 + \alpha \sin(\varphi_2) = 0; \\
[(1 + \cos(\varphi_2))\varphi_1'' + \varphi_2''] + \sin(\varphi_2)(\varphi_1')^2 + \dots \\
\dots + 2\zeta_i\varphi_2' + 2\zeta_e[(1 + \cos(\varphi_2))\varphi_1' + \varphi_2'] + \varphi_2 = 0.
\end{cases} \quad (25)$$



То есть существенными являются три безразмерных комплекса (24):  $\{\alpha, \zeta_i, \zeta_e\}$ , выраженные через шесть размерных величин (23). Параметр  $\alpha = (Pl)/k$  определяет нагружение стойки следящей силой  $\vec{P}$ .

Система уравнений (25) описывает произвольные движения стойки Циглера. Чтобы решить эту систему, необходимо задать начальные условия для фазовых переменных  $\{\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'\}$ .

### 3. Численное моделирование динамики стойки Циглера

Для численного моделирования приведем систему уравнений (11) к нормальной форме Коши

$$\mathbf{y}'(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau), \zeta, \alpha), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathfrak{R}^4, \quad (26)$$

используя следующие обозначения:

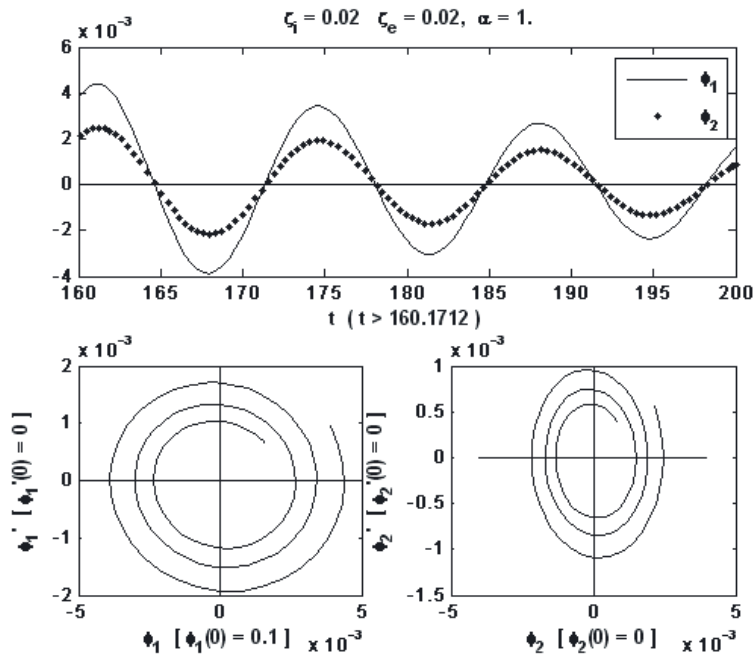
$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1' \\ \Phi_2 \\ \Phi_2' \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ (g_1 - bg_2)/c \\ y_4 \\ (-bg_1 + ag_2)/c \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \sin(y_3)(2y_2y_4 + y_4^2) - 2\zeta_i y_2 - \dots \\ &\dots - 2\zeta_e[(3 + 2\cos(y_3))y_2 + (1 + \cos(y_3))y_4] - \\ &- y_1 - \alpha \sin(y_3); \\ b &= 1 + \cos(y_3); \\ g_2 &= -\sin(y_3)y_2^2 - 2\zeta_i y_4 - 2\zeta_e[(1 + \cos(y_3))y_2 + y_4] - y_3; \\ c &= 3 - [\cos(y_3)]^2; \\ a &= 4 + 2\cos(y_3). \end{aligned} \quad (28)$$

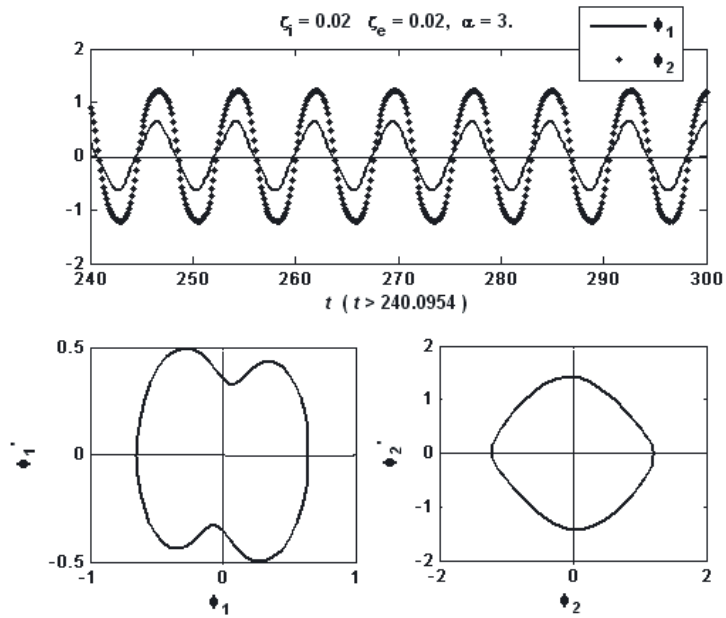
Последующий численный расчет выполнен в среде MATLAB. (Здесь и далее результаты расчета представлены на рисунках, выполненных в среде MATLAB.)

При разных значениях параметра  $\alpha$  возможны различные типы движений рассматриваемой динамической системы. На рис. 2 и 3 представлены результаты расчета полной нелинейной модели (27), (28) в виде изменения фазовых переменных для двух различных значений параметра нагрузки  $\alpha$ . При  $\alpha = 1$  временные зависимости стремятся к нулю, а фазовые траектории – к устойчивому фокусу, что характерно для затухающих колебаний. Система возвращается к устойчивому вертикальному положению при произвольных начальных условиях.

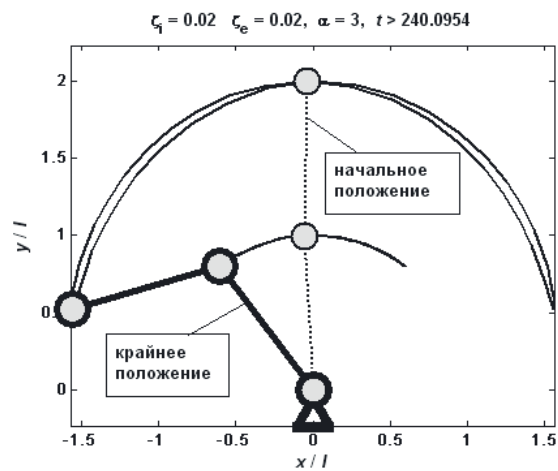


**Рис. 2.** Изменение фазовых переменных в случае докритических значений следящей силы при  $y(0) = \{0, 1, 0, 0, 0\}$

При  $\alpha = 3$  в системе устанавливаются периодические колебания около вертикального положения. На рис. 4 показана форма колебаний стойки в установившемся режиме. Особенностью автономных нелинейных динамических систем с циркуляционными силами является существование устойчивых периодических движений – автоколебаний.



**Рис. 3.** Изменение фазовых переменных в случае закритических значений следящей силы в установившемся режиме колебаний при  $y^T(0) = \{0, 1, 0, 0, 0\}$



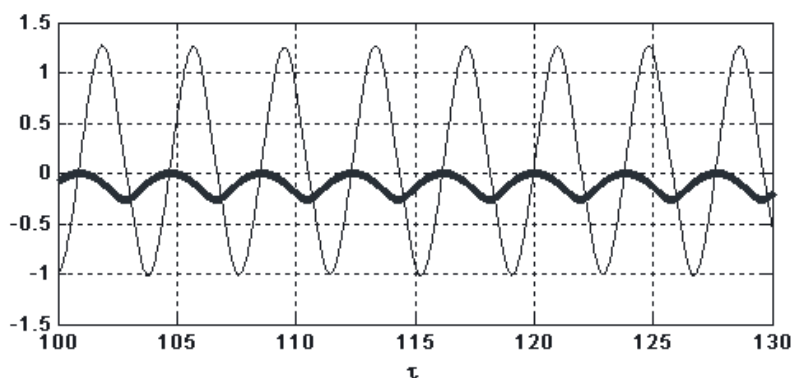
**Рис. 4.** Форма установившихся автоколебаний стойки при  $y^T(0) = \{0, 1, 0, 0, 0\}$

На рис. 3 видно, что при выбранном значении параметра нагрузки ( $\alpha = 3$ ) возникают автоколебания с большими амплитудами. То есть, несмотря на наличие демпфирования, внешняя следящая сила совершает работу, достаточную для преодоления отрицательной работы сил трения и поддержания устойчивых периодических движений. Приведем выражения для определения соответственно мощности источника энергии, связанного со следящей силой, и силами диссипации:

$$\mathcal{P} = -\alpha \sin(\varphi_2) \varphi_1'; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_D = & -\{2\zeta_i \varphi_1' + 2\zeta_e [(3 + 2 \cos(\varphi_2)) \varphi_1' + (1 + \cos(\varphi_2)) \varphi_2']\} \varphi_1' - \dots \\ & \dots - \{2\zeta_i \varphi_2' + 2\zeta_e [(1 + \cos(\varphi_2)) \varphi_1' + \varphi_2']\} \varphi_2'. \end{aligned} \quad (30)$$

На рис. 5 показано изменение во времени мощности сил диссипации (*жирная линия*). Вычисления проведены для значений  $\zeta_i = \zeta_e = 0,02$ ;  $\alpha = 3$ .



**Рис. 5.** Изменение во времени мощности следящей силы (*тонкая линия*) и мощности сил диссипации (*жирная линия*) в режиме установившихся автоколебаний

На рисунке видно, что мощность сил трения все время остается отрицательной. Мощность циркуляционной силы (*тонкая линия*) является знакопеременной функцией времени. Средние значения мощ-

ностей в установившемся режиме автоколебаний равны  $\mathcal{P}_p = 0,1118$ ;  
 $\mathcal{P}_D = -0,1118$ .

Таким образом, полная мощность внешних сил в среднем равна нулю. Колебания поддерживаются в противофазе за счет работы сил трения и циркуляционных сил.

#### 4. Анализ устойчивости вертикального положения равновесия. Бифуркация Пуанкаре – Андронова – Хопфа

В результате численного расчета (см. рис. 3, 4) было показано, как ведет себя система под действием циркуляционных сил в режиме автоколебаний. Рассмотрим аналитический метод исследования устойчивости вертикального положения равновесия ( $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0$ ,  $\varphi_1'^0 = \varphi_2'^0 = 0$ ). Ниже будет показано, как потеря устойчивости происходит после бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа.

Для определения положений равновесия рассмотрим решение системы уравнений (25) при начальных условиях

$$\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0; \quad \varphi_1''^0 = \varphi_2''^0 = 0.$$

Тогда

$$\varphi_1^0 + \alpha \sin(\varphi_2^0) = 0; \quad \varphi_2^0 = 0 \Rightarrow \{\varphi_1^0 = 0, \varphi_2^0 = 0\}.$$

В этом случае невозмущенным движением является положение равновесия ( $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0$ ,  $\varphi_1'^0 = \varphi_2'^0 = 0$ ). Для исследования устойчивости найденного положения равновесия по первому методу Ляпунова введем возмущения  $\{x_1, x_2\}$  и представим возмущенное движение в виде

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 + x_1; \quad \varphi_2 = \varphi_2^0 + x_2.$$

Линеаризуем уравнения системы (25) по отношению к возмущениям  $\{x_1, x_2\}$ :

$$\begin{cases} 6x_1'' + 2x_2'' + (2\zeta_i + 10\zeta_e)x_1' + 4\zeta_e x_2' + x_1 + \alpha x_2 = 0; \\ 2x_1'' + x_2'' + 4\zeta_e x_1' + (2\zeta_i + 2\zeta_e)x_2' + x_2 = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Представим уравнения (31) в векторной форме:

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' = -\mathbf{D}_\Sigma\mathbf{x}' - \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{N}\mathbf{x}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_\Sigma = 2\zeta_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\zeta_e \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha/2 \\ \alpha/2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/2 \\ -\alpha/2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (33)$$

$\mathbf{M}$  – матрица масс;  $\mathbf{D}_\Sigma$  – матрица диссипативных сил;  $\mathbf{K}$  – матрица жесткости (симметричная);  $\mathbf{N}$  – матрица циркуляционных сил (антисимметричная).

Решение уравнений (32) отыскивается в виде  $\mathbf{x} = e^{\lambda\tau}\mathbf{u}$ . Тогда из (32) следует

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{D}_\Sigma + \mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{u} = 0. \quad (34)$$

Для существования нетривиального решения уравнения (34) необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\det(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{D}_\Sigma + \mathbf{K} + \mathbf{N}) = 0. \quad (35)$$

После преобразований из (35) получим характеристическое уравнение четвертой степени относительно  $\lambda$ :

$$P_4(\lambda, \zeta_i, \zeta_e, \alpha) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (36)$$

С учетом выражений (33) коэффициенты полинома (36) вычислим следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2; \\ a_1 &= 14\zeta_i + 6\zeta_e; \\ a_2 &= 7 + 4\zeta_i^2 - 2\alpha + 24\zeta_i\zeta_e + 4\zeta_e^2; \\ a_3 &= 4\zeta_i + 12\zeta_e - 4\alpha\zeta_e; \\ a_4 &= 1. \end{aligned} \quad (37)$$



Отметим, что в данном случае равновесным является вертикальное положение стойки и она не может потерять устойчивость статическим образом, так как

$$P_4(0, \zeta_i, \zeta_e, \alpha) = a_4 = 1 \neq 0 \quad \forall \{\zeta_i, \zeta_e, \alpha\}. \quad (38)$$

Условие (38) означает, что не существует нулевого корня уравнения (36).

Для асимптотической устойчивости вертикального положения равновесия стойки необходимо и достаточно, чтобы действительные части корней полинома (36) были меньше нуля. Необходимым условием отрицательности действительных частей корней полинома (36) является положительность всех его коэффициентов:  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Из соотношений (37) следует, что существуют такие значения параметра нагрузки  $\alpha$ , при которых коэффициенты  $a_2$ ,  $a_3$  могут стать отрицательными. В общем случае аналитическое исследование корней уравнения (36) не представляется возможным.

Приведем результаты численного анализа корней в зависимости от параметра нагрузки  $\alpha$ . Рассмотрим два случая, связанных с наличием различных сил трения.

В первом случае положим, что внутреннее трение отсутствует и есть только внешнее сопротивление:

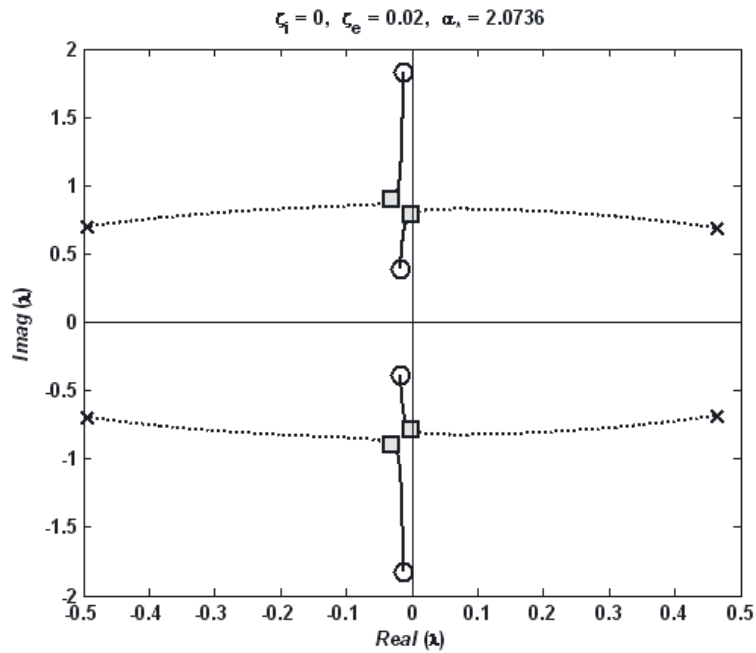
$$\zeta_i = 0; \quad \zeta_e = 0,02. \quad (39)$$

Параметр нагрузки изменяется в пределах  $0 \leq \alpha \leq 3$ . На рис. 6 изображены траектории корней<sup>4</sup> характеристического уравнения (36). Квадратиками обозначены значения корней в момент обращения наибольшей действительной части корней в нуль, что соответствует критическому состоянию системы и критическому значению параметра  $\alpha = \alpha_* = 2,0736$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \max_{j=1,2,3,4} \operatorname{Re}(\lambda_j)|_{\alpha < \alpha_*} < 0; & \quad \max_{j=1,2,3,4} \operatorname{Re}(\lambda_j)|_{\alpha = \alpha_*} = 0; \\ \max_{j=1,2,3,4} \operatorname{Re}(\lambda_j)|_{\alpha > \alpha_*} > 0. \end{aligned}$$

<sup>4</sup> При вычислении корней характеристического уравнения (36) использована встроенная функция `polyeig` среды MATLAB.

При  $\alpha = \alpha_*$  на правую полуплоскость одновременно переходят два комплексно-сопряженных корня, что соответствует бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа.



**Рис. 6.** Траектории корней характеристического уравнения (36) при  $0 \leq \alpha \leq 3$ :

○ – значения характеристических показателей при  $\alpha = 0$ ; × – значения характеристических показателей при  $\alpha = 3$ ; □ – значения корней в критической точке; *сплошная линия* соответствует асимптотическому устойчивому положению равновесия, *пунктирная линия* – неустойчивому

Во втором случае добавим к имеющимся внешним сопротивлениям (см. уравнение (39)) небольшое внутреннее трение:

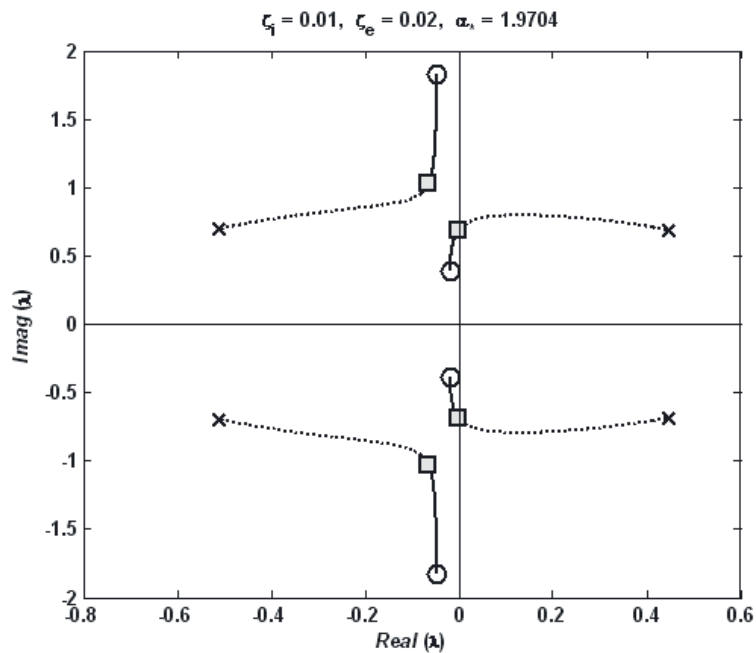
$$\zeta_i = 0,01; \quad \zeta_e = 0,02.$$

На рис. 7 показана соответствующая эволюция корней характеристического уравнения (36). Качественно картина траекторий в обо-

их случаях одинакова. Однако добавление внутреннего трения привело к снижению критической нагрузки:

$$\alpha_* |_{\zeta_i=0, \zeta_e=0,02} = 2,0736 > \alpha_* |_{\zeta_i=0,01, \zeta_e=0,02} = 1,9704.$$

То есть поведение механической системы при действии циркуляционной нагрузки оказывается парадоксальным: учет дополнительных диссипативных сил приводит к снижению критической нагрузки, тогда как в механических системах с консервативным нагружением добавление сил с полной диссипацией не вызывает изменения критических нагрузок [3]. На это явление первым обратил внимание Г. Циглер [6].



**Рис. 7.** Траектории корней характеристического уравнения (36) при  $0 \leq \alpha \leq 3$ :

○ – значения характеристических показателей при  $\alpha = 0$ ; × – значения характеристических показателей при  $\alpha = 3$ ; □ – значения корней в критической точке; сплошная линия соответствует асимптотическому устойчивому положению равновесия, пунктирная линия – неустойчивому

Такое поведение механических систем при действии циркуляционных сил называется *парадоксом Циглера*. Парадокс Циглера имеет важное методическое значение: в системах с циркуляционными силами пренебрежение внутренним трением приводит к завышенной оценке критических значений параметров нагрузки!

Рассмотрим необходимые и достаточные условия устойчивости вертикального положения стойки, используя критерий Рауса – Гурвица [3]. Матрица Гурвица имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Диагональные миноры матрицы Гурвица (40) с учетом значений коэффициентов (37):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1 = 14\zeta_i + 6\zeta_e; \\ \mu_2 &= a_1a_2 - a_0a_3 = 24\zeta_e^3 + 200\zeta_i\zeta_e^2 + (360\zeta_i^2 - 4\alpha + 18)\zeta_e + 56\zeta_i^3 + \\ &+ (90 - 28\alpha)\zeta_i; \\ \mu_3 &= a_3\mu_2 - a_4a_1^2 = (288 - 96\alpha)\zeta_e^4 + (2496 - 800\alpha)\zeta_i\zeta_e^3 + \dots \\ &\dots + ((5120 - 1440\alpha)\zeta_i^2 + (12 - 4\alpha)(18 - 4\alpha) - 36)\zeta_e^2 + \dots \\ &\dots + ((2112 - 224\alpha) + (-96 + (12 - 4\alpha)(90 - 28\alpha) - 16\alpha)\zeta_i)\zeta_e + \dots \\ &\dots + 224\zeta_i^4 + (164 - 112\alpha)\zeta_i^2; \\ \mu_4 &= a_4\mu_3 = \mu_3. \end{aligned} \quad (41)$$

Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней характеристического уравнения (36) является положительность миноров (41):

$$\mu_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \Leftrightarrow \max_{j=1,2,3,4} \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0. \quad (42)$$

Коэффициенты демпфирования  $\zeta_i$ ,  $\zeta_e$  по физическому смыслу не могут быть отрицательными. Следовательно, при  $\zeta_i > 0$ ,  $\zeta_e > 0$  первый минор всегда положителен ( $\mu_1 > 0$ ). При  $\alpha = 0$  все миноры (41) положительны и условие (42) выполняется. С возрастанием значения сжимающей силы (при увеличении параметра  $\alpha$ ) сначала обращается в нуль третий минор. То есть определение критической нагрузки можно свести к поиску *наименьшего действительного корня уравнения*

$$\mu_3(\alpha) = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_3(\alpha) = & (112\zeta_i\zeta_e + 16\zeta_e^2)\alpha^2 - (96\zeta_e^4 + (120 + 1440\zeta_i^2)\zeta_e^2 + \\ & + (224\zeta_i^3 + 712\zeta_i)\zeta_e + 800\zeta_i\zeta_e^3 + 112\zeta_i^2)\alpha + \dots \\ & \dots + 288\zeta_e^4 + 2496\zeta_i\zeta_e^3 + (2112\zeta_i^3 + 984\zeta_i)\zeta_e + \\ & + (5120\zeta_i^2 + 180)\zeta_e^2 + 224\zeta_i^4 + 164\zeta_i^2. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай отсутствия внешнего трения ( $\zeta_e = 0$ ). Тогда из уравнений (41) следует

$$\mu_3(\alpha) = (-112\alpha + 224\zeta_i^2 + 164)\zeta_i^2. \quad (44)$$

Из уравнений (43) и (44) находим критическое значение параметра нагрузки  $\alpha$ :

$$\alpha_* = \frac{41}{28} + 2\zeta_i^2. \quad (45)$$

При достижении параметром критического значения два корня уравнения (36) становятся чисто мнимыми. Положим в уравнении (36)  $\zeta_e = 0$ ,  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\lambda = i\nu_*$ . Разделив действительную и мнимую части уравнения (36), получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} P_4(iv_*, \zeta_i, 0, \alpha_*) &= 2v_*^4 - (7 + 4\zeta_i^2 - 2\alpha_*)v_*^2 + 1 = 0; \\ \operatorname{Im} P_4(iv_*, \zeta_i, 0, \alpha_*) &= 2v_*\zeta_i(-7v_*^2 + 2) = 0.\end{aligned}\quad (46)$$

Из второго уравнения (46) при условии, что  $\zeta_i > 0$ ,  $v_* \neq 0$ , определим критическое значение частоты  $v_*$ , а из первого – критическое значение параметра нагрузки  $\alpha$ :

$$v_* = \pm\sqrt{27}; \quad \alpha_* = \frac{41}{28} + 2\zeta_i^2 \approx 1,4643 + 2\zeta_i^2. \quad (47)$$

При известных значениях двух корней характеристического уравнения (36) остальные два корня определяют с помощью теоремы Безу, т. е. в критическом состоянии имеется следующий спектр собственных значений:

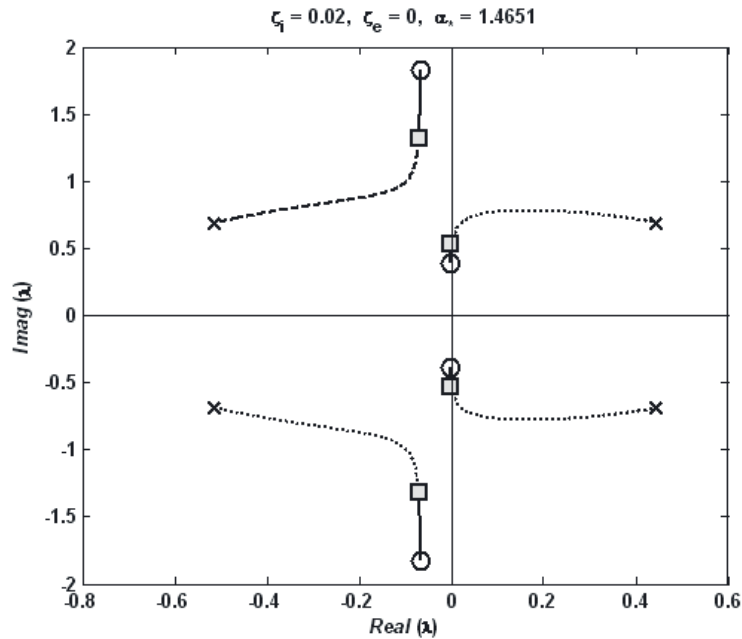
$$\begin{aligned}S_\lambda &= \left\{ \lambda_k, k = 1, 2, 3, 4: \right. \\ &\left. +i\sqrt{\frac{2}{7}}, -i\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{7}{2}\left(-\zeta_i + \sqrt{\zeta_i^2 - \frac{1}{7}}\right), \frac{7}{2}\left(-\zeta_i - \sqrt{\zeta_i^2 - \frac{1}{7}}\right) \right\}.\end{aligned}$$

Для существования бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа кроме выполнения условий (46) необходимо удовлетворение условия трансверсальности – пересечения мнимой оси траекторией характеристического показателя. Для проверки выполнения условия трансверсальности вычислим коэффициент трансверсальности:

$$\begin{aligned}t_{\alpha_*} &= \operatorname{Re} \left( \frac{\delta\lambda}{\delta\alpha} \right) \Big|_{\lambda=i\omega_*, \alpha=\alpha_*} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\partial P_4(\lambda; \zeta, \alpha)}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial P_4(\lambda; \zeta, \alpha)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\} \Big|_{\lambda=i\omega_*, \alpha=\alpha_*}. \quad (48)\end{aligned}$$

После подстановки в (48) соотношений (47) получим

$$t_{\alpha_*} = \frac{784\zeta_i}{1681 + 10\,976\zeta_i^2} > 0. \quad (49)$$



**Рис. 8.** Траектории корней характеристического уравнения (36) при  $0 \leq \alpha \leq 3$ :

○ – значения характеристических показателей при  $\alpha = 0$ ; × – значения характеристических показателей при  $\alpha = 3$ ; □ – значения корней в критической точке; сплошная линия соответствует асимптотическому устойчивому положению равновесия, пунктирная линия – неустойчивому

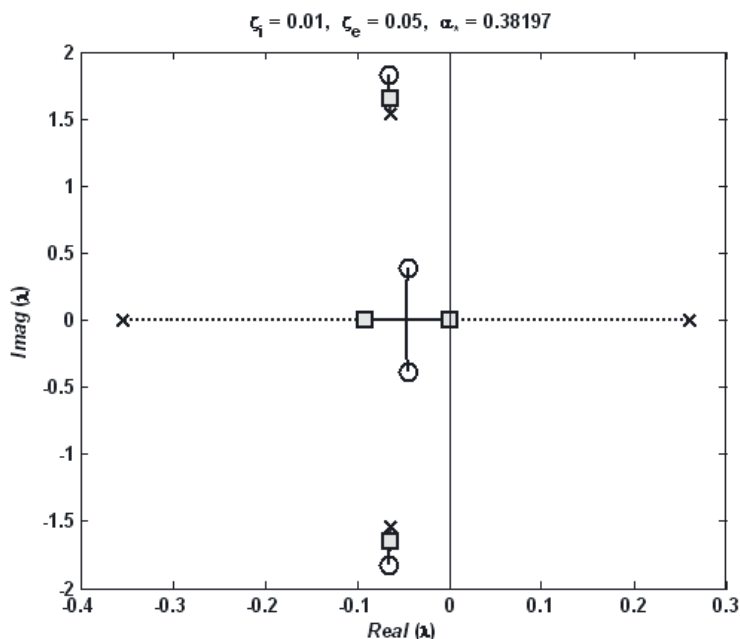
Положительность коэффициента трансверсальности (49) означает, что при возрастании параметра нагрузки переход через критическое значение сопровождается сменой знака действительной части характеристического показателя с отрицательного на положительный.

Вертикальное положение равновесия стойки Циглера теряет устойчивость после бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа. На рис. 8 представлена диаграмма траекторий характеристических показателей при изменении параметра нагрузки  $\alpha$ .

Отметим, что при действии консервативной силы матрицы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}$  в уравнении (35) соответственно равны:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}; \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Траектории корней характеристического уравнения (36) имеют вид, изображенный на рис. 9. Наблюдается переход старшего характеристического показателя через нуль.



**Рис. 9.** Траектории корней характеристического уравнения (6) с учетом (50) при  $0 \leq \alpha \leq 0,6$ :

○ – значения характеристических показателей при  $\alpha = 0$ ; × – значения характеристических показателей при  $\alpha = 0,6$ ; □ – значения корней в критической точке; сплошная линия соответствует асимптотическому устойчивому положению равновесия, пунктирная линия – неустойчивому

Сначала два комплексных корня сливаются на действительной оси, затем они расходятся, оставаясь действительными, и возрастающий корень пересекает мнимую ось в нуле. Такая бифуркация называется *бифуркацией Эйлера*. Значение критической нагрузки не зависит от демпфирования в системе и может быть определено как наименьший действительный корень в соответствии с критерием Эйлера при использовании только матрицы жесткости (50):

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \Rightarrow \alpha_* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38197. \quad (51)$$



## 5. Дестабилизирующее действие сил внутреннего трения в системах с циркуляционными силами (парадокс Циглера)

Традиционно считается, что присутствие трения стабилизирует движение. Основанием для такого мнения является тот факт, что с трением связано рассеяние энергии. В частности, *добавление к консервативной механической системе диссипативных сил с полной диссипацией*<sup>5</sup> приводит к тому, что ее устойчивые положения становятся асимптотически устойчивыми. Это следует из теорем Томпсона и Тэта о влиянии гироскопических и диссипативных сил на устойчивость положений равновесия консервативной системы [9]. Стабилизация колебаний регулятора Уатта с помощью введения дополнительного трения была предложена И.А. Вышнеградским [10]. Трение в системах с параметрическим возбуждением вызывает уменьшение областей динамической неустойчивости [11].

Явления, при которых трение приводит к неустойчивости определенных движений системы, относят к парадоксальным как противоречащим устоявшимся представлениям. Системы с циркуляционными силами, по определению, являются неконсервативными; возникновение таких сил всегда связано с присутствием внешнего источника энергии. Наличие трения изменяет фазовые соотношения между обобщенными координатами и скоростями и как бы позволяет циркуляционным силам выполнять положительную работу над системой. Особое влияние оказывают силы внутреннего демпфирования.

Рассмотрим систему (31) при отсутствии внешнего демпфирования ( $\zeta_e = 0$ ):

$$\begin{cases} 6x_1'' + 2x_2'' + 2\zeta_i x_1' + x_1 + \alpha x_2 = 0; \\ 2x_1'' + x_2'' + 2\zeta_i x_2' + x_2 = 0. \end{cases} \quad (52)$$

<sup>5</sup> Силами с полной диссипацией называются силы, зависящие от обобщенных скоростей и имеющие отрицательную мощность на любом движении системы [9].

В этой системе критическое значение сжимающей силы определяется формулой (45), которая получена в предположении, что внутреннее трение не равно нулю. При этом диссипативные силы (см. выражение (30)) обладают полной диссипацией, их мощность всегда отрицательна:

$$\mathcal{P}_D = -2\zeta_i(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) < 0.$$

При исчезающе малом трении критическое значение параметра нагрузки (45) стремится к пределу:

$$\alpha_*^+ = \lim_{\zeta \rightarrow 0}(\alpha_*) = \frac{41}{28} \approx 1,4643.$$

Положим в исходной системе (52) коэффициент трения равным нулю. Очевидно, что положение равновесия останется прежним и характеристическое уравнение для системы уравнений (52) в вариациях примет вид

$$P_4(\lambda, 0, \alpha) = b_0\lambda^4 + b_2\lambda^2 + b_4 = 0, \quad (53)$$

при этом коэффициенты

$$b_0 = 2, \quad b_2 = 7 - 2\alpha, \quad b_4 = 1. \quad (54)$$

Корни биквадратного уравнения (53) с учетом (54) вычисляются как

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm 12\sqrt{-7 + 2\alpha \pm \sqrt{(-7 + 2\alpha)^2 - 8}}. \quad (55)$$

До тех пор пока при возрастании параметра нагрузки выражение  $\alpha$  под внутренним знаком корня в уравнении (55) положительно, все четыре корня будут чисто мнимыми. Найдем корни внутреннего подкоренного выражения:

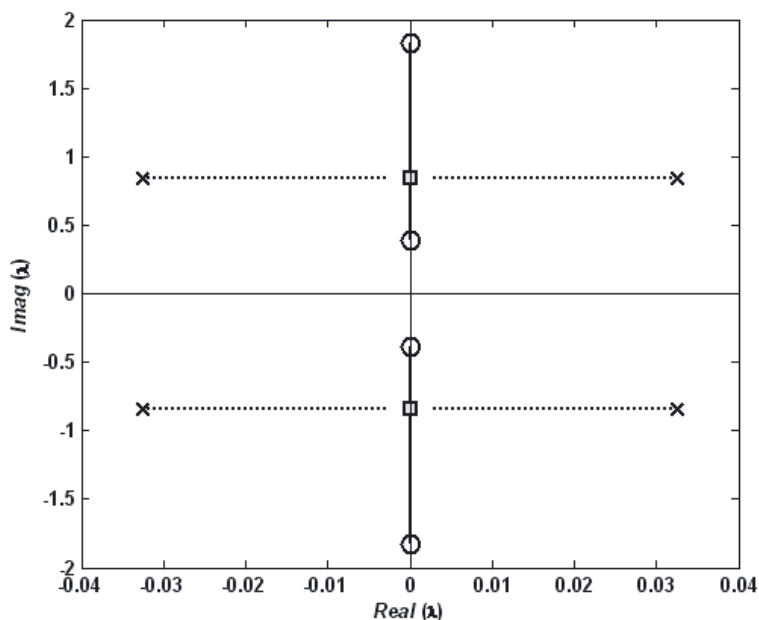
$$4\alpha^2 - 28\alpha + 41 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{2} = \{2,0858; 4,9142\}.$$

Таким образом, при отсутствии демпфирования критическое значение параметра нагрузки

$$\alpha_*^- = 2,0858. \quad (56)$$

При дальнейшем увеличении этого параметра ( $\alpha > \alpha_*$ ) появляются два комплексно-сопряженных корня с положительной действительной частью (рис. 10) и вертикальное положение стойки теряет устойчивость динамическим образом (одновременный переход на правую плоскость двух комплексно-сопряженных корней при ненулевой мнимой части, т. е. бифуркация Пуанкаре – Андронова – Хопфа). Значения характеристических показателей в критической точке:

$$\lambda_{1,2*} = +i\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx +0,8409i; \quad \lambda_{3,4*} = +i\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx -0,8409i.$$



**Рис. 10.** Траектории корней характеристического уравнения (55) при  $0 \leq \alpha \leq 2,09$ :

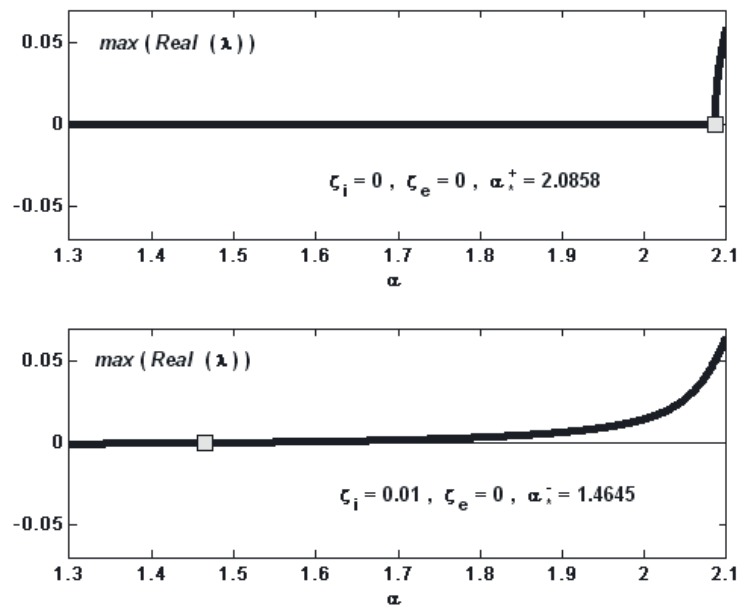
○ – значения характеристических показателей при  $\alpha = 0$ ; × – значения характеристических показателей при  $\alpha = 2,09$ ; □ – значения корней в критической точке; *сплошная линия* соответствует асимптотическому устойчивому положению равновесия, *пунктирная линия* – неустойчивому

Изображенные на рис. 8 и 10 траектории характеристических показателей в функции параметра нагрузки  $\alpha$  показывают суще-

ственные различия их поведения в критическом состоянии. При  $\zeta_i \neq 0$  траектории корней характеристического уравнения (36) пересекают мнимую ось (см. рис. 8) и коэффициент трансверсальности положителен, а при  $\zeta_i = 0$  (см. рис. 10) до критического состояния корни характеристического уравнения (36) находятся на мнимой оси и после слияния два из них переходят на правую полуплоскость. При этом

$$\alpha_*^+ \approx 1,4643 < 2,0858 \approx \alpha_*^-.$$

На рис. 11 показано изменение наибольшей действительной части характеристических показателей в зависимости от параметра нагрузки в двух случаях:  $\zeta_i = 0$ ,  $\zeta_i \neq 0$ .



**Рис. 11.** Максимальные действительные части характеристических показателей уравнения (36):

□ – бифуркационные значения параметра нагрузки

Таким образом, наличие даже малого внутреннего трения существенно снижает критическое значение нагрузки. В этом и

состоит парадоксальность ситуации. Отсюда следует практическая рекомендация: при моделировании динамики систем с циркуляционными силами необходимо учитывать внутреннее трение. Еще более существенным оказывается влияние внутреннего трения на неустойчивость вращающихся валов, без учета чего невозможно объяснить потерю устойчивости прямолинейного вращения вала [2].

Результаты приведенных выше расчетов характеризуют особенность поведения рассматриваемой динамической системы с циркуляционными силами. В рамках модели без трения объяснить ее ограниченность невозможно. Наличие трения может рассматриваться как структурное возмущение динамической системы. Если в определенном диапазоне значений параметров нагрузки (в данном случае таким параметром является  $\alpha$ ) динамическая система качественным образом изменяет свои свойства при малом изменении структуры, связанном с учетом внутреннего трения, то говорят о структурной неустойчивости исходной системы. Под качественным изменением здесь следует понимать устойчивость – неустойчивость вертикального положения стойки. Таким образом, при превышении критического для структурно-возмущенной системы значения параметра нагрузки структурно-невозмущенная система становится структурно-неустойчивой.

## 6. Анализ поведения системы при закритических нагрузках

В предыдущих разделах обсуждалось поведение системы при критическом значении параметра нагрузки, когда система теряет устойчивость и переходит в новое состояние. Как было показано, этот переход может сопровождаться возбуждением затухающих или периодических колебаний.

Первый метод Ляпунова позволяет определить критическое значение параметра нагрузки  $\alpha_*$ . При докритических значениях параметра нагрузки ( $\alpha < \alpha_*$ ) вертикальное положение стойки устойчиво: малые начальные возмущения затухают и стойка принимает вертикальное положение. Уравнения в вариациях (31) при критическом значении параметра  $\alpha = \alpha_*$  не позволяют правильно описать динамику системы и дать ответ на вопрос об устойчивости системы в критическом состоянии.

После бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа в системе устанавливаются автоколебания с конечной амплитудой в зависимости от уровня надкритичности  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_*$ . Для их описания следует использовать нелинейные уравнения движения (22) или (25).

Рассмотрим некоторые возможные варианты исследования поведения системы при действии на нее закритических нагрузок.

**Численное исследование.** Построение отображения Пуанкаре позволяет реально представить бифуркационную диаграмму. Одним из методов получения устойчивых ветвей бифуркационной диаграммы является метод установления. Суть этого метода заключается в следующем: при произвольно заданных начальных условиях рассматривается достаточно продолжительная по времени реализация и на установившемся участке вычисляются некоторые скалярные характеристики движения, которые и наносятся на диаграмму. Такого рода вычисления проводятся многократно для различных значений параметра нагрузки  $\alpha$ .

В качестве примера на рис. 12 приведены результаты расчета такого типа<sup>6</sup>. По оси ординат отложены экстремальные значения горизонтальной координаты, отнесенной к длине  $l$ , массы  $m$  узла  $B$  (см. рис. 1), к которому приложена сила  $\vec{P}$  при изменении параметра нагрузки  $\alpha$  с шагом 0,001; вектор начального состояния  $y(0) = \{0, 1, 0, 0, 0\}^T$ ; коэффициент демпфирования  $\zeta_i = 0,1$ ; интервал установившегося движения  $\tau \in [45\ 000; 50\ 000]$ .

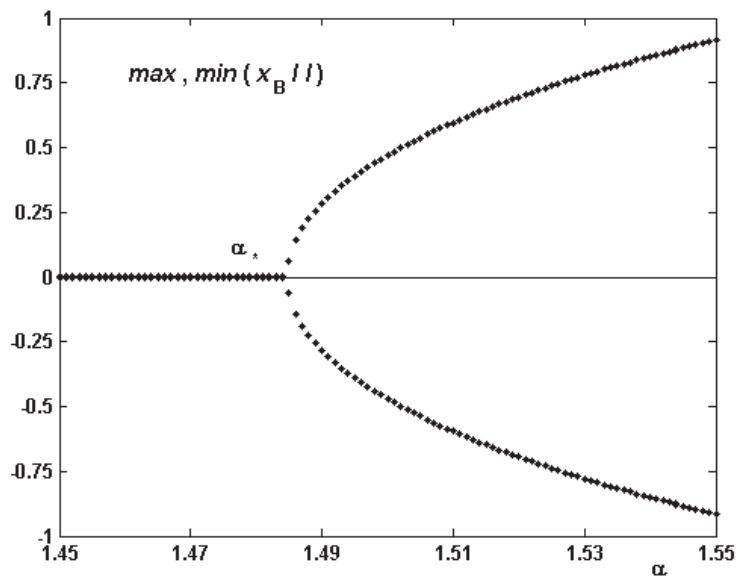


Рис. 12. Результат численного интегрирования системы уравнений (26)

Основная трудность такого подхода состоит в том, что вблизи бифуркационной точки время установления стремится к бесконечности (обращение в нуль действительной части характеристического показателя). Кроме того, установившееся движение может быть определено лишь с некоторой погрешностью.

Чтобы избежать указанной неопределенности и получить более точные результаты расчета, для каждого значения параметра нагрузки  $\alpha$  (в данном случае выше критического) можно найти все перио-

<sup>6</sup> При интегрировании системы уравнений (26) использован решатель ode23 пакета MATLAB.

дические движения методом Ньютона, неизвестными являются начальные условия и период колебаний. При этом также численно может быть исследована устойчивость найденных движений с использованием теории линейного параметрического резонанса.

**Аналитическое исследование (метод многомасштабных разложений).** В качестве невозмущенного движения рассмотрим вертикальное положение равновесия ( $\varphi_1^0 = 0$ ,  $\varphi_2^0 = 0$ ,  $\varphi_1'^0 = 0$ ,  $\varphi_2'^0 = 0$ ). Введем формальный параметр малости следующим образом:

$$\alpha = \alpha_* + \varepsilon \Delta \alpha; \quad \alpha_* = \frac{41}{28} + 2\zeta_i^2; \quad 0 \leq \varepsilon \Delta \alpha \leq 1, \quad (57)$$

т. е. будем изучать движения в закритическом диапазоне значений параметра нагрузки  $\alpha$ . Параметр малости необходим для выделения величин различного порядка. В окончательных выражениях можно положить  $\varepsilon = 1$ . Представим возмущения в следующем виде:

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 + \sqrt{\varepsilon} x_1; \quad \varphi_2 = \varphi_2^0 + \sqrt{\varepsilon} x_2; \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}^T. \quad (58)$$

Далее везде рассмотрено только влияние внутреннего демпфирования, поэтому во всех выкладках положим  $\zeta_e = 0$ . Подставим соотношения (57), (58) в нелинейные уравнения движения (25) и после сокращения на  $\sqrt{\varepsilon}$  разложим члены полученных уравнений в ряд по  $\varepsilon$ . Сохранив слагаемые нулевого и первого порядков, придем к следующей системе уравнений:

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' + 2\zeta_i \mathbf{x}' + \mathbf{x} + \alpha_* \mathbf{C}\mathbf{x} = \varepsilon[-\Delta \alpha \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{L}_{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \alpha_*)] + \dots, \quad (59)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (60)$$

$$\mathbf{L}_{(3)} = x_2 \begin{Bmatrix} x_2(x_1'' + x_2''/2) + x_2'(2x_1' + x_2') + \alpha_* x_2^2/6 \\ x_2 x_1''/2 - x_1^2 \end{Bmatrix}.$$



Член  $L_{(3)}$  позволяет учесть нелинейные составляющие третьего порядка по фазовым переменным. Параметр  $\varepsilon$  в уравнении (59) введен формально, для того чтобы отличать «невозмущенную» задачу от «возмущенной». При  $\varepsilon = 0$  уравнение (59) становится линейным и описывает систему в критическом состоянии. При  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\Delta\alpha > 0$  уравнение (59) описывает нелинейную динамику стойки в закритическом состоянии. Такое введение параметра основано на допущении о непрерывной зависимости решений от параметров системы. При этом результаты расчета будут правильными, особенно если при исследовании ограничиться построением нулевого приближения.

В соответствии с методом многомасштабных разложений [11] асимптотическое разложение строится по параметру  $\varepsilon$  и в окончательных выражениях параметр  $\varepsilon$  полагается равным единице.

Введем последовательность масштабов времени:

$$t_0 = \tau, \quad t_1 = \varepsilon\tau, \quad t_2 = \varepsilon^2\tau, \quad \dots$$

Дифференциальный оператор по  $\tau$  принимает форму ряда по параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} (\dots)' &= \frac{d(\dots)}{d\tau} = \partial_0(\dots) + \varepsilon\partial_1(\dots) + \varepsilon^2\partial_2(\dots) + \dots; \\ (\dots)'' &= \frac{d^2(\dots)}{d\tau^2} = \partial_0^2(\dots) + \varepsilon^2\partial_1\partial_0(\dots) + \varepsilon^2[2\partial_0\partial_2(\dots) + \partial_1^2(\dots)] + \dots; \quad (61) \\ \partial_i &= \frac{\partial}{\partial t_i}; \quad \partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (59), (60) представляется в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , при этом каждое приближение зависит от различных масштабов времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) &= x_0(t_0, t_1, t_2, \dots) + \varepsilon\mathbf{x}_1(t_0, t_1, t_2, \dots) + \\ &+ \varepsilon^2\mathbf{x}_2(t_0, t_1, t_2, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (62)$$

Подставим уравнения (61), (62) в уравнение (59) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Полученные соотношения имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^k: \quad \mathbf{H}_0 x_k &= \mathbf{F}_k; \\
\mathbf{H}_0 &= \mathbf{M} \partial_0^2 + 2\zeta_i \partial_0 + 1 + \alpha_* \mathbf{C}; \\
\mathbf{F}_0 &= 0; \\
\mathbf{F}_1 &= -2\mathbf{M} \partial_1 \partial_0 x_0 - 2\zeta_i \partial_1 x_0 - \Delta \alpha x_0 + \\
&\quad + \mathbf{L}_{(3)}(x_0, \partial_0 x_0; \alpha_*), \dots
\end{aligned} \tag{63}$$

Целью исследования является определение периодических решений системы (59) при  $\alpha \geq \alpha_*$ , которые имеют период колебаний, совпадающий при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с периодом  $T_* = 2\pi / v_*$ ,  $v_* = \sqrt{2/7}$ , порождающей системы (63) при  $k = 0$ :

$$\mathbf{H}_0 x_0 = 0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{M} \partial_0^2 + 2\zeta_i \partial_0 + 1 + \alpha_* \mathbf{C}. \tag{64}$$

Порождающая система (64) имеет два периодических решения, соответствующих двум чисто мнимым комплексно-сопряженным корням  $\lambda = \pm i v_*$  характеристического уравнения системы (38) при  $\alpha \geq \alpha_*$ . В силу комплексной сопряженности корней и действительности решения периодическое решение порождающей системы имеет вид

$$x_0(t_0, t_1, \dots) = \Phi(t_1, \dots) \exp(i v_* t_0) \mathbf{u} + \bar{\Phi}(t_1, \dots) \exp(-i v_* t_0) \bar{\mathbf{u}}, \tag{65}$$

где чертой сверху обозначены комплексно-сопряженные величины. Векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  являются нормированными по модулю на единицу собственными векторами основной и сопряженной систем уравнений (64):

$$\begin{cases} (-v_*^2 \mathbf{M} + 2i\zeta_i v_* + 1 + \alpha_* \mathbf{C}) \mathbf{u} = 0; \\ (-v_*^2 \mathbf{M} - 2i\zeta_i v_* + 1 + \alpha_* \mathbf{C}) \bar{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \tag{66}$$

С учетом значения  $v_* = \sqrt{2/7}$  из системы (66) найдем собственные векторы порождающей задачи:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \begin{Bmatrix} 5 + i\zeta_i \sqrt{56} \\ 4 \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \begin{Bmatrix} 5 - i\zeta_i \sqrt{56} \\ 4 \end{Bmatrix}; \quad n = \sqrt{41 + 56\zeta_i^2}.$$

Функцию  $\Phi(t_1, \dots)$  представим в полярной форме:

$$\begin{aligned} \Phi(t_1, \dots) &= R(t_1, \dots) \exp [i\psi(t_1, \dots)]; \\ \bar{\Phi}(t_1, \dots) &= R(t_1, \dots) \exp [-i\psi(t_1, \dots)], \end{aligned} \quad (67)$$

где  $R(t_1, \dots)$ ,  $\psi(t_1, \dots)$  – действительные функции.

Экспоненциальное представление функций (67) значительно облегчает последующие тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t_0, t_1, \dots) &= R(t_1, \dots) [Q(t_0, t_1, \dots) \mathbf{u} + \bar{Q}(t_0, t_1, \dots) \bar{\mathbf{u}}]; \\ Q(t_0, t_1, \dots) &= \exp [iv_* t_0 + i\psi(t_1, \dots)], \quad Q^{-1} = \bar{Q}. \end{aligned} \quad (68)$$

Производные вычислим следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_0 Q &= iv_* Q; \quad \partial_0 \bar{Q} = -iv_* \bar{Q}; \\ \partial_0 \mathbf{x}_0 &= iv_* R(Q\mathbf{u} - \bar{Q}\bar{\mathbf{u}}); \quad \partial_0 \partial_0 \mathbf{x}_0 = -v_*^2 R(Q\mathbf{u} + \bar{Q}\bar{\mathbf{u}}); \\ \partial_1 \mathbf{x}_0 &= (\partial_1 R)(Q\mathbf{u} + \bar{Q}\bar{\mathbf{u}}) + i(\partial_1 \psi) R(Q\mathbf{u} - \bar{Q}\bar{\mathbf{u}}); \\ \partial_1 \partial_0 \mathbf{x}_0 &= iv_* (\partial_1 R)(Q\mathbf{u} - \bar{Q}\bar{\mathbf{u}}) - v_* (\partial_1 \psi) R(Q\mathbf{u} + \bar{Q}\bar{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad (69)$$

Функциональная зависимость амплитуды  $R(t_1, \dots)$  и фазы  $\psi(t_1, \dots)$  от «медленного» масштаба времени  $t_1 = \varepsilon t$  определяется из уравнений (63) для первого приближения при  $k = 1$ . После подстановки уравнений (68) в (63) получим уравнение первого приближения. Учитывая, что нелинейности имеют вид алгебраических мономов, уравнение первого приближения можно представить в виде экспоненциального ряда:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 \mathbf{x}_1 &= \sum_{s=\pm 1, \pm 3} Q^s \mathbf{a}_s(t_1, \dots); \quad Q^s = \exp(is\psi) \exp(isv_* t_0); \\ \mathbf{a}_{-s} &= \bar{\mathbf{a}}_s; \quad Q^{-s} = \bar{Q}^s. \end{aligned} \quad (70)$$

Вычислим отдельно действительную и мнимую части вектора  $\mathbf{a}_1$ . Для этого воспользуемся блоком аналитических вычислений Symbolic Math Toolbox, встроенным в MATLAB:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathbf{a}_1) &= \left\{ \begin{array}{l} R^3 \left( \frac{104}{7} + 64\zeta_i^2 \right) + \left( -4\Delta\alpha + 76\sqrt{\frac{2}{7}} + 4\sqrt{14}\zeta_i^2 R \right) (\partial_1\psi) + 38(\partial_1 R) \\ -R^3 \left( \frac{440}{7} + 192\zeta_i^2 \right) + 4\sqrt{14} R (\partial_1\psi) + 8\zeta_i (\partial_1 R) \end{array} \right\}; \\ \operatorname{Im}(\mathbf{a}_1) &= \left\{ \begin{array}{l} -119\sqrt{\frac{2}{7}} R^3 \zeta_i + 38\zeta_i R (\partial_1\psi) - (76\sqrt{\frac{2}{7}} + \sqrt{14}\zeta_i^2) (\partial_1 R) \\ 128\zeta_i \sqrt{\frac{2}{7}} R^3 + 8\zeta_i R (\partial_1\psi) - 4\sqrt{14} (\partial_1 R) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Особенность определения периодических решений в нелинейных системах после бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа асимптотическими методами заключается в том, что порождающая (однородная) система имеет нетривиальные  $T_*$ -периодические решения. Все высшие приближения при  $k > 1$  в (63) определяют из неоднородных линейных систем, которые имеют вид (70), где в правых частях присутствует резонансное возбуждение на частоте  $\nu_*$  – слагаемые вида  $a_1(t_1, \dots)Q^1 + a_1(t_1, \dots)Q^{-1}$ . Требование равномерной по времени пригодности асимптотического разложения (62) в масштабе  $t_0$  приводит к определенным условиям, накладываемым на правые части в (70). Чтобы получить эти условия, рассмотрим условия периодичности:

$$\mathbf{x}_1|_{(t_0=T_*)} = \mathbf{x}_1|_{(t_0=0)}; \quad \partial_0 \mathbf{x}_1|_{(t_0=T_*)} = \partial_0 \mathbf{x}_1|_{(t_0=0)}, \quad (72)$$

где  $\mathbf{x}_1$  – периодическое решение, удовлетворяющее соотношениям (72).

Это решение можно представить в виде комплексного ряда Фурье:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t_0, t_1, \dots) &= \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} Q^s(t_0, t_1, \dots) \mathbf{b}_s(t_1, \dots), \\ \mathbf{b}_{-s}(t_1, \dots) &= \mathbf{b}_s(t_1, \dots).\end{aligned}\quad (73)$$

Учитывая, что  $\mathbf{H}_0$  – линейный оператор с постоянными коэффициентами, а также соотношения (69), его влияние на каждую гармоническую составляющую  $Q^s(t_0, t_1, \dots)$  можно выявить из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_0 Q^s &= Q^s \mathbf{H}_{0,s}; \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{M} \partial_0^2 + 2\zeta_i \partial_0 + 1 + \alpha_* \mathbf{C}; \\ \mathbf{H}_{0,s} &= -s^2 v_*^2 \mathbf{M} + 2isv_* \zeta_i + 1 + \alpha_* \mathbf{C}; \\ \mathbf{H}_{0,-s} &= \bar{\mathbf{H}}_{0,s}.\end{aligned}$$

После подстановки ряда (73) в (70) получим следующее уравнение относительно коэффициентов  $\mathbf{b}_s$ :

$$\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} Q^s \mathbf{H}_{0,s} \mathbf{b}_s = \sum_{k=\pm 1, \pm 3} Q^k \mathbf{a}_s. \quad (74)$$

В (74) приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках (при равных степенях  $Q$ ):

$$\left\{ \begin{array}{lll} k=0: & \mathbf{H}_{0,0} \mathbf{b}_0 = 0; & \\ k=1: & \mathbf{H}_{0,1} \mathbf{b}_1 = a_1; & \mathbf{H}_{0,-1} \bar{\mathbf{b}}_1 = a_1; \\ k=2: & \mathbf{H}_{0,2} \mathbf{b}_2 = 0; & \mathbf{H}_{0,-2} \bar{\mathbf{b}}_2 = 0; \\ k=3: & \mathbf{H}_{0,3} \mathbf{b}_3 = a_3; & \mathbf{H}_{0,-3} \bar{\mathbf{b}}_3 = a_3; \\ k=4, 5 \dots: & \mathbf{H}_{0,k} \mathbf{b}_k = 0; & \mathbf{H}_{0,-k} \bar{\mathbf{b}}_k = 0.\end{array} \right. \quad (75)$$

Таким образом, с помощью ряда (73) рассматриваемая задача сводится к алгебраической. В уравнениях (75)  $\det(\mathbf{H}_{0,k}) \neq 0 \quad \forall k \neq \pm 1$ .

То есть соответствующие векторы  $\mathbf{b}_k$  определяются однозначно, в частности  $\mathbf{b}_3 = (\mathbf{H}_{0,3})^{-1} \mathbf{a}_3$ . Для резонансных гармоник при  $k = \pm 1$  соответствующее основное однородное уравнение (66) имеет ненулевое решение, так как

$$\det(\mathbf{H}_{0,1}) = \det(\mathbf{H}_{0,-1}) = 0.$$

Следовательно, соответствующее основное неоднородное уравнение имеет решение лишь при условии, что правые части ортогональны соответствующим решениям сопряженной системы (10) [10–13], которая в данном случае имеет вид

$$\bar{\mathbf{H}}_{0,1} \mathbf{v} = \mathbf{H}_{0,-1}^T \mathbf{v} = (-v_*^2 \mathbf{M} - 2i\zeta_i v_* + 1 + \alpha_* \mathbf{C}^T) \mathbf{v} = 0. \quad (76)$$

В связи с тем что рассматриваемые линейные преобразования осуществляются в комплексном пространстве, скалярное произведение векторов  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  в матричной форме имеет вид  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{q}$ . Умножим первое уравнение системы уравнений (75) для  $k = 1$  скалярно на вектор  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющий системе уравнений (76), и проведем очевидные матричные преобразования:

$$\bar{\mathbf{v}} \mathbf{H}_{0,1} \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{a}_1 \Rightarrow \bar{\mathbf{b}}_1^T \bar{\mathbf{H}}_{0,1} \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow S = \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{a}_1 = 0. \quad (77)$$

Для второго соотношения (75) при  $k = 1$  аналогично получим

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_{0,-1} \bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{a}}_1 \Rightarrow \mathbf{b}_1^T \bar{\mathbf{H}}_{0,-1}^T \bar{\mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow \bar{S} = \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{a}}_1 = 0, \quad (78)$$

т. е. для существования ненулевого решения  $\mathbf{b}_1$  необходимо, чтобы вектор  $\mathbf{a}_1$  был ортогонален вектору  $\mathbf{v}$ . Можно показать, что условие  $S = 0$  (см. уравнение (77) или (78)) является и достаточным.

Ненормированное решение сопряженного уравнения системы (76) равно

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 5 + i\zeta_i \sqrt{56} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 5 - i\zeta_i \sqrt{56} \end{Bmatrix}. \quad (79)$$

После вычисления выражения (77) с помощью подстановок (71), (79) запишем отдельно действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S) &= \frac{4}{7\sqrt{(41+56\zeta_i^2)^3}} \times \\ &\times [-(654+1232\zeta_i^2)R^3 + (1148+1568\zeta_i^2)R\Delta\alpha - \dots \\ &\dots - (16\,072+21\,952\zeta_i^2)\zeta_i(\partial_1 R) - (1681+2296\zeta_i^2)\sqrt{14}R(\partial_1\psi)]; \\ \operatorname{Im}(S) &= \frac{4}{7\sqrt{(41+56\zeta_i^2)^3}} [(572+672\zeta_i^2)\sqrt{14}\zeta_i R^3 + \dots \\ &\dots + (1681+2296\zeta_i^2)\sqrt{14}(\partial_1 R) - (16\,072+21\,952\zeta_i^2)\zeta_i R(\partial_1\psi)]. \end{aligned}$$

Приравняем нулю  $\operatorname{Re}(S)$ ,  $\operatorname{Im}(S)$  и решим два последних уравнения относительно производных фазы  $\partial_1\psi$  и амплитуды  $\partial_1 R$  по «медленному» времени  $t_1$ :

$$\begin{cases} \partial_1\psi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7D}} [-(13\,407 - 86\,856\zeta_i^2 - 131\,712\zeta_i^4)R^2 + \\ + (23\,534 + 32\,144\zeta_i^2)\Delta\alpha]; \\ \partial_1 R = \frac{4R\zeta_i}{D} [-(10\,441 + 15\,512\zeta_i^2)R^2 + (8\,036 + 10\,976\zeta_i^2)\Delta\alpha], \end{cases} \quad (80)$$

где

$$D = (14 + 56\zeta_i^2)(1681 + 10\,976\zeta_i^2).$$

Второе уравнение системы (80) позволяет исследовать устойчивость положения равновесия в критическом состоянии  $\alpha = \alpha_*$  или  $\Delta\alpha = 0$ . Действительно, в этом случае второе уравнение системы (80) можно представить в виде

$$\partial_1 R = \Lambda R^3; \quad \Lambda = -\frac{4\zeta_i}{D}(10\,441 + 15\,512\zeta_i^2) < 0. \quad (81)$$

Общее решение системы (81) выглядит так:

$$R(t_1) = \frac{R(0)}{\sqrt{1 - 2\Lambda R(0)^2 t_1}}, \quad R(t_1)|_{t_1 \rightarrow \infty} = 0.$$

При этом фаза  $\psi$  изменяется во времени, но ее значение не влияет на радиальное отклонение орбиты. В рассматриваемой задаче  $\Lambda < 0$  и положение равновесия в критическом состоянии является асимптотически устойчивым. Величина  $\Lambda$  называется первой *ляпуновской величиной состояния равновесия* [14], и ее знак определяет устойчивость периодического режима, рождающегося в результате бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа. В случае  $\Lambda < 0$  потеря устойчивости сопровождается рождением малого устойчивого предельного цикла, размер которого растет как корень квадратный из надкритичности  $\Delta\alpha$  [13]. Действительно, стационарные значения амплитуды и поправки к частоте автоколебаний определяются из системы (80) при условии  $\partial_1 R^0 = 0$ . Из второго уравнения системы (80) получим два неотрицательных корня:

$$R_1^0 = 0; \quad R_2^0 = 14 \sqrt{\frac{(41 + 56\zeta_i^2)}{10\,441 + 15\,512\zeta_i^2}} \sqrt{\Delta\alpha}. \quad (82)$$

Подставив (82) в первое уравнение системы (80), найдем

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi_1^0 &= \frac{82\sqrt{14}}{1681 + 10\,976\zeta_i^2} \Delta\alpha \Rightarrow \psi_1^0 = \frac{82\sqrt{14}}{1681 + 10\,976\zeta_i^2} \Delta\alpha t_1 + \text{const}; \\ \partial_1 \psi_2^0 &= \frac{2\sqrt{14}(143 + 168\zeta_i^2)}{10\,441 + 15\,512\zeta_i^2} \Delta\alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi_2^0 = \frac{2\sqrt{14}(143 + 168\zeta_i^2)}{10\,441 + 15\,512\zeta_i^2} \Delta\alpha t_1 + \text{const}. \end{aligned}$$

То есть в соответствии с экспоненциальным представлением (68) частота автоколебаний



$$v_1 = v_* + \varepsilon \frac{82\sqrt{14}}{1681+10976\zeta_i^2} \Delta\alpha; \quad v_2 = v_* + \varepsilon \frac{2\sqrt{14}(143+168\zeta_i^2)}{10441+15512\zeta_i^2} \Delta\alpha.$$

Для исследования устойчивости решений (82) рассмотрим уравнения в вариациях, которые получим из второго уравнения системы (80) с учетом (82):

$$\partial_1 \delta R|_{R=R_1^0} = \frac{784\zeta_i \Delta\alpha}{1681+10976\zeta_i^2} \delta R;$$

$$\partial_1 \delta R|_{R=R_{2,3}^0} = -\frac{1568\zeta_i \Delta\alpha}{1681+10976\zeta_i^2} \delta R.$$

Отсюда

$$\delta R(t_1)|_{R=R_1^0} = \delta R(0) \exp \left[ \frac{784\zeta_i \Delta\alpha t_1}{1681+10976\zeta_i^2} \right];$$

$$\delta R(t_1)|_{R=R_2^0} = \delta R(0) \exp \left[ -\frac{1568\zeta_i \Delta\alpha t_1}{1681+10976\zeta_i^2} \right].$$

Таким образом, после бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа вертикальное положение стойки  $R_1^0$  теряет устойчивость ( $\delta R(t_1)|_{R=R_1^0} \rightarrow \infty$ ,  $t_1 \rightarrow \infty$ ) и появляется устойчивый предельный цикл радиуса  $R_2^0$ , так как  $\delta R(t_1)|_{R=R_2^0} \rightarrow 0$ ,  $t_1 \rightarrow \infty$ .

По формулам (65), (67) и (82) вычислим стационарные решения в закритической области значений параметра нагрузки  $\alpha$ :

$$x_{01} = 28 \sqrt{\frac{\Delta\alpha}{10441+15512\zeta_i^2}} (5 \cos v\tau - \sqrt{56}\zeta_i \sin v\tau);$$

$$x_{02} = 112 \sqrt{\frac{\Delta\alpha}{10441+15512\zeta_i^2}} \cos v\tau;$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{7} + \frac{2\sqrt{14}(143+168\zeta_i^2)}{10441+15512\zeta_i^2}} \Delta\alpha.$$

В рассмотренном приближении горизонтальное положение массы  $m$  узла  $B$  (см. рис. 1) определяется как

$$\frac{x_B}{l} = -2x_{01} - x_{02} = -\rho \cos(v\tau + \chi); \quad \chi = \frac{\sqrt{56}\zeta_i}{7};$$

$$\rho = \sqrt{\frac{153\,664 + 175\,616\zeta_i^2}{10\,441 + 15\,512\zeta_i^2}} \Delta\alpha \approx$$

$$\approx 3,836\,32(1 - 0,171\,412\zeta_i^2 + 0,239\,973\zeta_i^4)\sqrt{\Delta\alpha}.$$
(83)

Для сравнения с результатами, показанными на рис. 12, проведем вычисления зависимости (83) для  $\zeta_i = 0,1$ . Получим, что в закритической области амплитуда колебаний массы  $m$  узла  $B$  вдоль оси  $x$  (см. рис. 1) вычисляется как  $\rho = 3,8298\sqrt{\Delta\alpha}$ . На рис. 13 изображена бифуркационная диаграмма для стойки Циглера, на рис. 14 – результаты вычислений полной нелинейной задачи методом установления.

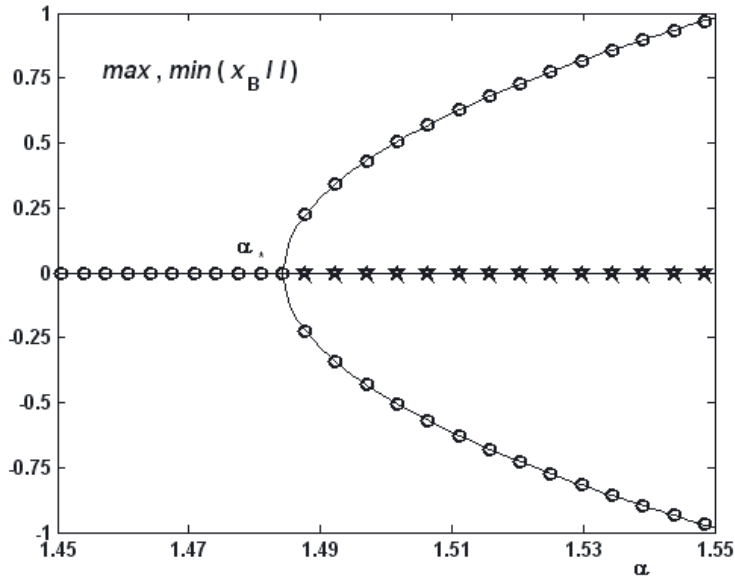
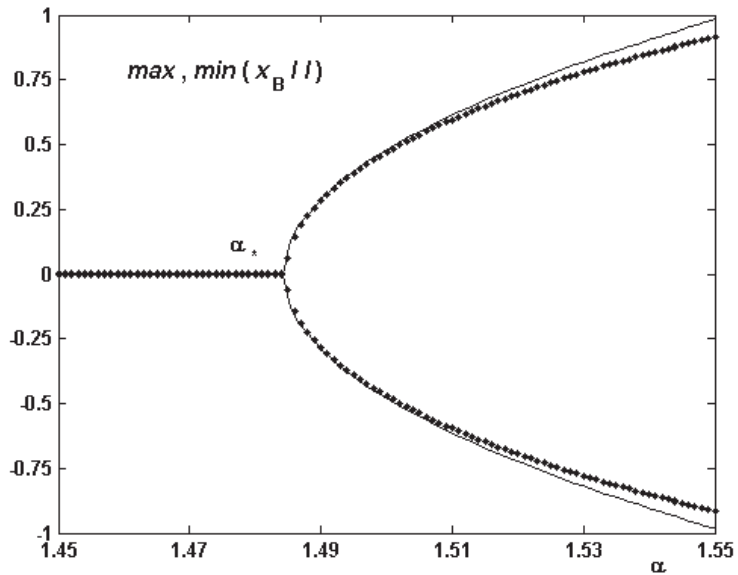


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма для стойки Циглера при  $\zeta_i = 0,1$



**Рис. 14.** Результаты расчетов. Черными точками обозначены результаты численного расчета полной системы методом установления; тонкая линия соответствует вычислениям по методу многомасштабных разложений

Сравнив графики на рис. 12 и 13, можно сделать заключение, что результаты аналитического расчета (см. рис. 13) позволяют более точно изучить поведение полученных решений вблизи критической точки. При бóльших значениях надкритичности метод установления для полной системы (см. рис. 12) дает меньшие значения амплитуд, чем асимптотический метод.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается различие потерь устойчивости при действии консервативного и неконсервативного нагружения?
2. Дайте определение критерия Эйлера.
3. Какие силы называются циркуляционными?
4. Как изменятся уравнения движения рассматриваемой системы в поле сил тяжести?
5. Получите уравнения (18).
6. Получите уравнения (21).
7. Приведите примеры механических систем с циркуляционными силами.
8. В чем состоит парадокс Циглера?
9. Каким образом изменяются характеристические показатели при бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа?
10. Каким образом изменяются характеристические показатели при бифуркации Эйлера?
11. Что такое бифуркационная диаграмма?
12. Дайте определение первой ляпуновской величины.
13. Как определяется критическое значение параметра нагрузки для систем со следящими силами?
14. В чем заключаются особенности метода многомасштабных разложений?
15. В каком случае неоднородная линейная система имеет ненулевое решение, если соответствующая однородная система вырождена?

## Литература

1. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 339 с.
3. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
4. *Nicolai E.L.* Über die Stabilität des zu einer Schraubenlinie geborgenen und gedrehten Stabes // Zeitschr. für ang. Math. und Mech. В. 6 (1926), S. 30.
5. *Николаи Е.Л.* Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 583 с.
6. *Zigler H.* Ein nichtkonservatives Stabilitätsproblem // Zeitschr. für ang. Math. und Mech. В. 31. No. 8/9 (1951).
7. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 191 с.
8. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 254 с.
9. *Kounadis A.N., Simitses G.J.* Non-conservative Systems with Symmetrizable Stiffness Matrices Exhibiting Limit Cycles // Int. J. Nonlinear Mechanics. 1997. V. 32. No. 1. P. 515–529.
10. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.
11. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 455 с.
12. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
13. *Мышкис А.Д.* Математика. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 169 с.
14. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 311 с.

## Оглавление

Предисловие .....	3
1. Основные сведения об устойчивости положений равновесия механических систем. Определение циркуляционных сил .....	5
2. Расчетная схема и вывод дифференциальных уравнений движения двухзвенного маятника .....	11
3. Численное моделирование динамики стойки Циглера .....	18
4. Анализ устойчивости вертикального положения равновесия. Бифуркация Пуанкаре – Андронова – Хопфа .....	23
5. Дестабилизирующее действие сил внутреннего трения в системах с циркуляционными силами (парадокс Циглера) .....	33
6. Анализ поведения системы при закритических нагрузках .....	38
Контрольные вопросы .....	52
Литература .....	53

*Учебное издание*

**Гуськов Александр Михайлович**  
**Пановко Григорий Яковлевич**

**ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ  
(ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ) СИЛ**

Редактор *О.М. Королева*  
Корректор *Е.К. Кошелева*  
Компьютерная верстка *А.Ю. Ураловой*

Подписано в печать 06.02.2013. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 3,26. Тираж 100 экз. Изд. № 138. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5., стр. 1.

*Для заметок*