

Имеется ступенчатая колонна, нагруженная сжимающей силой (Рис. 1). Необходимо исследовать зависимость напряжений от коэффициента k и сравнить прочности участков ВС и CD.

$F := 1$ Безразмерная сила

$a := 1$ Безразмерная полудлина стороны квадрата

Участок ВС подвержен чистому сжатию (Рис. 2):

$$\sigma_{BC} = -\frac{F}{4 \cdot a^2}$$

Участок CD нагружен той же сжимающей силой и изгибающим моментом, равном произведению силы на плечо $\left(\frac{k}{2} - 1\right) \cdot a$. (Рис. 3).

3). Момент инерции сечения на участке равен:

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot a \cdot (k \cdot a)^3 = \frac{k^3}{6} \cdot a^4$$

После преобразований имеем функцию напряжений:

$$\sigma(k, x) := -\frac{F}{k \cdot a^2} \cdot \left[\frac{6 \cdot \left(\frac{k}{2} - 1\right)}{k^2} \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right]$$

$k := 2, 2.05 \dots 8$ По определению $k > 2$

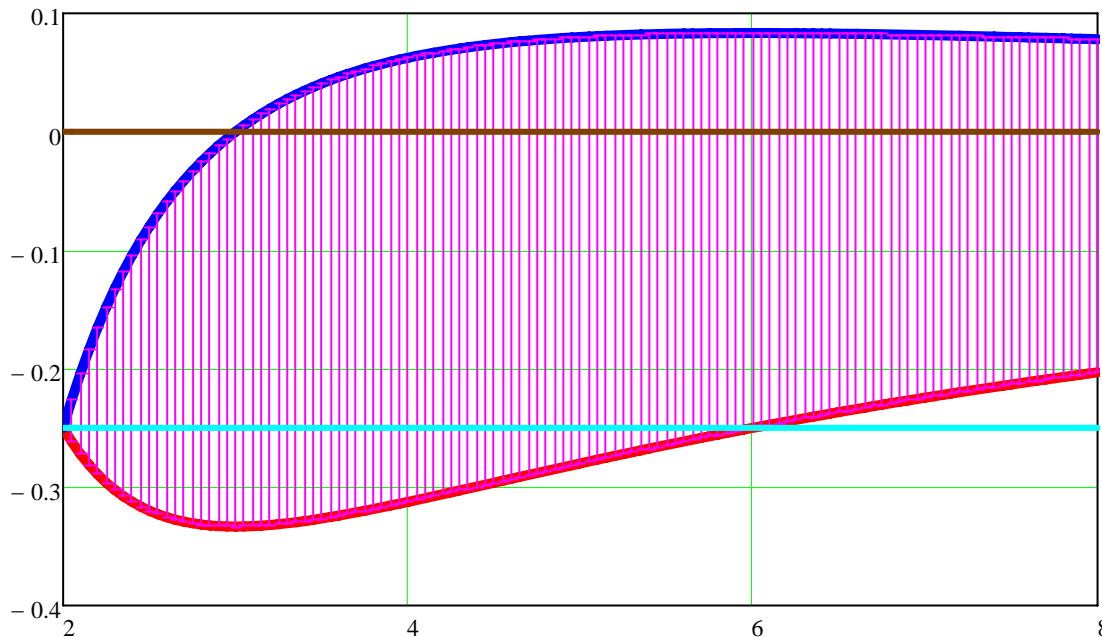
График Рис. 4 отражает зависимость от k трех напряжений:

синяя линия - напряжение в точке D;

красная линия - в точке H;

голубая линия - напряжение на участке ВС.

Штриховкой показана область промежуточных значений напряжений в различных точках отрезка DH.



Из графика видно, что:

* при $k < 3$ все три напряжения являются сжимающими;

* при $k > 6$ напряжение на участке ВС становится больше (по модулю), чем напряжение в точке D. Таким образом, при $k < 6$ прочность на участке CD будет меньше, чем на участке ВС.

$$x(k) := -\frac{k^2 \cdot a}{12 \cdot \left(\frac{k}{2} - 1\right)}$$

Абсцисса нейтральной линии

$k := 2.5, 2.51 \dots 4$

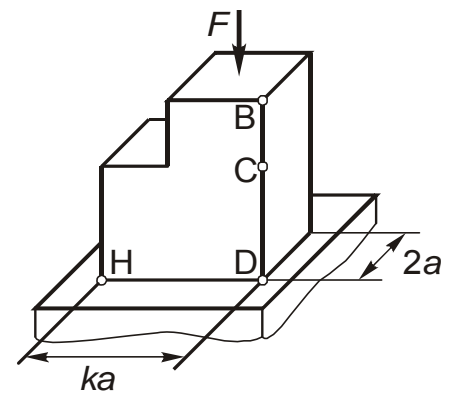


Рис. 1

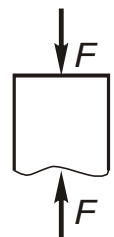
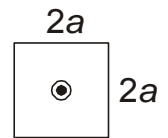


Рис. 2

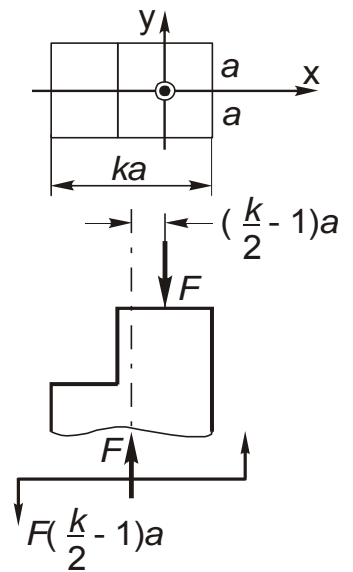
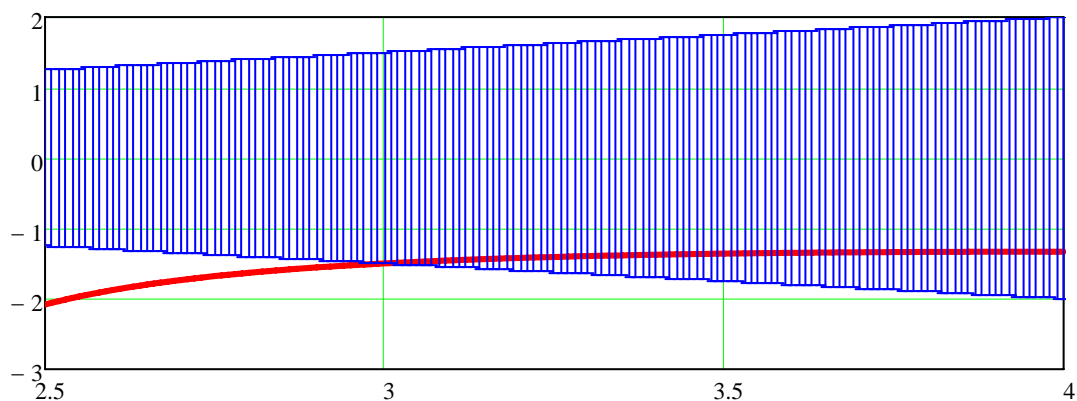


Рис. 3



Заштрихованная зона - внутри сечения. Красная кривая - абсцисса нейтральной линии

Предположим, что материал колонны имеет разные допускаемые напряжения при растяжении и сжатии:

$$\nu = \frac{\sigma_{LP}}{\sigma_{LC}} \quad \nu := 2.7$$

$\sigma_{LP} := 0.12$ Безразмерное допускаемое напряжение при растяжении

$\sigma_{LC} := \sigma_{LP} \cdot \nu \quad \sigma_{LC} = 0.324$ Безразмерное допускаемое напряжение при сжатии

$n(k, x) :=$ Функция, возвращающая коэффициент запаса

$$n(k, x) := \begin{cases} \sigma \leftarrow \sigma(k, x) \\ \frac{\sigma_{LP}}{\sigma} \text{ if } \sigma > 0 \\ \text{otherwise} \\ \begin{cases} \sigma_{min} \leftarrow \max\left(\frac{1}{4}, |\sigma|\right) \\ \frac{\sigma_{LC}}{\sigma_{min}} \end{cases} \end{cases}$$

$$k_0 := 2 \quad k := k_0, k_0 + 0.02 .. 8$$

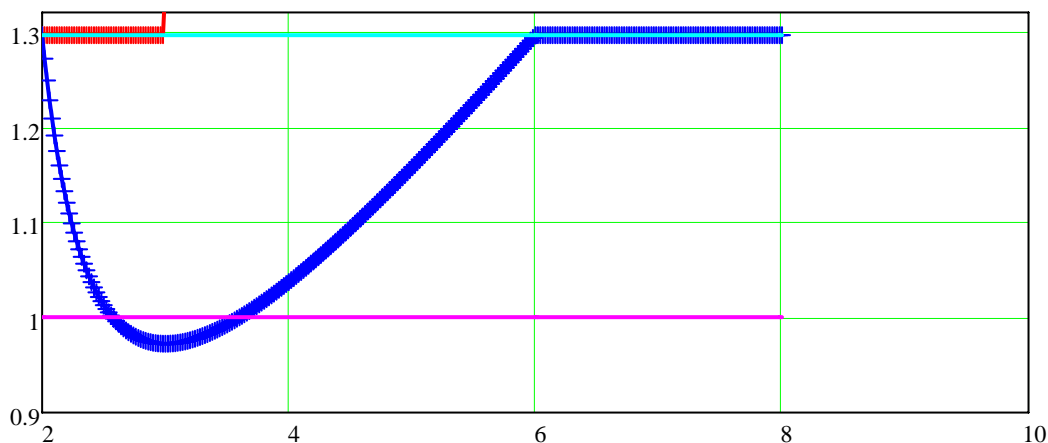


График отражает зависимость от k коэффициентов запаса:

синяя линия - коэффициент запаса в точке D;

красная линия - в точке H;

голубая линия - коэффициент запаса на участке BC;

фиолетовая линия - единица (минимальный допускаемый коэффициент запаса).

Из графика видно, что в некотором диапазоне изменения k прочность не обеспечена.

$$k_1 := \text{root}\left(n\left(k, \frac{k}{2}\right) - 1, k, 2, 3\right) \quad k_1 = 2.57 \quad \text{Начало диапазона}$$

$$k_2 := \text{root}\left(n\left(k, \frac{k}{2}\right) - 1, k, 3, 4\right) \quad k_2 = 3.603 \quad \text{Конец диапазона}$$